现代物理基础丛书　5

# 相互作用的规范理论

（第二版）

戴元本　著

河南师范大学学术专著出版基金资助

科学出版社
北　京

## 内 容 简 介

本书系统介绍弱电及强作用的规范理论，包含规范场论的基本概念、量子化与重整化、弱电统一理论、量子色动力学、大统一理论的主要物理内容及计算方法。

本书可作为粒子物理专业的研究生教材，亦可供理论物理工作者参考。

**图书在版编目(CIP)数据**

相互作用的规范理论/戴元本著.—2版.—北京：科学出版社，2005
(现代物理基础丛书；5)
ISBN 7-03-014751-0

Ⅰ.相…　Ⅱ.戴…　Ⅲ.相互作用(物理)-规范场-场论　Ⅳ.O413.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第005002号

责任编辑：胡　凯/责任校对：李奕萱
责任印制：安春生/封面设计：王　浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
1987年9月第　一　版　　开本：B5(720×1000)
2005年7月第　二　版　　印张：32 1/4
2006年12月第三次印刷　　字数：614 000
印数：4 701—6 200

**定价：68.00元**

(如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉)

# 第二版前言

在本书第二版中作者对原书做了一些补充和修改。书中增加了一些内容，其中包括第九章的9.8节和其他比较重要的物理问题。为了便于理解，新版增加了一些说明文字。修改了原书的几处疏误和一些排版错误。由于实验和理论的发展，原书中所引的不少实验数据需要更新，有些物理讨论已经过时，在第二版中都改写了。作者希望，经过这些补充和修改，本书能为现在的粒子物理和相关领域的研究生提供适当的理论基础知识,并供研究工作者参考。

戴元本

2004年8月6日

# 第一版前言

非 Abel 规范场论是近 20 余年中场论的主要发展方向，它已经在解释粒子物理现象上取得很大的成就，成为粒子物理学不可缺少的理论基础。本书的目的是为粒子物理学的研究生提供规范场论的系统知识，并供研究工作者参考。

本书的内容包括规范场论的基本概念、形式体系和弱电及强相互作用规范理论的物理预言，力求兼顾基本原理、计算方法和物理应用。阅读本书需要的预备知识包括非 Abel 规范场论发展以前的量子场论，大体相当于 Bjorken-Drell 或 Lurie 书的主要内容；此外还包括粒子物理和群论的基本知识。为方便读者，在一些章节的开始处对所需要的物理和数学基础做了扼要的回顾。对一些在规范场论发展以后才被广泛应用的场论工具，如路径积分、维数正规化等，都用专门的章节做了详细的叙述。

限于篇幅和时间，规范场论的有些方面本书未能包括，其中重要的有微分几何和纤维丛方法在规范场论中的应用、格点规范理论、引力理论和超引力理论等。

黄朝商、朱重远、张肇西和张元仲等同志看过本书的部分章节并提出了宝贵的意见，对他们的帮助作者非常感谢。

戴元本

1985 年 11 月

# 目　录

# 第一章　规范场的基本概念和经典理论

## 1.1　引　　言

在物理学的研究中基本物理规律所包含的对称性起着非常重要的作用。对称性分为两大类:一类是时空对称性,它们是与描述物理事件的时空坐标的变换(例如时空坐标的平移和 Lorentz 变换)相联系的;另一类对称性是内部对称性。在场论中,它们是与不改变时空坐标的场的变换相联系的。这种变换称为内部空间的变换。物理学中的变换构成变换群。物理规律的对称性归结为基本方程在这些变换群下的不变性。按照 Noether 定理,相应于对称群的每个生成元有物理系统的一个守恒律。

在场论中可以对不同时空点的场做独立的变换,相应的群元素是时空坐标的函数,这种变换称为定域规范变换,常简称为规范变换。规范变换一词最早是 1921 年 Weyl 引入的。当时他考虑的是各点时空度量的标度变换,企图把电磁场与理论在定域标度变换下的不变性联系起来,建立一个统一描述电磁场与引力场的理论;但是这种企图并不成功。在量子力学建立以后,Fock、Weyl 和 Pauli 等发现带电粒子与电磁场作用的量子力学是一种规范不变的理论[1],因为在这种理论中运动方程在带电粒子波函数的定域位相变换(同时使电磁势做相应的变换)下保持不变。位相变换群是内部对称群,数学上它是一种 Abel 群,即可交换群。

1954 年杨振宁和 Mills 把规范不变的理论推广到内部对称的非 Abel 群,即不可交换群[2]。虽然他们具体考虑的是同位旋 SU(2)群,但是他们的工作阐明了规范不变理论的一般结构。杨振宁和 Mills 的文章中包含了这样一种思想:定域规范不变的原则应当在物质相互作用的理论中起基本作用。这种理论的一个重要特点是,规范不变的要求在相当大的程度上决定了相互作用的形式,因此它在理论上很有吸引力。

Utiyama[3]及其后的工作阐明了 Einstein 的广义相对论也是一种规范理论,相应的规范变换是广义坐标变换和各时空点上的局部 Lorentz 标架的变换,因此是定域时空变换。

虽然杨振宁和 Mills 的文章发表后就引起很多人的兴趣并做了许多研究,但是当时规范场论有两个基本困难。第一个困难是理论与物理现象的联系。在规范不变的理论中必然存在一些矢量场,这些场称为规范场。正如电磁场是电磁作用的媒介,它们也是相互作用的媒介。在拉氏量中没有规范场的质量项,初看起来它们

似乎都必须是零质量的;但是实验上除电磁场外并未发现其他零质量的矢量场,因此理论与实验似乎存在基本的冲突。第二个困难是规范场理论在量子化与重整化方面有一些特殊的问题。在杨振宁和 Mills 的文章发表 10 年以后理论上取得了几个重大的进展。1964 年发现了对称性自发破缺使规范场得到质量的 Higgs 机制;1967 年 Fadeev 和 Popov 用泛函积分方法首次得到正确的规范场量子化规则;1971 年以后′t Hooft 等证明了规范场理论是可重整的。这才使规范场的量子理论臻于完善。

另一方面,对实验结果的唯象分析表明弱作用具有两个流相互作用的结构,好像是由矢量场传递的。实验还显示出,非 Abel 对称性在弱相互作用中起作用。Glashow 在 1961 年提出了一个把弱作用和电磁作用联系在一起的 SU(2)×U(1)规范场模型。为了得到一个包含上述性质并且可以重整的弱作用基本理论,1967 年和 1968 年 Weinberg 和 Salam 利用自发破缺的 Higgs 机制提出了完整的 SU(2)×U(1)弱电统一规范理论。这个理论非常成功地描述了低能的弱作用现象。1983 年发现了这个理论预言的传递弱作用的 $W^{\pm}$ 和 $Z^{0}$ 矢量粒子。这些成就证明了规范场论的原则在弱作用现象中是起基本作用的。

20 世纪 70 年代初提出了关于强相互作用的量子色动力学。这个理论描述夸克和相应于“色”量子数的 SU(3)群规范场的相互作用,是一种没有对称性自发破缺的规范场论。没有破缺的非 Abel 规范场论有一个独特的物质,即相互作用在近距离处变弱,这个性质称为渐近自由。它成功地解释了高能实验中发现的一系列现象,这些现象显示强子是由一些在近距离处作用很弱的点状夸克组成的。为了解释在实验中没有观察到夸克及零质量的色规范粒子,提出了“色禁闭”的假设。这个假设的含义是:在没有自发破缺的非 Abel 规范场理论中,能在远距离处观察到的物理的粒子都不带规范群的量子数,带这种量子数的粒子被规范作用禁闭在一定范围内形成此量子数为零的集团。虽然量子色动力学对低能强作用现象的预言还不能精确计算,但也取得了不少进展。因此人们认为,量子色动力学是正确的强相互作用的基本理论。

上述 20 世纪 60 年代以来的理论和实验的重要进展表明四种基本作用(电磁作用、引力作用、弱作用和强作用)可能都是规范作用。在物理学的发展中,这是人们第一次发现四种基本作用可能有共同的本质,它们可能与同一物理原则相联系。这一点有非常重要的意义。这些成就引导人们去研究把弱电作用和强作用统一描述的理论,即大统一理论。人们还企图更进一步把引力作用也和其他三种基本作用统一起来描述,但这些企图还没有得到实验的支持。由于规范场理论的重要性,也由于这种理论有它特殊的问题,包含着一系列很有趣的现象(例如磁单极、瞬子、θ 真空、守恒流的反常等),它成为场论研究的一个中心。规范场论是粒子物理现有理论基础的重要组成部分。

## 1.2　电磁作用的规范不变性

如前所述，最简单的规范理论是电磁作用的理论。令 $\psi(x)$ 表示电子场，$A_\mu(x)$ 表示电磁矢量势，$m$ 表示电子的质量，则这两种相互作用的场的拉氏量密度由下式表示（本书采用的度规、$\gamma$ 矩阵和其他约定见附录）

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi \tag{1.1}$$

其中，电子的电荷 $e<0$，而

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{1.2}$$

是电磁场的场强。从式(1.1)中的拉氏量密度得到如下的拉氏运动方程

$$\gamma_\mu(\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu)\psi(x) + m\psi(x) = 0 \tag{1.3}$$

$$\partial_\mu F_{\mu\nu}(x) = -ej_\nu(x) \tag{1.4}$$

其中

$$j_\mu = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \tag{1.5}$$

是电流密度。

式(1.1)中的拉氏量密度及相应的运动方程(1.3)在电子场 $\psi(x)$ 的位相变换

$$\psi(x) \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\psi(x), \qquad \bar{\psi}(x) \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\bar{\psi}(x) \tag{1.6}$$

下是不变的，上式中 $\alpha$ 是与时空坐标 $x$ 无关的常数。参数与时空坐标无关的变换称为整体变换。式(1.6)有时也称为整体规范变换。变换式(1.6)构成 U(1)群，它的群元可交换，因此它属于 Abel 群（严格来说，数学中定义的 U(1)群是紧致的，即参数 $\alpha$ 的限制为 $0\leqslant\alpha\leqslant2\pi$，$\alpha=2\pi$ 与 $\alpha=0$ 看作一点。在下面的讨论中不对位相参数做这样的限制）。与这个对称群相应的 Noether 守恒流当 $\alpha$ 无穷小时可表为

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\psi_\gamma}\delta\psi_\gamma + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\bar{\psi}_\gamma}\delta\bar{\psi}_\gamma = \alpha\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_\mu\psi = \alpha j_\mu \tag{1.7}$$

这里，$j_\mu$ 正是式(1.5)中的电流密度。

然而拉氏量密度式(1.1)有比整体位相变换式(1.6)更大的不变性。对各时空点上的电子场 $\psi(x)$ 做独立的位相变换

$$\psi(x) \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha(x)}\psi(x), \qquad \bar{\psi}(x) \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(x)}\bar{\psi}(x) \tag{1.8}$$

同时对矢量势 $A_\mu(x)$ 做如下的变换

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \tag{1.9}$$

其中，$\alpha(x)$ 是时空坐标的函数。式(1.8)和(1.9)中的变换称为定域规范变换。以

后简称为规范变换。电磁场强 $F_{\mu\nu}$ 在规范变换下不变

$$F_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu} \tag{1.10}$$

电子场 $\psi(x)$ 的时空微商 $\partial_\mu \psi$ 在式(1.1)中只以组合形式

$$D_\mu \psi \equiv (\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu)\psi \tag{1.11}$$

出现,在规范变换下为

$$D_\mu \psi \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha(x)} D_\mu \psi \tag{1.12}$$

$D_\mu$ 称为规范协变微商。由式(1.10)及(1.12)知拉氏量密度式(1.1)、运动方程(1.3)及(1.4)在规范变换下是不变的。因此由场方程的解做规范变换得到的也是场方程的解。此外,所有物理量,例如场的能量、动量、角动量、电流和它们的密度都是规范不变的。理论的这些性质表示各时空点上电子场 $\psi(x)$ 的位相允许独立地任意选取,这相当于按式(1.9)重新定义矢量势 $A_\mu(x)$ 而没有任何物理的影响。不同的 $\alpha(x)$ 称为不同的规范。规范自由度是非物理的自由度。

电磁作用的规范不变性是与光子静质量为零相联系的。假如在拉氏量密度中有一个质量项 $-\frac{1}{2}mA_\mu A_\mu$,则规范不变性将不成立。

以上的结论也适用于一般的场 $\phi_i(x)(i=1,2,\cdots,N)$ 的电磁作用理论。把 $\phi_i(x)$ 看作一列矩阵 $\phi(x)$ 的分量。设 $Q$ 为电荷矩阵,其本征值为电荷与电子电荷 $e$ 之比。考虑整体规范变换

$$\phi \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha Q}\phi, \qquad \phi^* \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha Q}\phi^* \tag{1.13}$$

其中,$\alpha$ 是常数。设拉氏量密度

$$\mathscr{L}(\partial_\mu \phi, \partial_\mu \phi^*, \phi, \phi^*)$$

在变换式(1.13)下不变,则拉氏量密度

$$\mathscr{L}_\phi(D_\mu\phi, D_\mu\phi^*, \phi, \phi^*) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{1.14}$$

在相应的 U(1)定域规范变换下不变,上式中

$$D_\mu\phi = (\partial_\mu - \mathrm{i}eQA_\mu)\phi, \qquad D_\mu\phi^* = (\partial_\mu + \mathrm{i}eQA_\mu)\phi^* \tag{1.15}$$

反过来说,如果我们以 U(1)规范不变性作为物理原则,则由于要求 $\phi_i$ 场的动能项不导致规范不变性的破坏,必然存在零质量矢量场 $A_\mu(x)$,它在规范变换下按式(1.9)变换,且拉氏量密度的形式为

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(D_\mu\phi, D_\mu\phi^*, \phi, \phi^*, F_{\mu\nu}) \tag{1.16}$$

假设 $\mathscr{L}$ 中包含 $A_\mu$ 场的动能项。如果再假设 $\mathscr{L}$ 中只包含量纲不大于 4 的场量的乘积(如 $\mathscr{L}$ 不满足此条件则量子化的场论是不可重整的),则式(1.16)进一步限制为

式(1.14)。由式(1.14)描述的电磁相互作用称为最小耦合。如果允许量纲大于4的项,则 $\mathscr{L}$ 中还可能有其他的项。例如,Dirac 场的电磁作用中可以有如下的磁矩耦合项

$$\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}Q\psi F_{\mu\nu}$$

这样的项也是规范不变的。

除与整体位相变换不变性相联系的电荷外,定域规范不变性并不带来新的守恒量。为了看清这一点我们把通常求 Noether 流的手续用于规范变换。设 $\varphi_l$ 代表所有的场并设拉氏量中不包含场的高于一阶的微商。考虑一般的变换

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x') = \varphi(x) + \delta\varphi(x) + \delta x_\mu \partial_\mu \varphi, \qquad x' = x + \delta x$$

在这个变换下四维区域 $\Omega$ 内作用量的改变为

$$\begin{aligned}\delta S_\Omega = \delta\int_\Omega \mathrm{d}^4 x \mathscr{L} &= \int_\Omega \mathrm{d}^4 x\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_l}\delta\varphi_l + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_l}\partial_\mu(\delta\varphi_l) + \partial_\mu(\mathscr{L}\delta x_\mu)\right]\\ &= \int_\Omega \mathrm{d}^4 x\left[\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_l} - \partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_l)}\right)\delta\varphi_l + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_l}\delta\varphi_l + \mathscr{L}\delta x\right)\right] \qquad (1.17)\end{aligned}$$

上式右方第一个圆括号内的量记为 $\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\varphi_l}$,如作用量在此变换下不变,由式(1.17)可得

$$-\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\varphi_l}\delta\varphi_l = \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_l}\delta\varphi_l + \mathscr{L}\delta x_\mu\right] \qquad (1.18)$$

由拉氏运动方程

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\varphi_l} = 0$$

得到守恒流方程

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_l)}\delta\varphi_l + \mathscr{L}\delta x_\mu\right) \propto \partial_\mu J_\mu = 0 \qquad (1.19)$$

上式中的 $J_\mu$ 是 Noether 流。对于内部对称性,上式中的 $\delta x_\mu = 0$。

对于由式(1.14)中的拉氏量描述的带电场 $\phi$ 与电磁场 $A_\mu$ 的作用,在整体无穷小位相变换下利用

$$\delta\phi = -\mathrm{i}\alpha Q\phi, \qquad \delta A_\mu = 0$$

由式(1.19)得到守恒的电流密度为

$$ej_\mu = -e\mathrm{i}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi}Q\phi - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi^*}Q\phi^*\right) = \frac{\partial\mathscr{L}_\phi}{\partial A_\mu} \qquad (1.20)$$

电磁场运动方程为

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = -ej_\nu \qquad (1.21)$$

现在考虑规范变换，由式(1.9)和(1.19)并利用式(1.20)得到守恒流密度为

$$F_{\mu\nu}\partial_\nu\alpha - \alpha(x)\mathrm{i}e\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi}Q\phi - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi^*}Q\phi^*\right)$$
$$= F_{\mu\nu}\partial_\nu\alpha + \alpha(x)ej_\mu$$

利用场方程(1.21)并考虑到 $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ 可将上式写为

$$\partial_\nu(F_{\mu\nu}\alpha(x)) \tag{1.22}$$

式(1.22)是一个全散度项，由 Gauss 定律知，如限制在有限的空间区域做规范变换，则相应的守恒荷

$$\int \mathrm{d}^3x\partial_i(F_{0i}(x)\alpha(x)) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E}(x)\alpha(x) \qquad (i = 1,2,3)$$

为零。证明了不存在与定域规范变换相联系的守恒荷。如果 $\alpha(x)$ 在有限的空间区域外为常数，则式(1.22)化为通常的电荷。

电磁作用理论的定域规范不变性虽不导致相应的守恒荷，但是它导致一系列恒等式。它要求物理量的理论计算结果必须是规范不变的。在量子化的电磁作用理论中，$S$ 矩阵必须是规范不变的，这是任何合理的近似计算法则所必须满足的要求。除 $S$ 矩阵外，在量子电动力学中常常需要计算包含光子和电子外线的 Green 函数。Green 函数不是有直接物理意义的量，它们不是规范不变的；但是由理论的规范不变性可以导出这些 Green 函数之间的一些关系式，它们被称为 Ward-Takahashi 恒等式。这些恒等式可以由规范不变性利用量子理论的泛函积分表示方法推导出来。我们将在第三章中用这种方法推导 Ward-Takahashi 恒等式。在量子电动力学中这些恒等式的等价形式也可以由电流守恒推导出来。这是由于作用量中电磁场与电荷的作用项为 $e\int \mathrm{d}^4xA_\mu(x)j_\mu(x)$，在规范变换下这项的改变为

$$-\int \mathrm{d}^4xj_\mu(x)\partial_\mu\alpha(x) = \int \mathrm{d}^4x\partial_\mu j_\mu(x)\alpha(x)$$

因此由流守恒可以得到由规范不变性得到的结果。

现在我们由流守恒推导 Ward-Takahashi 恒等式。量子化后 $\psi(x)$ 和 $A_\mu(x)$ 成为算符，电荷密度算符 $j_0(x)$ 与场算符的正则对易关系为

$$[j_0(x),\psi(y)]\delta(x_0 - y_0) = -\psi(x)\delta^4(x - y) \tag{1.23}$$

$$[j_0(x),\bar{\psi}(y)]\delta(x_0 - y_0) = \bar{\psi}(x)\delta^4(x - y) \tag{1.24}$$

$$[j_0(x),A_\mu(y)]\delta(x_0 - y_0) = 0 \tag{1.25}$$

在量子电动力学中 $A_\mu(x)$ 只能通过电流密度 $j_\mu(x)$ 与电子场 $\psi(x)$ 耦合，不失一般性可以限于考虑如下的联通 Green 函数

$$G_{\mu;\mu_1\cdots\mu_m}(u;x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n,z_1,\cdots,z_m)$$

$$= \langle 0 | T(j_\mu(u)\psi(x_1)\cdots\psi(x_n)\bar{\psi}(y_1)\cdots\bar{\psi}(y_n)A_{\mu_1}(z_1)\cdots A_{\mu_m}(z_m))|0\rangle_c \tag{1.26}$$

其中,场算符都取 Heisenberg 图像,$T$ 表示编时乘积。设 $A(x)$和 $B(x)$为任意两个定域算符,其中至少有一个是 Bose 算符,我们有恒等式

$$\frac{\partial}{\partial x_0}T(A(x)B(x')) = [A(x),B(x')]\delta(x_0 - x_0') + T\left(\frac{\partial}{\partial x_0}A(x)\cdot B(x')\right) \tag{1.27}$$

上式可以用 $T(A(x)B(x'))=\theta(x_0-x_0')A(x)B(x')+\theta(x_0'-x_0)B(x')\cdot A(x)$和$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_0}\theta(x_0)=\delta(x_0)$证明并推广到多个算符乘积的情况。利用式(1.23)~(1.27)及电流守恒

$$\partial_\mu j_\mu(x) = 0 \tag{1.28}$$

得到

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial u_\mu}G_{\mu;\mu_1\cdots\mu_m}(u;x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n,z_1,\cdots,z_m)\\&= \sum[-\delta^4(u-x_n)+\delta^4(u-y_n)]G_{\mu_1\cdots\mu_m}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n,z_1,\cdots,z_m)\end{aligned} \tag{1.29}$$

其中

$$\begin{aligned}&G_{\mu_1\cdots\mu_m}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n,z_1,\cdots,z_m)\\&= \langle 0|T(\psi(x_1)\cdots\psi(x_n)\bar{\psi}(y_1)\cdots\bar{\psi}(y_n)A_{\mu_1}(z_1)\cdots A_{\mu_m}(z_m))|0\rangle\end{aligned} \tag{1.30}$$

引入 Green 函数式(1.26)和(1.30)的傅氏变换

$$\begin{aligned}&\delta^4\left(q+\sum p_i-\sum p_i'+\sum k_j\right)\widetilde{G}_{\mu;\mu_1\cdots\mu_m}(q;p_i,p_i',k_j)\\&= \frac{1}{(2\pi)^4}\int G_{\mu;\mu_1\cdots\mu_m}(u;x_i,y_i,z_i)\exp[-\mathrm{i}(q\cdot u\\&\quad + p_j\cdot x_i - p_i'\cdot y_i + k_j\cdot z_j)]\cdot \mathrm{d}^4u\prod_i \mathrm{d}^4x_i\mathrm{d}^4y_i\prod_j\mathrm{d}^4z_j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\delta^4\left(\sum p_i-\sum p_i'+\sum k_j\right)\widetilde{G}_{\mu_1\cdots\mu_m}(p_i,p_i',k_j)\\&= \frac{1}{(2\pi)^4}\int G_{\mu_1\cdots\mu_m}(x_i,y_i,z_j)\exp[-\mathrm{i}(p_i\cdot x_i\\&\quad - p_i'\cdot y_i + k_j\cdot z_j)]\prod_i\mathrm{d}^4x_i\mathrm{d}^4y_i\prod_j\mathrm{d}^4z_j\end{aligned}$$

由式(1.29)得到 Ward-Takahashi 恒等式

$$\mathrm{i}q_\mu\widetilde{G}_{\mu;\mu_j}(q;p_i,p_i',k_j) = -\sum_k[\widetilde{G}_{\mu_j}(p_i+\delta_{ik}q,p_i',k_j)$$

$$- \tilde{G}_{\mu_j}(p_i, p_i' - \delta_{ik}q, k_j)] \tag{1.31}$$

例如，对 $n=1, m=0$ 的情形，我们有

$$\tilde{G}(p,p) \equiv -\mathrm{i}S_F'(p)$$

$$\tilde{G}_{\mu_j}(q;p,p') \equiv -\mathrm{i}S_F'(p')\Gamma_\mu(p',p)S_F'(p)$$

其中，$S_F'$ 为包含辐射修正的电子全传播子，$\Gamma_\mu$ 为正规顶角（即不能通过切断一条内线使它分解为两个不联通子图形的顶角函数），此时式(1.31)化为

$$-q_\mu\Gamma_\mu(p',p) = \mathrm{i}S'^{-1}_F(p') - \mathrm{i}S'^{-1}_F(p)$$

在 $q=p'-p\to 0$ 时，由式(1.32)得到通常的 Ward 恒等式

$$\Gamma_\mu(p,p) = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial p_\mu}S'^{-1}_F(p) \tag{1.32}$$

由式(1.31)得到

$$q_\mu \prod_k \frac{\mathrm{i}\gamma\cdot p_k + m}{-\mathrm{i}} \cdot \frac{\mathrm{i}\gamma\cdot p_k' + m}{-\mathrm{i}} \times \tilde{G}_{\mu;\mu_j}(q;p_i,p_i',k_j)\big|_{\mathrm{i}\gamma\cdot p_k+m=\mathrm{i}\gamma\cdot p_k'+m=0} = 0 \tag{1.33}$$

上式是当所有电子外线都在质壳上时去掉电子外线的 Green 函数所满足的 Ward-Takahashi 恒等式。

## 1.3 非 Abel 群及其李代数

在物理学中有一些非 Abel 对称群起作用，这些群的乘法是不可交换的，例如早年由唯象研究得到的强相互作用的同位旋 SU(2)和 SU(3)对称。SU(3)对称性的研究导致夸克和层子模型的产生。在夸克的层次除了 SU(3)对称以外还有本书中将介绍的色 SU(3)和弱电统一的 SU(2)×U(1)对称，这些都是非 Abel 对称性。

我们首先回忆有关李群和李代数的一些数学概念和公式。设 $G$ 为李群，它的元素 $g$ 依赖于 $r$ 个连续实参数 $\alpha^i(i=1,2,\cdots,r)$。如参数 $\alpha^i$ 的值域是有界的，则群 $G$ 称为紧致的。设 $H$ 是 $G$ 的子群，$h$ 和 $g$ 分别为 $H$ 和 $G$ 的元素。如果对所有的 $g$ 和 $h$，$ghg^{-1}$ 都是 $H$ 的元素，则 $H$ 称为 $g$ 的不变子群。如 $G$ 不含非平凡不变子群，$G$ 称为单纯群。单纯群的直积称为半单纯群。$N$ 维转动群 $O(N)$ 是单纯和紧致的，它的群参数可取为表征转轴方向的方位角和绕这个转轴所转过的角度，这些角度都小于 2π 或小于 π。行列式为 1 的 $N$ 维幺正群 SU($N$)也是单纯和紧致的。没有行列式为 1 的条件的幺正群 U($N$)是紧致的和半单的。但它不是单纯群，因为它含有一个与其他元素交换的子群 U(1)。U($N$)=U(1)⊗SU($N$)，这里⊗表示直乘。Lorentz 群是单纯的但不是紧致的。包含三维转动群 O(3)和平移群

的 Euclid 群既不是半单的也不是紧致的，因为它包含非紧致的平移群作为不变子群，这个子群的元素与 O(3)不可交换。

设 $H$ 是$G$ 的子群，$g_1$ 和 $g_2$ 是 $G$ 的元素。集合 $g_1H$ 和$g_2H$ 或者彼此重合或者不相交。集合 $g_iH$ 称为$H$ 的左陪集。相似地，集合 $Hg_i$ 称为$H$ 的右陪集。$H$ 的不相重合的陪集的集合$\{gH\}$用 $G/H$ 表示。

陪集 $gH$ 和$Hg$ 不一定重合。如对所有属于 $G$ 的$g$ 有$gH=Hg$ 则有$gHg^{-1}=H$，因此 $H$ 是不变子群。在这种情况下陪集的集合 $G/H$ 构成一个群，称为商群。

相应于每个参数 $\alpha^i$ 有一个群的生成元$X_i(i=1,2,\cdots,r)$，它们满足对易关系

$$[X_i,X_j]=\mathrm{i}f_{ij}{}^kX_k \tag{1.34}$$

其中，$f_{ij}^k$为实数，它们称为群的结构常数。对非 Abel 群，$f_{ij}^k$不全为零。由 $X_i$ 张成的线性矢量空间用$A$ 表示，它的元素

$$\alpha=\sum\alpha^iX_i \quad 及 \qquad \beta=\sum\beta^iX_i$$

的乘法由

$$\alpha\times\beta\equiv[\alpha,\beta]$$

定义。线性空间 $A$ 在乘法和加法下封闭，它称为群 $G$ 的李代数。我们限制 $\alpha^i$，$\beta^i$ 为实数，这时 $A$ 称为实李代数。

结构常数满足反对称条件

$$f_{ij}{}^k=-f_{ji}{}^k$$

及由 Jacobi 恒等式

$$[X_i,[X_j,X_k]]+[X_j,[X_k,X_i]]+[X_k,[X_i,X_j]]=0 \tag{1.35}$$

得到的条件

$$f_{ij}{}^lf_{lk}{}^m+f_{jk}^lf_{li}{}^m+f_{ki}{}^lf_{lj}{}^m=0 \tag{1.36}$$

引入

$$g_{ij}=g_{ji}\equiv f_{il}{}^mf_{jm}{}^l \tag{1.37}$$

在矢量空间 $A$ 的基矢 $X_i$ 的线性变换

$$X_i'=c_i^jX_j$$

下 $g_{ij}$按张量变换，而两个元素 $\alpha$ 和$\beta$ 的内积

$$(\alpha,\beta)\equiv\alpha^i\beta^jg_{ij}$$

是不变的。$g_{ij}$称为李代数$A$ 的度规张量。由式(1.36)和(1.37)知由

$$f_{ijk}\equiv f_{ij}{}^kg_{lk} \tag{1.38}$$

定义的常数 $f_{ijk}$对三个指标$i,j,k$ 是全反对称的。对半单纯紧致李群总可以通过基矢 $X_i$ 的线性变换使度规张量变为

$$g_{ij} = \delta_{ij} \tag{1.39}$$

这时对易关系可写为

$$[X_i, X_j] = \mathrm{i} f_{ijk} X_k \tag{1.40}$$

紧致李群 $G$ 的任一元素 $g$ 都可以写成如下的形式

$$g = \exp(-\mathrm{i}\alpha^i X_i) \tag{1.41}$$

即可以用李代数 $A$ 的元素的指数表示。这种表示称为群元的正则表示。群元素也可以用生成元表示为其他形式。

李群的局部性质决定于它的李代数。但是它的整体性质则还与参数 $\alpha^i$ 的空间的整体性质有关。例如,SU(2)和 O(3)有相同的李代数。SU(2)群有一个由元素 $I$ 及 $-I$($I$ 是 $2\times2$ 单位矩阵)构成的不变子群 $z_2$,O(3)群与商群 SU(2)/$z_2$ 同构。SU(2)群称为 O(3)的泛覆盖群。一般言之,如果不同构的群,$G_m$($m=1,2,\cdots,M$)有相同的李代数,则其中必有一个泛覆盖群,设为 $G_1$。其余的群 $G_m$($m\neq1$)都与 $G_1$ 和其 $m$ 阶离散子群 $z_m$ 的商群 $G_1/z_m$ 同构。

设 $R$ 为 $N$ 维矢量空间,$T_i$($i=1,2,\cdots,r$)为作用在 $R$ 上的线性算符。如果它们满足和式(1.40)相应的对易关系

$$[T_i, T_j] = \mathrm{i} f_{ijk} T_k \tag{1.42}$$

则由 $T_i$ 张成的线性空间称为由 $X_i$ 张成的李代数 $A$ 的表示,记为 $D(A)$。在 $R$ 中选取一组基矢后 $T_i$ 可以表为 $N\times N$ 矩阵,$R$ 称为李代数 $A$ 的表示空间。如果 $R$ 不包含在 $D(A)$ 的作用下不变的非平凡子空间则表示 $D(A)$ 称为不可约的,否则称为可约的。对半单李群的可约表示,$D(A)$ 中的所有矩阵都能通过 $R$ 中基矢的线性变换同时方块对角化,表示空间 $R$ 成为几个不变子空间的直和。这种性质称为完全可约性。

李代数 $A$ 的表示中维数最小的称为基础表示。基础表示可能不止一个。一般的不可约表示可以由基础表示的张量积中分解出不可约的成分而得到。如果我们把 $A$ 本身看作所考虑的线性空间 $R$,而相应于 $X_i$ 的算符 $T_i\equiv D(X_i)$ 对 $A$ 的元素 $\alpha$ 的作用取为

$$T_i\alpha \equiv [X_i, \alpha] \tag{1.43}$$

则由式(1.40)及 Jacobi 恒等式(1.35)知道由式(1.43)定义的算符满足式(1.42)。因此它们构成 $A$ 的一个表示。写成矩阵形式,$T_i$ 的矩阵元为

$$(T_i)_{jk} = -\mathrm{i} f_{ijk} \tag{1.44}$$

这个表示称为伴随表示。

如对应于群 $G$ 的任意元素 $g$ 有非奇异矩阵 $D(g)$,且对应于群的乘法 $g=$

$g_1g_2$ 有 $D(g)=D(g_1)D(g_2)$，则称 $D(g)$ 的全体为群 $G$ 的表示，记为 $D(G)$。$R$ 也构成以 $A$ 为李代数的群 $G$ 的表示空间。此时式(1.41)中的元素 $g$ 的表示为

$$D(g) = \exp(-\mathrm{i}\alpha^i T_i) \tag{1.45}$$

当以 $A$ 为李代数的群不止一个时，如果 $G$ 为泛覆盖群，则式(1.45)中的 $D(g)$ 与 $g$ 一一对应，此时 $D(G)$ 称为群 $G$ 的忠实表示。如 $G$ 不是泛覆盖群，则可能有一个以上的 $D(g)$ 与同一元素 $g$ 对应。例如，旋量表示是与 SU(2)群一一对应的，对 O(3)群则是二对一的相应。

由式(1.42)知，如矩阵 $T_i(i=1,2,\cdots,r)$ 构成 $X_i$ 的表示，则 $T_i$ 的厄米共轭 $T_i^\dagger$ 也构成 $X_i$ 的表示。因此不妨取 $T_i$ 为厄米的。此时式(1.45)中的 $D(g)$ 是幺正矩阵，即

$$DD^\dagger = D^\dagger D = I \tag{1.46}$$

满足上式的表示称为幺正表示。以后常用符号 $U(g)$ 代替 $D(g)$。

当 $T_i$ 满足式(1.42)时可以证明，对不可约表示

$$\mathrm{Tr}(T_iT_j) = \delta_{ij}K \tag{1.47}$$

其中，$K$ 是与表示 $R$ 有关但与 $i,j$ 无关的常数。

在场论中，设有 $N$ 个场 $\varphi_l(x)(l=1,2,\cdots,N)$，记为 $N$ 分量矢量 $\varphi(x)$。又设 $G$ 为理论的内部对称群，$\varphi(x)$ 场构成群的表示空间(不一定不可约)。令 $T_i$ 为群 $G$ 的生成元 $X_i$ 在 $\varphi(x)$ 场所属表示中的矩阵表示，它们是满足对易关系式(1.42)的 $N\times N$ 矩阵。此时拉氏量密度在如下的变换下不变

$$\varphi(x)\rightarrow\varphi'(x) = U(g)\varphi(x) = \exp(-\mathrm{i}\alpha^iT_i)\varphi(x) \tag{1.48}$$

其中，$\alpha^i$ 是与时空坐标 $x$ 无关的群参数。这样的变换称为整体规范变换。对无穷小变换，上式化为

$$\delta\varphi(x) = -\mathrm{i}\alpha^iT_i\varphi(x) \tag{1.49}$$

由普遍公式(1.19)得到与内部对称群 $G$ 相联系的 Noether 守恒流为

$$j_\mu^i = -\mathrm{i}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\varphi}T_i\varphi \equiv -\mathrm{i}\pi_\mu T_i\varphi,\qquad i = 1,2,\cdots,r \tag{1.50}$$

## 1.4　非 Abel 规范不变的经典场论

1954 年杨振宁和 Mills 把规范场论推广到非 Abel 对称群。当时人们知道的非 Abel 内部对称性只有同位旋。人们相信强作用具有同位旋空间 SU(2)变换下的对称性，质子和中子构成同位旋二重态。规定质子的同位旋第 3 分量 $T_3=\frac{1}{2}$，

中子的 $T_3 = -\frac{1}{2}$。假如不存在电磁作用和弱作用，则质子和中子将具有完全相同的质量和完全相似的其他物理性质。在这种情况下，哪种核子称为质子，哪种核子称为中子(也就是哪个方向规定为同位旋空间第 3 轴的正向)，是没有任何物理含义的约定，可以完全自由地选择的。然而按照当时人们的观念，一旦在初始时刻 $t_0$ 在空间某一点 $\boldsymbol{x}_0$ 选定了一种核子称为质子，在所有的时空点的选择也就确定了。因为质子和质子的相互作用与质子和中子的相互作用是不同的，实验可以判别两个核子属于同一种或不同种。我们可以设想使 $\boldsymbol{x}_0$ 点的质子自由运动到 $\boldsymbol{x}$ 点，然后与在 $\boldsymbol{x}$ 点的一个核子作用，用这个方法判定这个核子是质子还是中子。在这个想法中已经假定，质子由 $\boldsymbol{x}_0$ 点自由运动到 $\boldsymbol{x}$ 点以后只能看作是质子。在通常的只有整体对称性的理论形式中，确实是如此的，同位旋守恒要求自由运动的质子不会变成中子。但是从另一方面看，场论是定域的理论，在时空点($\boldsymbol{x}, t$)选定一种核子称为质子(也就是选定同位旋空间中的一个方向)只涉及时空点($\boldsymbol{x}, t$)的无穷小邻域的场的表示式，与($\boldsymbol{x}_0, t_0$)点的场无关。因此只能在所有的时空点做统一选择的观念似乎与场论的定域性矛盾。按照这个思想应当容许在不同的时空点做独立选择，并且不同的独立选择在物理上是等价的。进一步的问题是：如果理论满足这个要求，它应当有什么样的结构？杨振宁和 Mills 的文章提出并且解决了这个问题。这个问题可以直接推广到任意的内部对称性。设理论有内部对称群 $G$，则拉氏量在群 $G$ 下不变。如果测量仪器本身在内部空间中没有特殊取向，各种可以测量的物理量，例如与时空对称性相联系的守恒量能量、动量和角动量以及与内部对称群相联系的不变量(例如总同位旋)在整体变换式(1.48)下都是不变的。变换式(1.48)代表内部空间基矢的重新选择。由于上述各种物理量的不变性，不同的选择在物理上是没有分别的。现在考虑各时空点独立地做内部空间基矢的重新选择，它可以用如下的定域变换表示

$$\varphi(x) \to \varphi'(x) = U(g(x))\varphi(x) = \exp(-\mathrm{i}\alpha^i(x)T_i)\varphi(x) \qquad (1.51)$$

其中，$\alpha^i(x)$依赖于时空坐标 $x$。现在的问题是：怎样构造一个理论使得各种由式(1.51)描述的重新选择在物理上没有区别？

如果理论中的拉氏量在变换式(1.51)下不变，上述问题就能得到肯定的回答。但是容易看到，如果只有按式(1.51)变换的场拉氏量不可能保持不变。为了看清这一点不妨假设拉氏量密度

$$\mathscr{L}_\phi(\partial_\mu\phi, \phi) \qquad (1.52)$$

在变换式(1.48)下不变，因为变换式(1.48)是变换式(1.51)的特例。在定域场论中，这意味着 $\mathscr{L}_\phi$ 在变换

$$\phi \to U\phi, \qquad \partial_\mu\phi \to U\partial_\mu\phi \qquad (1.53)$$

下保持不变。在上式中 $U$ 可以是 $x$ 的函数。在定域变换式(1.51)下

$$\partial_\mu\phi \to U\partial_\mu\phi + (\partial_\mu U)\phi \tag{1.54}$$

由于上式中最后一项的存在,拉氏量密度式(1.52)在变换式(1.51)下不是不变的。为了构造一个在定域变换下不变的理论必须引入矢量场 $A_\mu(x)$,它是内部矢量空间中的 $N\times N$ 矩阵。在做变换式(1.51)的同时使 $A_\mu$ 做相应的变换。暂时限于 $G$ 是单纯群的情况,这时我们要求组合

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - \mathrm{i}gA_\mu \tag{1.55}$$

有如下的变换性质

$$D_\mu\phi \to UD_\mu\phi \tag{1.56}$$

式(1.55)中的 $g$ 是一个常数,$D_\mu$ 称为协变微商。把拉氏量密度中与 $\phi$ 场有关的项取为

$$\mathscr{L}_{\phi A} = \mathscr{L}_\phi(D_\mu\phi,\phi) \tag{1.57}$$

由 $\mathscr{L}_\phi$ 在变换式(1.53)下的不变性可以知道 $\mathscr{L}_{\phi A}$ 在变换式(1.51)和(1.56)下是不变的。

变换后的矢量场 $A'_\mu(x)$ 必须满足

$$U\partial_\mu\phi + (\partial_\mu U)\phi - \mathrm{i}gA'_\mu U\phi = U(\partial_\mu - \mathrm{i}gA_\mu)\phi$$

即

$$A'_\mu U\phi = \left(UA_\mu - \frac{\mathrm{i}}{g}\partial_\mu U\right)\phi$$

由于 $\phi$ 是任意的,我们得到

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = U(x)A_\mu(x)U^{-1}(x) - \frac{\mathrm{i}}{g}\partial_\mu U(x)\cdot U^{-1}(x) \tag{1.58}$$

由于$\partial_\mu U\cdot U^{-1}$是群 $G$ 的李代数$A$ 的矩阵表示$D(A)$中的量,$A_\mu(x)$也是 $D(A)$中的量。它可以表为李代数的基 $X_i$ 的矩阵表示 $T_i$ 的线性组合,即

$$A_\mu(x) = A^i_\mu(x)T_i \tag{1.59}$$

由式(1.51)及(1.58)组成的变换称为定域规范变换,简称为规范变换。它是电磁场规范变换推广到非 Abel 对称群的结果。在群 $G$ 为 U(1)时,式(1.51)和(1.58)分别回到式(1.13)和(1.9)。$A^i_\mu(x)$称为规范场,这里 $i=1,2,\cdots,r$,$r$ 为群的秩,即生成元的个数。

容易证明规范变换构成群,相继做变换矩阵为 $U_1(x)$和 $U_2(x)$的两次变换等于做变换矩阵为

$$U = U_2U_1$$

的规范变换,事实上在这两次变换下

$$
\begin{aligned}
A_\mu \to U_1 A_\mu U_1^{-1} - \frac{\mathrm{i}}{g}\partial_\mu U_1 \cdot U_1^{-1} &\to U_2 U_1 A_\mu U_1^{-1} U_2^{-1} \\
&- \frac{\mathrm{i}}{g} U_2 \partial_\mu U_1 \cdot U_1^{-1} U_2^{-1} - \frac{\mathrm{i}}{g}\partial_\mu U_2 \cdot U_2^{-1} \\
&= U A_\mu U^{-1} - \frac{\mathrm{i}}{g} U_2 \partial_\mu U_1 \cdot U^{-1} - \frac{\mathrm{i}}{g}\partial_\mu U_2 \cdot U_1 U^{-1} \\
&= U A_\mu U^{-1} - \frac{\mathrm{i}}{g}\partial_\mu U \cdot U^{-1}
\end{aligned} \tag{1.60}
$$

变换式(1.58)的无穷小形式[$\alpha^i(x) = \varepsilon^i(x)$]为

$$
\delta A_\mu(x) = - \mathrm{i}\varepsilon^i(x)[T_i, A_\mu(x)] - \frac{1}{g}\partial_\mu \varepsilon^i(x) T_i
$$

利用对易关系式(1.42)可将上式写为分量的形式

$$
\delta A_\mu^i(x) = - \frac{1}{g}\partial_\mu \varepsilon^i(x) + f_{ijk}\varepsilon^j(x) A_\mu^k(x) \tag{1.61}
$$

由上式可以看到规范场的变换性质实质上与 $\phi$ 场所属的表示无关(即与 $T_i$ 的矩阵形式无关),而只与群的结构常数有关。对不依赖于坐标 $x$ 的 $\varepsilon^i$,$A_\mu^i(x)$按群的伴随表示变换,因为 $\mathrm{i}f_{ijk}$ 是生成元 $X_j$ 在伴随表示中的矩阵元$(T_j)_{ik}$。$A_\mu^i(x)$的定域规范变换则还有式(1.61)右方第一项这样的非齐次项。它在规范变换下不是协变的。

由以上的讨论可以看到,在各时空点上的内部空间的基矢可以独立地选择的要求导致在理论中必须引入矢量场 $A_\mu(x)$,它在规范变换下按式(1.58)变换。如果场 $A_\mu(x)$仅仅反映内部空间基矢的自由选择而没有独立的物理意义,则它应当可以通过做定域变换而从拉氏量中消去。由式(1.58)知道这时 $A_\mu(x)$必须具有如下的形式

$$
A_\mu(x) = \frac{\mathrm{i}}{g} U^{-1}\partial_\mu U \tag{1.62}
$$

满足这种条件的规范场称为纯规范。下面将证明纯规范条件可以用由式(1.65)定义的场强等于零表示,即式(1.69)。这个公式只用到 $A_\mu$ 本身并且是规范不变的。由式(1.57)的结构知道,通过把 $\phi$ 场的运动方程中的微商改写为协变微商[见下面的式(1.94)及(1.95)]同时附加场强为零的条件总可以把任何具有内部对称性的理论写成定域规范不变的形式。然而,一个更自然的理论是:$A_\mu(x)$场是一种物理的场,它有自己的动力学规律而不限于纯规范的形式。

在上述理论形式中,当$(\boldsymbol{x}_0, t_0)$点的质子自由运动到$(\boldsymbol{x}, t)$点时,用$(\boldsymbol{x}, t)$点的同位旋空间坐标来描述,它可能是一个中子和一个 $A_\mu(x)$场的组合。由于 $A_\mu$ 场

可以带同位旋[因为它在整体 SU(2)变换下是变的],这并不违反同位旋守恒,用这个方式避免了必须统一选择基矢的约束。

如果我们假定规范场 $A_\mu(x)$是动力学场,它的方程将由拉氏量决定。$A_\mu(x)$是动力学场的想法对强作用同位旋 SU(2)对称性并不成功,这也许是由于同位旋 SU(2)不是严格的对称性。但这种想法却在后来的弱电统一理论及量子色动力学中取得很大的成就。

如果 $A_\mu(x)$是动力学场,必须在拉氏量中引入规范场的动能项,它包含 $A_\mu(x)$场的微商$\partial_\nu A_\mu$ 的二次项。规范场的动能项也必须是规范不变的,否则,由规范变换式(1.58)联系的场 $A_\mu(x)$和 $A'_\mu(x)$将是物理上不等价的,不能满足杨振宁和 Mills 原来的要求。现在我们就来说明如何构造规范场的动能项。$\partial_\mu A_\nu$ 在规范变换下不具有简单的变换性质。为了组成包含$\partial_\mu A_\nu$ 的规范不变项,我们首先寻找一个线性依赖于$\partial_\mu A_\nu$ 的量 $F_{\mu\nu}$,使得 $F_{\mu\nu}$ 在规范变换下是按群的伴随表示协变的,即按公式

$$F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu}U^{-1} \tag{1.63}$$

变换。由式(1.56)知道协变微商 $D_\mu$ 在规范变换下按下式变换

$$D_\mu \to UD_\mu U^{-1} \tag{1.64}$$

由式(1.64)知道可以通过下式由 $D_\mu$ 组成满足上述要求的量

$$F_{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{g}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \mathrm{i}g[A_\mu, A_\nu] \tag{1.65}$$

它是反对称二阶张量。$F_{\mu\nu}$显然具有由式(1.63)表示的变换性质,这一点也可以直接用规范变换公式(1.58)检验。$F_{\mu\nu}$是在群$G$ 的李代数上取值的,即

$$F_{\mu\nu} = F^i_{\mu\nu}T_i \tag{1.66}$$

利用对易关系式(1.42)可以把式(1.65)写成如下的分量形式

$$F^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu + gf_{ijk}A^j_\mu A^k_\nu \tag{1.67}$$

$F_{\mu\nu}$称为规范场的场强。对 Abel 群的情况,$F_{\mu\nu}$回到以前定义的场强 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$。可以与电磁场类比引入非 Abel 规范场的电场 $E_i$ 和磁场$H_i$

$$F_{i4} = -\mathrm{i}E_i, \qquad F_{ij} = \varepsilon_{ijk}B_k, \qquad i,j,k = 1,2,3 \tag{1.68}$$

当 $A_\mu$ 是纯规范时,由式(1.62)得

$$\begin{aligned}\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu &= \frac{\mathrm{i}}{g}(\partial_\mu(U^{-1}\partial_\nu U) - \partial_\nu(U^{-1}\partial_\mu U))\\ &= \frac{\mathrm{i}}{g}(\partial_\mu U^{-1}\cdot\partial_\nu U - \partial_\nu U^{-1}\partial_\mu U)\\ &= -\frac{\mathrm{i}}{g}(U^{-1}\partial_\mu U\cdot U^{-1}\partial_\nu U - U^{-1}\partial_\nu U\cdot U^{-1}\partial_\mu U)\end{aligned}$$

$$= \mathrm{i}g[A_\mu, A_\nu]$$

由上式及式(1.64)知,$A_\mu(x)$是纯规范时,场强为零

$$F_{\mu\nu} = 0 \tag{1.69}$$

式(1.69)事实上是微分方程组(1.62)的可积性条件,当式(1.69)成立时,满足式(1.62)的 $U$ 必然存在,因此场强为零是 $A_\mu$ 场为纯规范的充分和必要条件。

当 $A_\mu(x)$是动力学场时,拉氏量密度中规范场的动能项可取为

$$\mathscr{L}_A = -\frac{1}{4K}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}) = -\frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^i_{\mu\nu} \tag{1.70}$$

它含有 $A_\mu$ 微商的二次项。由场强在规范变换下的协变性[式(1.63)]立刻得到式(1.70)在规范变换下不变。式(1.70)中第二个等号用了式(1.47)。

总结以上讨论,由群 $G$ 的整体变换($\alpha^i$ 不依赖于 $x$)下不变的拉氏量密度 $\mathscr{L}_\phi(\partial_\mu\phi, \phi)$我们可以构造一个在群 $G$ 的规范变换式(1.51),(1.58)下不变的理论。这个理论中包含物理的矢量场 $A^i_\mu(x)$,矢量场的个数等于群 $G$ 的生成元的个数。拉氏量密度有如下的形式

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_\phi(D_\mu\phi, \phi) - \frac{1}{4K}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}) \tag{1.71}$$

其中,协变微商 $D_\mu$ 由式(1.55)定义,场强 $F_{\mu\nu}$由式(1.65)定义。

以上结果可以扩充到 $G$ 是几个单群的直积的情况。这时规范变换式(1.58)改为

$$g^iA^i_\mu T_i \to Ug^iA^i_\mu T_iU^{-1} - \mathrm{i}\partial_\mu U \cdot U^{-1} \tag{1.58$'$}$$

协变微商的定义改为

$$D_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}g^iA^i_\mu T_i \tag{1.55$'$}$$

上两式中的 $i$ 对群的所有生成元求和,对同一单群的生成元 $T_i$,耦合常数 $g^i$ 相同,对不同的单群,$g^i$ 可以不同,式(1.67)相应地改为

$$F^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu + g^if_{ijk}A^j_\mu A^k_\nu \tag{1.67$'$}$$

设与规范场耦合的 $\phi$ 场包含旋量场多重态 $\psi$ 及复标量场多重态 $\varphi$,生成元 $X_i$ 在 $\psi$ 场及 $\varphi$ 场所属表示中的矩阵分别为 $T_i$ 及 $t_i$。如果要求拉氏量中 $\psi$ 和 $\varphi$ 场有通常的微商项,则式(1.71)可写为如下的形式

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &-\frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^i_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma_\mu(\overrightarrow{D}_\mu - \overleftarrow{D}_\mu)\psi - \bar{\psi}M\psi \\ &-(D_\mu\varphi)^\dagger(D_\mu\varphi) - V(\varphi^\dagger, \varphi) + \mathscr{L}_Y\end{aligned} \tag{1.72}$$

其中

$$\varphi^{\dagger}\varphi = \sum_{l}\varphi_{l}^{*}\varphi_{l}$$

$$D_{\mu}\psi = (\partial_{\mu} - \mathrm{i}g^{i}A_{\mu}^{i}T_{i})\psi, \qquad \bar{\psi}\overleftarrow{D}_{\mu} = \bar{\psi}(\overleftarrow{\partial}_{\mu} + \mathrm{i}g^{i}A_{\mu}^{i}T_{i}) \tag{1.73}$$

$$D_{\mu}\varphi = (\partial_{\mu} - \mathrm{i}g^{i}A_{\mu}^{i}t_{i})\varphi, \qquad (D_{\mu}\varphi)^{\dagger} = \varphi^{\dagger}(\overleftarrow{\partial}_{\mu} + \mathrm{i}g^{i}A_{\mu}^{i}t_{i}) \tag{1.74}$$

$M$ 为旋量场的群 $G$ 下不变的质量矩阵，它满足

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha^{i}T_{i}}M\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha^{i}T_{i}} = M \tag{1.75}$$

如果 $\psi$ 场属于一个不可约表示，则由群表示论的 Schur 引理，$M$ 正比于单位矩阵。$V(\varphi^{\dagger},\varphi)$为群 $G$ 下不变的标量场位势。它的二次项有

$$-\varphi^{\dagger}\mu^{2}\varphi$$

的形式，其中，$\mu^2$ 为标量场的质量矩阵，它满足

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha^{i}t_{i}}\mu^{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha^{i}t_{i}} = \mu^{2} \tag{1.76}$$

在 $\varphi$ 场属于一个不可约表示时，$\mu^2$ 也应正比于单位矩阵。$\mathscr{L}_Y$ 为规范不变的 $\bar{\psi}\psi\varphi$ 型的汤川作用项。

现在我们来讨论在规范变换式(1.51)和(1.58)下不变的拉氏量的一般形式[3]。由普遍的公式(1.17)知道，拉氏量在规范变换下不变等价于下式

$$\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_{\nu}^{i}} - \partial_{\mu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_{\mu}A_{\nu}^{i}}\right)\delta A_{\nu}^{i} + \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_{\mu}A_{\nu}^{i}}\delta A_{\nu}^{i}\right)$$
$$+\left[\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{l}} - \partial_{\mu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_{\mu}\phi_{l}}\right)\delta\phi_{l} + \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_{\mu}\phi_{l}}\delta\phi_{l}\right) + \text{h.c.}\right] = 0 \tag{1.77}$$

其中，$\delta A_\nu$ 由式(1.61)表示。由于 $\varepsilon^i(x)$是任意的函数，式(1.77)中 $\varepsilon^i(x)$，$\partial_\mu\varepsilon^i(x)$及$\partial_\mu\partial_\nu\varepsilon^i(x)$的系数必须分别为零。利用运动方程及式(1.61)得到

$$\partial_{\mu}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_{\mu}A_{\nu}^{i}}f_{ijk}A_{\nu}^{k} + \left(-\mathrm{i}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}T_{j}\phi + \text{h.c.}\right)\right] = 0 \tag{1.78}$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_{\nu}^{i}} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_{\nu}A_{\mu}^{j}}gf_{ijk}A_{\mu}^{k} + \left(\mathrm{i}g\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_{\nu}\phi)}T_{i}\phi + \text{h.c.}\right) = 0 \tag{1.79}$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_{\mu}A_{\nu}^{i}} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_{\nu}A_{\mu}^{i}} = 0 \tag{1.80}$$

由式(1.80)知道，在拉氏量中微商$\partial_\mu A_\nu^i$ 只以反对称组合$\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i$ 的形式出现。式(1.79)表示 $A_\mu^j$ 只以组合

$$D_{\mu}\phi_{l} = (\partial_{\mu} - \mathrm{i}gA_{\mu}^{i}T_{i})\phi_{l}$$
$$F_{\mu\nu}^{i} = \partial_{\mu}A_{\nu}^{i} - \partial_{\nu}A_{\mu}^{i} + gf_{ijk}A_{\mu}^{j}A_{\nu}^{k}$$

的形式出现。因此拉氏量密度有如下的形式

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(D_\mu \phi, \phi, F_{\mu\nu}) \tag{1.81}$$

式(1.78)表示,$\mathscr{L}$在群 $G$ 的整体变换下不变。在写出满足这一要求的拉氏量时应记住,$D_\mu$ 和$F_{\mu\nu}$都按群$G$ 的伴随表示变换。这是规范不变的拉氏量的一般形式。

如果限于在 $\mathscr{L}$中取量纲不大于 4 的场量的乘积,考虑到 Lorentz 不变性的要求后,式(1.81)化为式(1.71)的形式。在 $\phi$ 场包含旋量场 $\psi$ 和标量场 $\varphi$ 的情况下,$\mathscr{L}$化为式(1.72)的形式,此时 $V(\varphi)$是 $\varphi$ 的不超过四阶的多项式。在式(1.71)中规范场$A_\mu$ 只通过$D_\mu \phi$ 与$\phi$ 场耦合,这种耦合方式称为最小耦合,$g$ 为耦合常数。如果容许量纲大于 4 的场量乘积,则还可以有其他的耦合方式。例如,对旋量场可以有类似于磁矩的耦合项

$$\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\psi \tag{1.82}$$

类似于 1.3 节中对电磁规范理论的讨论,利用 1.5 节中的场方程(1.88)可以证明把规范变换由整体的扩大到定域的并不带来新的 Noether 守恒量。这一点在物理上有特殊的意义。我们知道,与整体对称群相应的 Noether 守恒荷标志系统的不同状态,它们的数值代表系统在内部空间中的取向。虽然内部空间中绝对的方向是没有物理意义的,但是系统相对于测量仪器所确定的方向的相对取向是可以测量的。这是因为在系统不是孤立时它们通过 Noether 荷与外界作用。例如,由空间转动群相联系的两个状态有不同的角动量分量 $s_i$,如果在系统上加上外磁场 $\boldsymbol{H}$,则可以有 $-\mu \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{S}$ 形式的作用能,这时角动量分量有不同数值的状态得到不同的能量。由此知道,不同的 Noether 荷的值的状态是不同的物理状态。但是与限于局部区域的定域变换相应的守恒荷为零,因此由定域变换相联系的两个状态不能由它们与外界的作用加以区别或证明其存在。所以它们在物理上应看作是同一状态,这就是说,规范自由度是非物理的自由度。在第十二章中,我们将看到规范场可以有不同于 Noether 荷的拓扑荷,但它们是与规范场在全空间的大范围性质有关的,并不与定域规范自由度相应。

在规范理论中,在时空中的每一点 $x$ 定义了内部空间的基矢 $e^i(x)(i=1,2,\cdots,n)$和作用于每点上的 $e^i(x)(i=1,2,\cdots,n)$的变换群 $G_x$。规范势 $A_\mu(x)$决定把矢量 $e^i(x_0)(i=1,2,\cdots,n)$由 $x_0$ 点移到 $x$ 点后与$e^i(x)$的差别。这样的理论结构在数学上属于纤维丛[8]。在纤维丛理论中,规范势 $A_\mu(x)$和场强 $F_{\mu\nu}$都有几何意义。把纤维丛理论的微分几何方法用于规范理论已经富有成果,它对与规范场的拓扑性质有关的问题(参看第十章和第十二章)很有用。由于篇幅的限制本书将不介绍和利用这种数学工具。规范理论的一种与几何概念有更密切关系的不可积相因子表述形式可参看文献[9]。

## 1.5 守恒流,运动方程和能量动量张量

经典场的运动方程可以由拉氏量密度式(1.71)导出。规范场 $A_\mu^i(x)$ 的运动方程

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu^i)} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_\nu^i} = 0 \tag{1.83}$$

可写为

$$\partial_\mu F_{\mu\nu}^i + g f_{ijk} A_\mu^j F_{\mu\nu}^k = -\frac{\partial \mathscr{L}_\phi}{\partial A_\nu^i} \tag{1.84}$$

上式又可写为

$$D_\mu F_{\mu\nu} = -g j_\nu \tag{1.85}$$

其中,$D_\mu$ 为伴随表示中的协变微商

$$D_\mu F_{\mu\nu} \equiv [\partial_\mu - \mathrm{i} g A_\mu, F_{\mu\nu}] \tag{1.86}$$

$$g j_\nu^i = \frac{\partial \mathscr{L}_\phi}{\partial A_\nu^i} = -\mathrm{i} g \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} T_i \phi \tag{1.87}$$

式(1.84)也可以写为如下的形式

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = -g J_\nu \tag{1.88}$$

其中

$$g J_\nu^i = g f_{ijk} A_\mu^j F_{\mu\nu}^k + \frac{\partial \mathscr{L}_\phi}{\partial A_\nu^i}$$

由拉氏量密度式(1.71)的形式知 $J_\nu^i$ 也可以写为

$$J_\nu^i = \frac{1}{g} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_\nu^i} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu^k)} f_{ijk} A_\mu^j - \mathrm{i} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} T_i \phi \tag{1.89}$$

由式(1.88)及 $F_{\mu\nu}$ 的反对称性立刻得到

$$\partial_\nu J_\nu^i = 0 \tag{1.90}$$

$J_\nu^i$ 是守恒的。

由式(1.89)知道式(1.90)即 1.4 节中由拉氏量在群 $G$ 变换下的不变性得到的式(1.78),因此 $J_\nu$ 就是相应于对称群 $G$ 的 Noether 流。式(1.87)中的 $j_\nu$ 是 $\phi$ 场所带的 Noether 流的部分。在电磁规范理论中电磁场本身不带电流。非 Abel 规范理论中规范场本身也带群 $G$ 的守恒流,它由式(1.89)右方的第一项表示。因此 $j_\nu$ 并不守恒。

规范场的运动方程(1.85)是很复杂的,即使在 $\phi$ 场不存在($j_\nu = 0$)时,这个方

程对 $A_\mu$ 也是非线性的。从物理上说，由于非 Abel 规范场本身带 Noether 荷，它是有自作用的，不存在自由的非 Abel 规范场。

场强 $F_{\mu\nu}$ 除满足运动方程(1.85)外还满足一个恒等式，由 $F_{\mu\nu}$ 的定义式(1.65)及 Jacobi 恒等式

$$[D_\lambda,[D_\mu,D_\nu]]+[D_\mu,[D_\nu,D_\lambda]]+[D_\nu,[D_\lambda,D_\mu]]=0$$

得到

$$D_\lambda F_{\mu\nu}+D_\mu F_{\nu\lambda}+D_\nu F_{\lambda\mu}=0,\qquad \lambda\neq\mu\neq\nu \tag{1.91}$$

上式称为 Bianchi 恒等式。在 Abel 规范场的情形，式(1.91)化为 Maxwell 第一方程组，而式(1.85)化为 Maxwell 第二方程组。引入对耦场强

$$\widetilde{F}_{\mu\nu}=-\mathrm{i}\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \tag{1.92}$$

其中，$\varepsilon_{1234}=1$ 等，Bianchi 恒等式(1.91)可写为

$$D_\mu\widetilde{F}_{\mu\nu}=0 \tag{1.93}$$

对与规范场作用的场包含旋量场 $\psi$ 和标量场 $\varphi$ 的情况，由拉氏量式(1.72)得到 $\psi$ 场和 $\varphi$ 场的运动方程分别为(不考虑汤川作用项 $\mathscr{L}_Y$)

$$(\gamma_\mu D_\mu+m)\psi=\gamma_\mu(\partial_\mu-\mathrm{i}g^iA_\mu^iT_i)\psi+m\psi=0$$

$$\bar{\psi}(\gamma_\mu\overleftarrow{D}_\mu-m)=\bar{\psi}\gamma_\mu(\overleftarrow{\partial}_\mu+\mathrm{i}g^iA_\mu^iT_i)-m\bar{\psi}=0 \tag{1.94}$$

$$D_\mu D_\mu\varphi-\frac{\partial V}{\partial\varphi^\dagger}=(\partial_\mu-\mathrm{i}g^iA_\mu^it_i)(\partial_\mu-\mathrm{i}g^iA_\mu^it_i)\varphi-\frac{\partial V}{\partial\varphi^\dagger}=0$$

$$\varphi^\dagger(\overleftarrow{\partial}_\mu+\mathrm{i}g^iA_\mu^it_i)(\overleftarrow{\partial}_\mu+\mathrm{i}g^iA_\mu^it_i)-\frac{\partial V}{\partial\varphi}=0 \tag{1.95}$$

场的能量动量张量通常是与拉氏量在时空坐标平移变换下的不变性相联系的。在坐标平移下

$$A'_\mu(x')=A'_\mu(x+a)=A_\mu(x)$$

$$\phi'(x')=\phi'(x+a)=\phi(x) \tag{1.96}$$

在无穷小变换 $a=\varepsilon$ 下

$$\delta\phi(x)=\phi'(x)-\phi(x)=-\varepsilon_\nu\partial_\nu\phi(x)$$

$$\delta A_\mu(x)=A'_\mu(x)-A_\mu(x)=-\varepsilon_\nu\partial_\nu A_\mu(x) \tag{1.96$'$}$$

但是由上式中的 $\delta\phi$ 和 $\delta A_\mu$ 得到的规范场论的 Noether 流

$$-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\lambda)}\partial_\nu A_\lambda+\delta_{\mu\nu}\mathscr{L} \tag{1.97}$$

不是规范不变的。这是由于由式(1.96)定义的平移变换群与规范变换群不对易。

物理量应当是规范不变的,故式(1.97)不宜定义为能量动量张量。

为了得到正确的能量动量张量,我们考虑如下的无穷小变换

$$\phi'(x+\varepsilon)=\exp(\mathrm{i}g\varepsilon_\nu A_\nu(x))\phi(x) \tag{1.98}$$

$$A'_\mu(x+\varepsilon)=\exp(\mathrm{i}g\varepsilon_\nu A_\nu(x))A_\mu(x)\exp(-\mathrm{i}g\varepsilon_\nu A_\nu(x)) - \frac{\mathrm{i}}{g}\partial_\mu\exp(\mathrm{i}g\varepsilon_\nu A_\nu(x))\exp(-\mathrm{i}g\varepsilon_\nu A_\nu(x)) \tag{1.99}$$

这是在平移变换后再做一个规范变换。显然拉氏量在这个变换下是不变的。由式(1.98)和(1.99)得

$$\delta\phi(x)=-\varepsilon_\nu D_\nu\phi(x) \tag{1.98'}$$

$$\delta A_\mu(x)=-\varepsilon_\nu(\partial_\nu A_\mu-\partial_\mu A_\nu-\mathrm{i}g[A_\nu,A_\mu])=-\varepsilon_\nu F_{\nu\mu} \tag{1.99'}$$

由于式(1.98′)和(1.99′)的右方出现的是规范协变的量,容易验证这个变换群与规范变换群是对易的,我们称它为规范协变平移群。

与这个对称群对应的 Noether 流是

$$T_{\mu\nu}=\left(-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}+D_\nu\phi+\mathrm{h.c.}\right)-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\lambda)}F_{\nu\lambda}+\delta_{\mu\nu}\mathscr{L} \tag{1.100}$$

由拉氏量式(1.71)的形式得到

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu}&=\left[-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(D_\mu\phi)}D_\nu\phi+\mathrm{h.c.}\right]-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial F^i_{\mu\lambda}}F^i_{\nu\lambda}+\delta_{\mu\nu}\mathscr{L}\\&=\left[-\frac{\partial\mathscr{L}_\phi}{\partial(D_\mu\phi)}D_\nu\phi+\mathrm{h.c.}\right]+\delta_{\mu\nu}\mathscr{L}_\phi\\&\quad+F^i_{\mu\lambda}F^i_{\nu\lambda}-\frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F^i_{\rho\lambda}F^i_{\rho\lambda}\end{aligned} \tag{1.101}$$

上式中的 $T_{\mu\nu}$ 显然是规范不变的。它满足守恒方程

$$\partial_\mu T_{\mu\nu}=0 \tag{1.102}$$

式(1.101)中规范场部分的能量密度为

$$\frac{1}{2}\sum_i(\boldsymbol{E}^i\cdot\boldsymbol{E}^i+\boldsymbol{H}^i\cdot\boldsymbol{H}^i) \tag{1.103}$$

式(1.103)是电磁场能量密度表示式的推广。

对于有自旋的 $\phi$ 场,$T_{\mu\nu}$ 对指标 $\mu$ 和 $\nu$ 不是对称的。因此角动量流不能写作

$$x_\mu T_{\nu\lambda}-x_\nu T_{\mu\lambda}$$

[见式(1.127)前面的讨论]。在无规范场的情况,可以用文献[4]中的方法得到一个对称的能量动量张量

$$\theta^0_{\mu\nu}=T^0_{\mu\nu}+\partial_\lambda f^0_{\lambda\mu\nu} \tag{1.104}$$

其中,上指标 0 表示 $A_\mu=0$ 时的物理量

$$f^0_{\lambda\mu\nu}=-\frac{\mathrm{i}}{2}\left[\frac{\partial\mathscr{L}^0}{\partial(\partial_\lambda\phi)}S_{\mu\nu}\phi+\frac{\partial\mathscr{L}^0}{\partial(\partial_\mu\phi)}S_{\nu\lambda}\phi-\frac{\partial\mathscr{L}^0}{\partial(\partial_\nu\phi)}S_{\lambda\mu}\phi\right] \tag{1.105}$$

上式中,$S_{\mu\nu}$是$\phi$ 场的自旋矩阵,它对指标 $\mu,\nu$ 是反对称的。由上式知道

$$f^0_{\lambda\mu\nu}=-f^0_{\mu\lambda\nu} \tag{1.106}$$

因此

$$\partial_\mu\partial_\lambda f^0_{\lambda\mu\nu}=0 \tag{1.107}$$

由式(1.102)、(1.104)及(1.107)得

$$\partial_\mu\theta^0_{\mu\nu}=0 \tag{1.108}$$

即 $\theta^0_{\mu\nu}$是守恒流。由式(1.104)及(1.106)知 $\theta^0_{\mu\nu}$和$T^0_{\mu\nu}$给出相同的四维总动量矢量

$$P^0_\mu=\int\mathrm{d}^3xT^0_{\mu4}=\int\mathrm{d}^3x\theta^0_{\mu4} \tag{1.109}$$

由通常的角动量流

$$M^0_{\lambda\mu\nu}=x_\mu T^0_{\lambda\nu}-x_\nu T^0_{\lambda\mu}-\mathrm{i}\frac{\partial\mathscr{L}^0}{\partial(\partial_\lambda\phi)}S_{\mu\nu}\phi \tag{1.110}$$

的守恒方程

$$\partial_\lambda M^0_{\lambda\mu\nu}=0 \tag{1.111}$$

得到

$$T^0_{\mu\nu}-T^0_{\nu\mu}-\mathrm{i}\partial_\lambda\frac{\partial\mathscr{L}^0}{\partial(\partial_\lambda\phi)}S_{\mu\nu}\phi=0 \tag{1.112}$$

由式(1.104)、(1.105)和(1.112)及 $S_{\mu\nu}$的反对称性可验证$\theta^0_{\mu\nu}$是对称张量。

在 $A_\mu\neq0$ 时把式(1.112)的各项中包含的微商换为协变微商可以得到如下的方程式

$$T_{\mu\nu}-T_{\nu\mu}=T_{\phi\mu\nu}-T_{\phi\nu\mu}=\mathrm{i}\partial_\lambda\frac{\partial\mathscr{L}_\phi}{\partial(D_\lambda\phi)}S_{\mu\nu}\phi \tag{1.112′}$$

其中,$T_{\phi\mu\nu}$为式(1.101)右方的前两项。上式中$\frac{\partial\mathscr{L}_\phi}{\partial(D_\lambda\phi)}S_{\mu\nu}\phi$ 是规范不变的,所以最后一项中的微分$\partial_\lambda$ 不要附加$-\mathrm{i}gA_\lambda$ 项。引入张量

$$\theta_{\mu\nu}=T_{\mu\nu}+\partial_\lambda f_{\lambda\mu\nu} \tag{1.104′}$$

其中

$$f_{\lambda\mu\nu}=-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\mathscr{L}_\phi}{\partial(D_\lambda\phi)}S_{\mu\nu}\phi+\frac{\partial\mathscr{L}_\phi}{\partial(D_\mu\phi)}S_{\nu\lambda}\phi-\frac{\partial\mathscr{L}_\phi}{\partial(D_\nu\phi)}S_{\lambda\mu}\phi\right] \tag{1.105′}$$

与无规范场时的情况相似,容易由式(1.104′)、(1.105′)、(1.102)及(1.112′)得到

$$\partial_\mu\theta_{\mu\nu}=0$$

$$\theta_{\mu\nu} = \theta_{\nu\mu} \tag{1.108'}$$

$\theta_{\mu\nu}$是规范理论的一个对称的能量动量张量。

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{4\mathrm{i}}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu) \tag{1.113}$$

$$\begin{aligned} f_{\lambda\mu\nu} &= \frac{\mathrm{i}}{8}\{\bar{\psi}(\gamma_\lambda\Sigma_{\mu\nu} + \gamma_\mu\Sigma_{\nu\lambda} - \gamma_\nu\Sigma_{\lambda\mu})\psi + \bar{\psi}(\Sigma_{\mu\nu}\gamma_\lambda + \Sigma_{\nu\lambda}\gamma_\mu - \Sigma_{\lambda\mu}\gamma_\nu)\psi\} \\ &= \frac{1}{8}\bar{\psi}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda - \gamma_\lambda\gamma_\nu\gamma_\mu)\psi \end{aligned} \tag{1.114}$$

设 $\Gamma$ 为任意 $\gamma$ 矩阵,我们有恒等式

$$\partial_\lambda(\bar{\psi}\Gamma\psi) = \bar{\psi}\overleftarrow{D}_\lambda\Gamma\psi + \bar{\psi}\Gamma D_\lambda\psi \tag{1.115}$$

由式(1.104′)、(1.114)及(1.115)得

$$\begin{aligned} \partial_\lambda f_{\lambda\mu\nu} &= \frac{1}{8}\bar{\psi}\overleftarrow{D}_\lambda(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda - \gamma_\lambda\gamma_\nu\gamma_\mu)\psi + \frac{1}{8}\bar{\psi}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda - \gamma_\lambda\gamma_\nu\gamma_\mu)D_\lambda\psi \\ &= \frac{1}{8}\bar{\psi}[\gamma_\lambda\overleftarrow{D}_\lambda(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu) + 2\overleftarrow{D}_\lambda(\delta_{\lambda\nu}\gamma_\mu - \delta_{\lambda\mu}\gamma_\nu)]\psi \\ &\quad + \frac{1}{8}\bar{\psi}[(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\gamma_\lambda D_\lambda - 2(\delta_{\lambda\nu}\gamma_\mu - \delta_{\lambda\mu}\gamma_\nu)D_\lambda]\psi \end{aligned}$$

利用 $\psi$ 场的运动方程(1.94)可将上式化为

$$\partial_\lambda f_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{4}\bar{\psi}(\overleftarrow{D}_\lambda\gamma_\mu - \overleftarrow{D}_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu D_\nu - \gamma_\mu D_\nu)\psi \tag{1.116}$$

由拉氏量式(1.72)的形式和式(1.101)及(1.116)可将式(1.104)写为

$$\begin{aligned} \theta_{\mu\nu} &= (D_\mu\varphi)^\dagger(D_\nu\varphi) + (D_\nu\varphi)^\dagger(D_\mu\varphi) + \frac{1}{4}\bar{\psi}(\gamma_\nu(D_\nu - \overleftarrow{D}_\nu) + \gamma_\nu(D_\mu - \overleftarrow{D}_\mu))\psi \\ &\quad + \delta_{\mu\nu}\mathscr{L}^\varphi + F^i_{\mu\lambda}F^i_{\nu\lambda} - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}F^i_{\rho\lambda}F^i_{\rho\lambda} \end{aligned} \tag{1.117}$$

由上式看到 $\theta_{\mu\nu}$确实是对称张量。

规范场与标量场和旋量场耦合的经典场论中,对称能量动量张量更一般的形式为

$$\theta'_{\mu\nu} = \theta_{\mu\nu} + c(\partial_\mu\partial_\nu - \delta_{\mu\nu}\Box)(\varphi^\dagger\varphi) \tag{1.118}$$

其中,$c$ 为任意常数。$\theta'_{\mu\nu}$显然满足

$$\theta'_{\mu\nu} = \theta'_{\nu\mu} \tag{1.119}$$

$$\int \mathrm{d}^3x\theta'_{0\nu} = \int \mathrm{d}^3x\theta_{0\nu} = P_\nu \tag{1.120}$$

$$\partial_\mu\theta'_{\mu\nu} = 0 \tag{1.121}$$

设标量场的位势为

$$V(\varphi^\dagger,\varphi) = \varphi^\dagger \mu^2 \varphi + \lambda(\varphi^\dagger \varphi)^2 \tag{1.122}$$

其中，$\mu^2$ 为在群 $G$ 下不变的质量矩阵。由恒等式

$$\Box(\varphi^\dagger \varphi) = \varphi^\dagger(\overleftarrow{D}_\mu \overleftarrow{D}_\mu + \overrightarrow{D}_\mu \overrightarrow{D}_\mu + 2\overleftarrow{D}_\mu \overrightarrow{D}_\mu)\varphi \tag{1.123}$$

知，如取

$$c = -\frac{1}{3} \tag{1.124}$$

则由场的运动方程(1.94)及(1.95)得

$$\theta'_{\mu\mu} = -\bar{\psi}M\psi - 2\varphi^\dagger \mu^2 \varphi \tag{1.125}$$

在 $\varphi$ 场和 $\psi$ 场都无质量的情况下张量 $\theta'_{\mu\nu}$ 的迹为零，这一性质在第六章中讨论标度变换时有用。满足条件式(1.125)的 $\theta'_{\mu\nu}$ 称为改进的能量动量张量[5]。

式(1.118)和(1.124)中的 $\theta'_{\mu\nu}$ 也可以用文献[6]中介绍的广义相对论的方法取引力场趋于零的极限而得到。在广义相对论中物质场通过对称的能量动量张量 $\theta'_{\mu\nu}$ 与弱引力场耦合。用这种方法得到 $\theta'_{\mu\nu}$ 非常自然，计算也比较简单。在文献[7]中，就是这样做的。

由 $\theta_{\mu\nu}$ 或 $\theta'_{\mu\nu}$ 可以得到场的角动量流 $M_{\lambda\mu\nu}$。令

$$M_{\lambda\mu\nu} = x_\mu \theta'_{\lambda\nu} - x_\nu \theta'_{\lambda\mu} \tag{1.126}$$

由式(1.121)及 $\frac{\partial x_\mu}{\partial x_\lambda} = \delta_{\mu\lambda}$ 得 $\partial_\lambda M_{\lambda\mu\nu} = \theta'_{\mu\lambda} - \theta'_{\lambda\mu}$，再由 $\theta'_{\nu\lambda}$ 的对称性得

$$\partial_\lambda M_{\lambda\mu\nu} = 0 \tag{1.127}$$

因此场的角动量可取为

$$M_{\mu\nu} = -\mathrm{i}\int M_{4\mu\nu} \mathrm{d}^3 x = -\mathrm{i}\int (x_\mu \theta'_{4\mu} - x_\nu \theta'_{4\nu}) \mathrm{d}^3 x \tag{1.128}$$

由式(1.118)，$\theta'_{4\mu}$ 中正比于 $c$ 的一项至少有一个对空间坐标微商的因子。在式(1.128)中对这一项的贡献做分部积分，利用 $\frac{\partial x_\mu}{\partial x_\nu} = \delta_{\mu\nu}$ 并假设场在无穷远处为零，可知这一项无贡献。再由式(1.104′)及 $f_{\lambda\mu\nu}$ 对 $\lambda\mu$ 的反对称性式(1.106)，知 $\theta_{4\nu}$ 中的 $\partial_\lambda f_{\lambda 4\nu}$ 项必有一个对空间坐标微商的因子，做分部积分后可知这一项在式(1.128)中的贡献也为零。因此得到

$$M_{\mu\nu} = -\mathrm{i}\int (x_\mu \theta_{4\nu} - x_\nu \theta_{4\mu}) \mathrm{d}^3 x = -\mathrm{i}\int (x_\mu T_{4\nu} - x_\nu T_{4\mu}) \mathrm{d}^3 x \tag{1.129}$$

由式(1.127)知道由式(1.128)定义的 $M_{\mu\nu}$ 是一个守恒荷，它是规范不变的，在规范场消失时，它回到已知的角动量表示式。因此它是规范场理论中正确的角动量表

示式。由式(1.129)中的最后一个等式可知,虽然用不对称的能量动量张量 $T_{\mu\nu}$ 不能构造满足流守恒方程(1.129)的角动量流 $M_{\lambda\mu\nu}$,但仍可得到正确的 $M_{\mu\nu}$。

最后在此做一点说明,以后我们将看到,在将规范场量子化时,必须在拉氏量中引入破坏规范不变性的规范固定项及相应的附加场,因此在量子化的理论中,能量动量张量除式(1.117)中的项外还将包含来自规范固定项及附加场的项。

## 参 考 文 献


1 V Fock. Zcit f Physik. 1927, 39:226;H Weyl. Zeit f Physik. 1929,56:330;W Pauli. Handbuch der Physik. Geiger and Scheel (2 Aufl) 24(1):83～272

2 Chen Ning Yang and R L Mills. Phys Rev. 1954,96:191

3 R Utiyama. Phys Rev. 1956,101:1597

4 E J Belinfante. Physica (Utrecht). 1940,7:449

5 C G Callan, S Coleman and R Jackiw. Ann of Phys (New York). 1970,59:42

6 Л. Ландау н. Е. Лифшиц, Теория Пнοя, ОГИЗ, Глава XI.

7 D Z Freedman, I J Muzinich and E J Weinberg. Ann of Phys(New York). 1974,87:95;D Z Freedman and E J Weinberg. ibid,1974,87:354

8 T Eguchi, P B Gilkey and A J Hanson. Physics Reports. 1980,66:213

9 T T Wu and C N Yang. Proceedings of the 1975 Hawaii Conference, University Press of Hawaii

# 第二章　对称性的自发破缺、Higgs 机制

## 2.1　对称性在量子场论中的实现、对称性的自发破缺

在物理规律的对称性中，有一些（按照人们现在的知识）是严格的对称性，例如原子、原子核或基本粒子规律的平移不变性和转动不变性以及电荷守恒等。另一些对称性是近似的，例如同位旋 SU(2)对称性以及 Gell-Mann 等提出的 SU(3)对称性。同位旋 SU(2)对称性的破缺是由于存在比较弱的电磁作用和弱作用（也许还有其他未知的原因）。如果不明显考虑其他作用，在强作用的夸克模型描述中，SU(2)对称性的破缺表现为，属于 SU(2)群同一表示的上夸克 $u$ 和下夸克 $d$ 有一个小的质量差，而 SU(3)的破缺可以认为是奇异夸克 $s$ 有较大的质量。它们的影响可以在拉氏量中加入一个代表原始质量差的项

$$- m_u\bar{u}u - m_d\bar{d}d - m_s\bar{s}s$$

来表示，这些项明显破坏了 SU(3)对称性。在拉氏量中存在小的破坏对称性的项，这种情况称为对称性的明显破缺。

但是对称性的破缺还有另一种方式，一个人们熟知的例子就是铁磁体。作为说明铁磁性的模型，人们考虑这样的自旋点阵，在相邻的自旋 $\boldsymbol{s}_i$ 和 $\boldsymbol{s}_j$ 间有形式为

$$- J\boldsymbol{s}_i \cdot \boldsymbol{s}_j \qquad (J > 0)$$

的使它们趋向于同向排列的相互作用能（但是没有真实铁磁体内部存在的长程磁矩相互作用，它趋向使自旋反向排列）。这种理想铁磁体内部自旋间作用的定律及量子力学方程在空间转动下都是不变的。但是在基态中所有自旋都排列在一个方向。这个基态不是转动不变的。虽然任何方向的自旋排列在理论上都是可能的，但是如果点阵是无穷大的，自旋一旦在一个方向上排列好以后，要改变它们的排列方向必须使无穷多个自旋同步地转动，这不可能通过局部的扰动做到。因此转动不变性就破坏了。一般来说，如果拉氏量中不含明显破坏对称性的项，但是作为运动方程的解的基态是退化的，在系统中实现的基态是许多退化的基态之一，它在原来的对称群下不是不变的，对无穷维自由度的系统，对称性就破缺了。这种情况称为对称性的自发破缺。讨论这种破缺方式的早期文章有文献[1]，[2]，[3]，对这个问题的一般综述有文献[4]。

量子场论是无穷维自由度的量子系统。这种系统的对称性自发破缺方式有它的特点。为了说明这些特点我们首先回忆对称性通常在量子系统中是如何实现

的。如在 1.3 节中叙述的，设场论的拉氏量在由场的变换[式(1.48)]

$$\phi'(x) = \exp(-\mathrm{i}\alpha^i T_i)\phi(x) \tag{2.1}$$

构成的变换群 $G$ 下不变，$T_i$ 满足式(1.42)

$$[T_i, T_j] = \mathrm{i}f_{ijk}T_k \tag{2.2}$$

则经典场论中存在相应的 Noether 流 $j^i_\mu$[式(1.50)]

$$j^i_\mu = -\mathrm{i}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}T_i\phi \tag{2.3}$$

它满足守恒方程

$$\partial_\mu j^i_\mu = 0 \tag{2.4}$$

相应的守恒荷为

$$Q^i = -\mathrm{i}\int\mathrm{d}^3x j^i_4(x) = \int\mathrm{d}^3x j^i_0(x) = -\mathrm{i}\int\mathrm{d}^3x\pi T_i\phi \tag{2.5}$$

由 $\pi$ 和 $\phi$ 的泊松括号

$$[\varphi(x), \pi(y)]_{P.B.} = \delta^3(x-y)\times I \tag{2.6}$$

及式(2.3)得 $Q^i$ 的泊松括号

$$[Q^i, \phi]_{P.B.} = \mathrm{i}T_i\phi, \qquad [Q^i, \pi]_{P.B.} = -\mathrm{i}\pi T_i \tag{2.7}$$

$$[Q^i, Q^j]_{P.B.} = -\int\mathrm{d}^3x\pi(T_iT_j - T_jT_i)\phi = f_{ijk}Q^k \tag{2.8}$$

量子化后场量 $\phi(x)$ 变为算符 $\hat{\phi}(x)$，相应地，Noether 流和荷也变为算符 $\hat{j}_\mu$ 和 $\hat{Q}$。相应于经典场的 Noether 流守恒的算符方程是

$$\partial_\mu\hat{j}_\mu = 0 \tag{2.9}$$

由于流算符 $\hat{j}_\mu$ 是同一点的场算符的乘积，它常常是奇异的，即包含算符 $\hat{j}_\mu$ 的矩阵元或 Green 函数常有由于同一点的场算符的乘积而出现的无穷大，因此需要正规化和减除发散的手续(见第五章关于复合算符发散的讨论)。在正规化以后式(2.9)可能不再成立。这种情况称为守恒律的反常。这也是量子场论特有的另一种对称性破坏的方式，属于对称性明显破缺的类型。这种现象将在第十章中详细讨论。

在本章中我们假设经过正规化和减除发散后所讨论的流算符是存在的并且没有反常，因此式(2.9)是成立的。但是仍有可能不存在由 $\hat{j}^i_0$ 对无穷空间积分定义的荷算符 $\hat{Q}^i$。如果算符 $\hat{Q}^i$ 是存在的，由经典泊松括号和算符对易子的对应关系

$$[A, B]_{P.B.} \to \frac{1}{\mathrm{i}}[\hat{A}, \hat{B}]$$

可以得到荷算符的对易关系

$$[\hat{Q}^i, \hat{\phi}(x)] = -T_i\hat{\phi}(x), \qquad [\hat{Q}^i, \hat{\pi}(x)] = \hat{\pi}(x)T_i \tag{2.10}$$

$$[\hat{Q}^i, \hat{Q}^j] = \mathrm{i}f_{ijk}\hat{Q}^k \tag{2.11}$$

由上式知道算符 $\hat{Q}^i(i=1,2,\cdots,r)$构成对称群 $G$ 的李代数的表示,它们是作用在量子态的 Hilbert 空间上的,这个空间构成群 $G$ 的表示空间。由厄米算符 $\hat{Q}^i$ 可以得到幺正算符

$$\hat{U}(g) = \exp(-\mathrm{i}\alpha^i\hat{Q}^i) \tag{2.12}$$

它们组成群 $G$ 的幺正表示。在群 $G$ 的变换下量子态的变换为

$$|\rangle \to \hat{U}(g)|\rangle \tag{2.13}$$

场算符的变换为

$$\hat{\phi}(x) \to \hat{U}(g)\hat{\phi}(x)\hat{U}^\dagger(g) = \exp(-\mathrm{i}\alpha^i T_i)\hat{\phi}(x) \tag{2.14}$$

上式中用了式(2.10)。下面将看到,这种情况要求真空态在变换式(2.13)下不变

$$\hat{U}(g)|0\rangle = |0\rangle \tag{2.15}$$

式(2.15)要求荷算符湮灭真空

$$\hat{Q}^i|0\rangle = 0 \tag{2.16}$$

这样构成的群 $G$ 的表示是可约的。如同通常量子力学中一样,由于哈密顿算符 $\hat{H}$ 与 $\hat{U}$的对易性

$$\hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger = \hat{H} \tag{2.17}$$

及 Schur 引理属于一不可约子空间的态有相同的能量,或者说属于同一不可约表示的粒子具有相同的质量及在群 $G$ 下不变的其他量子数。这就是说,对称性表现为物理态以及粒子谱的对称关系。此外,还可以得到算符的矩阵元之间及 Green 函数之间的对称关系,类似于角动量理论中的 Wigner-Echart 定理。对称性在量子理论中的这种实现方式是 Weyl 和 Wigner 等首先用群论方法研究的,所以称为 Wigner 方式。

但是如前面已指出的,当运动方程和对易关系在群 $G$ 下不变时,作为运动方程的解的基态也可能在群 $G$ 下不是不变的,这时基态必然退化。我们现在来考察这种情况在量子场论中的含义[4]。正像铁磁体的自旋点阵模型一样,这时量子场论中的物理真空$|0\rangle$是退化的基态之一。真空在群 $G$ 下非不变意味着式(2.15)至少不是对所有属于 $G$ 的元素 $g$ 都成立,因此至少有某些荷算符 $\hat{Q}^i$ 不湮灭真空

$$\hat{Q}^i|0\rangle \neq 0 \tag{2.18}$$

我们来证明,在这种情况下 $\hat{Q}^i$ 不可能是物理态 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$中的算符。

物理态 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$可以看作是由物理真空做不同的局部扰动形成的,因为

一切实验装置都是局部的(也就是说只占有有限的空间)。在定域场论中局部的扰动可以表示为定义于各点的定域算符对有限空间的积分作用在物理真空态上。我们称这种算符为局部算符。这样定义的空间 $\mathscr{H}$ 包含物理真空和粒子波包态,它们是可以归一的。

由式(2.18)知道态 $\hat{Q}^i|0\rangle$ 的模的平方

$$\langle 0|(\hat{Q}^i)^2|0\rangle > 0 \tag{2.19}$$

另一方面由真空的平移不变性及

$$\hat{j}^i_\mu(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{P}x}\hat{j}^i_\mu(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{P}(x)}$$

($\hat{P}$ 是动量算符)得到

$$\begin{aligned}\langle 0|(\hat{Q}^i)^2|0\rangle &= \lim_{V\to\infty}\int_V \mathrm{d}^3x\langle 0|\hat{j}^i_0(x)\hat{Q}^i|0\rangle \\ &= \lim_{V\to\infty}\int_V \mathrm{d}^3x\langle 0|\hat{j}^i(0)\hat{Q}^i|0\rangle\end{aligned} \tag{2.20}$$

上式右方的矩阵元是与 $V$ 无关的非零常数,因为假如它等于零,则 $\langle 0|(\hat{Q}^i)^2|0\rangle = 0$,这与式(2.19)矛盾。因此态 $\hat{Q}^i|0\rangle$ 的模是无穷大,它不是 $\mathscr{H}$ 中的态。下面将证明 $\hat{Q}^i$ 与局部算符的对易子可以定义,而物理态的 Hilbert 空间是由一些局部算符作用在真空态上得到的,因此 $\hat{Q}^i$ 不能在真空态上定义,意味着它在整个物理态 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 上不能定义。由于算符 $\hat{Q}^i$ 不存在,写为式(2.12)的群 $G$ 的幺正表示是不存在的。

我们可以考虑有限的体积 $V$,引入算符

$$\hat{Q}^i_V = \int_V \mathrm{d}^3x\,\hat{j}^i_0(x) \tag{2.21}$$

并考虑极限

$$|\alpha\rangle = \lim_{V\to\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha^i\hat{Q}^i_V}|0\rangle \tag{2.22}$$

这个极限如果存在,就是与物理真空 $|0\rangle$ 退化的基态。我们将在后面证明 $|\alpha\rangle$ 与 $\mathscr{H}$ 中所有的态正交,因而不是 $\mathscr{H}$ 中的态,因此算符

$$\lim_{V\to\infty}\exp(\mathrm{i}\alpha^i\hat{Q}^i_V)$$

不构成群 $G$ 的元素在物理态 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中的幺正表示。

虽然 $\hat{Q}^i$ 不存在,我们可以考虑 $\hat{Q}^i_V$ 与算符 $\hat{O}$ 的对易子的极限

$$\lim_{V\to\infty}[\hat{Q}^i_V(y_0),\hat{O}] = \lim_{V\to\infty}\int_V \mathrm{d}^3y[\hat{j}^i_0(y),\hat{O}] \tag{2.23}$$

由流守恒 $\partial_\mu\hat{j}^i_\mu = 0$ 得

$$\frac{\partial}{\partial y_0}[\hat{Q}^i_V(y_0),\hat{O}] = \int_V \mathrm{d}^3y[\partial_0\hat{j}^i_0(y),\hat{O}] = -\int[\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{j}(y),\hat{O}] \tag{2.24}$$

上式中,$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 是 $V$ 的面积元。先设 $\hat{O}^i$ 是定义于 $x$ 点的定域算符 $\hat{O}^i(x)$。对 Lorentz 协变的定域场论,式(2.24)右方的对易子只在

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| \leqslant |x_0-y_0| \tag{2.25}$$

处不为零。因此当 $V$ 的表面离 $\boldsymbol{x}$ 点足够远时,式(2.24)为零。由此知式(2.23)中的极限与 $y_0$ 无关,它可以写为

$$\lim_{V\to\infty}[\hat{Q}^i_V,\hat{O}(x)] = \lim_{V\to\infty}\int_V \mathrm{d}^3y[\hat{j}^i_0(y),\hat{O}(x)]|_{x_0=y_0} \tag{2.26}$$

由于在 Lorentz 协变的定域场论中 $\hat{j}^i_0(y)$ 是同一点 $y$ 的场算符的乘积,式(2.26)中的极限显然是存在的,并且就是利用正则对易关系形式地计算对易子 $[\hat{Q}(y),\hat{O}(x)]_{x_0=y_0}$ 所得到的算符。显然当 $\hat{O}$ 是局部算符时,这个结论也成立。因此我们将把极限式(2.26)记为 $[\hat{Q},\hat{O}]$。然而应当记住,由于 $\hat{Q}^i$ 不存在,严格来说,极限 $V\to\infty$ 是不能在对易号内取的。以上证明用到 Lorentz 协变性和流算符的定域性,对非协变的场论式(2.24)右方的对易子在 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ 大时可以不严格为零。但是如果只有短程力,极限式(2.23)仍然存在。

我们还可以通过下式定义局部算符 $\hat{O}$ 在群 $G$ 下的变换

$$\lim_{V\to\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha^i\hat{Q}^i}\hat{O}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha^i\hat{Q}^i} = 1-[\alpha^i\hat{Q}^i,\hat{O}]+\frac{1}{2}[\alpha^i\hat{Q}^i,[\alpha^j\hat{Q}^j,\hat{O}]]+\cdots \tag{2.27}$$

它们给出和没有对称性自发破缺的情况相同的变换关系式。

真空在群 $G$ 下非不变在物理上表现为某些在群 $G$ 下非不变的算符的真空平均值不为零。设有定域算符 $\hat{O}^a(x)$,满足

$$[\hat{Q}^i,\hat{O}^a(x)] = (t_i)_{ab}\hat{O}^b(x) \neq 0 \tag{2.28}$$

($t_i$ 为 $\hat{O}^a$ 所属不可约表示中的生成元)及

$$\langle 0|\hat{O}^b(x)|0\rangle = \langle 0|\hat{O}^b(0)|0\rangle = \eta^b \neq 0 \tag{2.29}$$

则有

$$\langle 0|[\alpha^i\hat{Q}^i,\hat{O}^a]|0\rangle = \alpha^i(t_i)_{ab}\eta^b$$

由于 $\alpha^i$ 是任意的,上式一般不为零。只有在真空非不变($\hat{Q}^i|0\rangle\neq 0$)时这才是可能的。退化的真空态以 $\eta^b$ 的值相区别,物理的真空态只能取其中之一。因此给定 $\eta^b$ 的值以后式(2.29)就成为破坏群 $G$ 对称性的一个"边界"条件。从这个角度说,对称性自发破缺理论的特点是:运动方程和对易关系是对称的,但有式(2.29)形式的破坏对称性的"边界"条件。

设 $|\eta\rangle$ 和 $|\eta'\rangle$ 为两个退化真空态,$\hat{A}(x)$,$\hat{B}(y)$ 是两个定域厄米算符。取归一

化条件$\langle P'|P\rangle=(2\pi)^3(2E_P)\delta^3(P'-P)$①。对一组完整正交的中间态$|n\rangle$，$\sum_n\int\frac{d^3P_n}{(2\pi)^3(2E_n)}|n\rangle\langle n|=I$。因此我们有

$$\langle\eta'|\hat{A}(x)\hat{B}(0)|\eta\rangle=\sum_n d^3P_n\frac{1}{(2\pi)^3(2E_n)}e^{i\boldsymbol{P}_n\cdot\boldsymbol{x}-iE_nx_0}\cdot\langle\eta'|\hat{A}(0)|n\rangle\langle n|\hat{B}(0)|\eta\rangle$$

其中，$\boldsymbol{P}_n$和$E_n$为中间态$|n\rangle$的动量和能量，$E_n=\sqrt{P_n^2+M_n^2}$，$M_n$是中间态$|n\rangle$的不变质量。当$|\boldsymbol{x}|\to\infty$时，由于积分号内有快速振荡因子$e^{i\boldsymbol{P}_n\cdot\boldsymbol{x}}$，其余的因子是$\boldsymbol{P}_n$的光滑函数，因此对$\boldsymbol{P}_n$的积分都被消掉了，只有不含对$\boldsymbol{P}_n$积分的真空态贡献保留下来。因此有

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty}\langle\eta'|\hat{A}(x)\hat{B}(0)|\eta\rangle=\sum_{\eta''}\langle\eta'|\hat{A}(0)|\eta''\rangle\times\langle\eta''|\hat{B}(0)|\eta\rangle \quad (2.30)$$

上式右方是真空态对中间态的贡献。式(2.30)表示算符乘积的真空矩阵元的成团性。由微观因果性

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty}\langle\eta'|[\hat{A}(x),\hat{B}(0)]|\eta\rangle=0$$

由上式及式(2.30)知道，算符$\hat{A}(0)$，$\hat{B}(0)$在退化真空态子空间中的矩阵$\langle\eta|\hat{A}(0)|\eta''\rangle$和$\langle\eta''|\hat{B}(0)|\eta\rangle$是可以对易的。因此它们可以同时对角化。在进行了这样的对角化以后，如果退化真空态以一组定域算符$\hat{O}^a$的真空平均值$\eta^a$相区别，记为$|\eta\rangle$，则对任何局部算符$\hat{F}$有

$$\langle\eta'|\hat{F}|\eta\rangle=0,\qquad 当\ \eta\neq\eta' \quad (2.31)$$

上式证明了退化真空态与物理态Hilbert空间中的所有态是正交的。

本章开始时我们曾由物理直观断言，不可能通过局部的扰动改变无穷铁磁体基态的自旋排列方向，上面的推导是这个论断的数学证明，因为局部的扰动可以在拉氏量中加一个外源项

$$\int_V C(x)\hat{O}(x)d^3x$$

来代表，其中经典外源$C(x)$只在体积$V$内不为零。这一外源项造成的跃迁矩阵元为

$$\left\langle\eta'\left|\exp\left(i\int_V C\hat{O}\,d^3x\right)\right|\eta\right\rangle$$

按照式(2.31)，这个矩阵元为零。虽然式(2.31)的证明利用了相对论性场论的微

① 这个归一化条件是Lorentz不变的，它可写为
$\int d^4P\delta(P^2+M^2)\theta(E_P)\langle P'|P\rangle=1$

观因果性,但是对没有长程作用的非相对论系统也可以得到相似的结论。

由以上讨论知道,当真空态在拉氏量的对称群 $G$ 下非不变时,物理态 Hilbert 空间不能构成群 $G$ 的幺正表示空间,因此运动方程和对易关系的对称性不再表现为粒子谱按群表示的分类和类似 Wigner-Eckart 定理的关系式。在对称性以 Wigner 方式实现时,对称群的变换把一种粒子态变为与它同属于一个不可约表示的其他粒子态,它们都有相同的质量。在对称性自发破缺时,这些粒子的质量一般不再相等。注意,前面的论证用到真空的平移不变性和空间的无穷性,因此与场是无穷多个自由度的系统相联系,在有限个自由度的系统中不会出现这种现象。

荷算符是否湮灭真空,对于对称性的实现来说,这是关键性的。事实上 Coleman 证明了如下的逆定理[5]:在 Lorentz 协变的定域量子场论中,如果荷算符湮灭真空且不存在零质量粒子,则相应的流是守恒的,$\partial_\mu \hat{j}_\mu = 0$ 成立。这时对称性是严格的。简单地说,真空的对称性就是世界的对称性。

Goldstone 等发现,在连续对称性自发破缺时,必然出现一些零质量粒子。这是来自运动方程和对易关系的对称性的严格结果,因此这种情况也称为对称性的 Goldstone 实现方式。我们现在来叙述和证明这个定理[1~4]。

**Goldstone 定理:**在相对论协变的定域场论中,如 $\partial_\mu \hat{j}^i_\mu(x) = 0$ 且存在算符 $\hat{O}^a(x)$,使

$$\langle 0 | [\hat{Q}^i, \hat{O}^a(x)] | 0 \rangle \neq 0 \tag{2.32}$$

则存在零质量粒子态 $|G\rangle$ 使

$$\langle G | \hat{j}^i_0(x) | 0 \rangle \neq 0, \qquad \langle 0 | \hat{O}^a(x) | G \rangle \neq 0 \tag{2.33}$$

注意式(2.32)只有在 $\hat{Q}^i|0\rangle \neq 0$ 时才可能。式(2.32)还表示[由式(2.28)和(2.29)]有一组算符 $\{\hat{O}^b\}$ 满足 $t^i_{ab}\langle 0|\hat{O}^b|0\rangle = t^i_{ab}\eta^b \neq 0$。由式(2.24)后面的讨论知道

$$\frac{\partial}{\partial y_0}\langle 0 | [\hat{Q}^i(y_0), \hat{O}^a(x)] | 0 \rangle = 0 \tag{2.34}$$

在式(2.32)中插入一组完备的中间态,得

$$\lim_{V\to\infty}\int_V d^3y \sum_n \int \frac{d^3\boldsymbol{P}_n}{(2\pi)^3 2E_n}\{\langle 0| \hat{j}^i_0(y) | n\rangle\langle n | \hat{O}^a(x) | 0\rangle - \langle 0 | \hat{O}^a(x) | n\rangle \cdot \langle n | \hat{j}^i_0(y) | 0\rangle\} \neq 0$$

由真空平移不变性,上式可化为

$$\sum_n \int \frac{d^3\boldsymbol{P}_n}{(2\pi)^3 2E_n}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{P}_n)\{\langle 0| \hat{j}^i_0(0) | n\rangle\langle n | \hat{O}^a(0) | 0\rangle e^{-iE_n(y_0-x_0)} - \langle 0 | \hat{O}^a(0) | n\rangle\langle n | \hat{j}^i_0(0) | 0\rangle e^{iE_n(y_0-x_0)}\} \neq 0 \tag{2.35}$$

其中，$\boldsymbol{P}_n$，$E_n$ 分别为中间态$|n\rangle$的动量和能量。由于在上式中有因子 $\delta^3(\boldsymbol{P}_n)$，所以只有零动量邻域的中间态才有贡献。另一方面，由式(2.34)知式(2.35)左方与 $y_0$ 无关，因此 $E_n\neq 0$ 的态的贡献必须消掉。由此得到，一定存在 $\boldsymbol{P}_n\to 0$ 时 $E_n\to 0$（即质量为零）的态$|G\rangle$满足式(2.35)，这就证明了 Goldstone 定理。

前面已经说明，在非相对论性的量子场论中，如果系统中只有短程作用力，对易子$[\hat{Q}^i(y_0),\hat{O}^a(x)]$还是可以定义的，并且与 $y_0$ 无关。因此 Goldstone 定理在没有长程作用的非相对论性量子场论中也成立。非相对论性量子场论可以描述凝聚态。

对称性自发破缺的理论中出现的零质量粒子称为 Goldstone 粒子。式(2.33)中的第一式意味着 Goldstone 粒子必须与某个相应于破缺对称性的 $j_0^i$ 相耦合。由于算符$[\hat{Q}^i,\hat{O}^a]$与算符 $\hat{O}^a$ 处在群 $G$ 的同一个不可约表示中[式(2.28)]，式(2.33)的第二式意味着 Goldstone 粒子必须与一个和真空平均值不为零的算符处在同一个不可约表示中的算符耦合。这个算符 $\hat{O}^a$ 和 $\hat{j}_\mu^i$ 都可从真空中产生 Goldstone 粒子。因此 Goldstone 粒子必须与它们有相同的未破缺的内部量子数。如果 Lorentz 不变性不破缺，式(2.32)说明$[\hat{Q}^i,\hat{O}^a]$必须是标量或赝标。通常 $\hat{Q}^i$ 是标量或赝标，因此 $\hat{O}^a$ 也是这样。由于$\langle G(k)|\hat{O}^a(0)|0\rangle$在动量 $k\to 0$ 时不为零，Goldstone 粒子是标量或赝标。在下面讨论的例子中，我们将看到，$\hat{O}^a$ 有时就是出现在拉氏量中的 Goldstone 粒子的场算符。在另一种情况下，$\hat{O}^a$ 是由基本场的乘积构成的复合算符。

一个零动量的 Goldstone 粒子能量为零。因此只包含一个零动量 Goldstone 粒子的态是与物理真空退化的。另一方面，由于 $\hat{Q}^i=\int \mathrm{d}^3x\,\hat{j}_0^i(x)$，式(2.33)意味着，对于破缺的对称性，$\hat{Q}^i|0\rangle$ 包含零动量 Goldstone 粒子态的成分。事实上，由于 $\hat{H}\hat{Q}^i|0\rangle=\hat{Q}^i\hat{H}|0\rangle=0$，态 $\hat{Q}^i|0\rangle$ 是与真空退化的，它常常就是零动量 Goldstone 粒子态。这一点在下面讨论的具体模型中将可以验证。由于破缺的 $\hat{Q}^i$ 作用在真空态上代表真空态在内部空间中的无穷小转动，上面的讨论说明，之所以存在零质量 Goldstone 粒子是由于真空态在内部空间中的整体转动不需要能量。

由于破缺的生成元 $\hat{Q}^i$ 包括零动量 Goldstone 粒子的产生算符，退化的真空态式(2.22)中包含数目不确定的零动量 Goldstone 粒子。产生动量严格为零的粒子的场算符在整个无穷的空间中为常量。这样的算符不是局部的，$\hat{Q}^i$ 就不是局部的，所以这种态不包含在以前定义的物理态 Hilbert 空间中，动量严格为零的粒子不能通过对物理真空的局部扰动产生出来。

下面我们将略去表示算符的符号^，用同一符号表示经典场量和相应的量子场算符。

那些没有破缺的生成元 $\hat{Q}_i$ 必定构成一个群 $H$ 的代数，这是因为，如果 $\hat{Q}_i$ 和

$\hat{Q}_j$ 都湮灭真空,它们的对易子必定也湮灭真空。$H$ 是群 $G$ 的没有破缺的子群,与它相应的对称性是以 Wigner 方式实现的。易证真空平均值$\langle 0|\hat{O}^b|0\rangle$在群 $H$ 下保持不变。对应于 Goldstone 粒子的 $\hat{Q}_i$ 则生成陪集 $G/H$ 上的元素。

由 Goldstone 定理还可以导出 Goldstone 粒子与其他粒子相互作用的形式。式(2.35)表示矩阵元$\langle 0|j^i_\mu(0)|G^i(q)\rangle\neq 0$。由 Lorentz 协变性可得

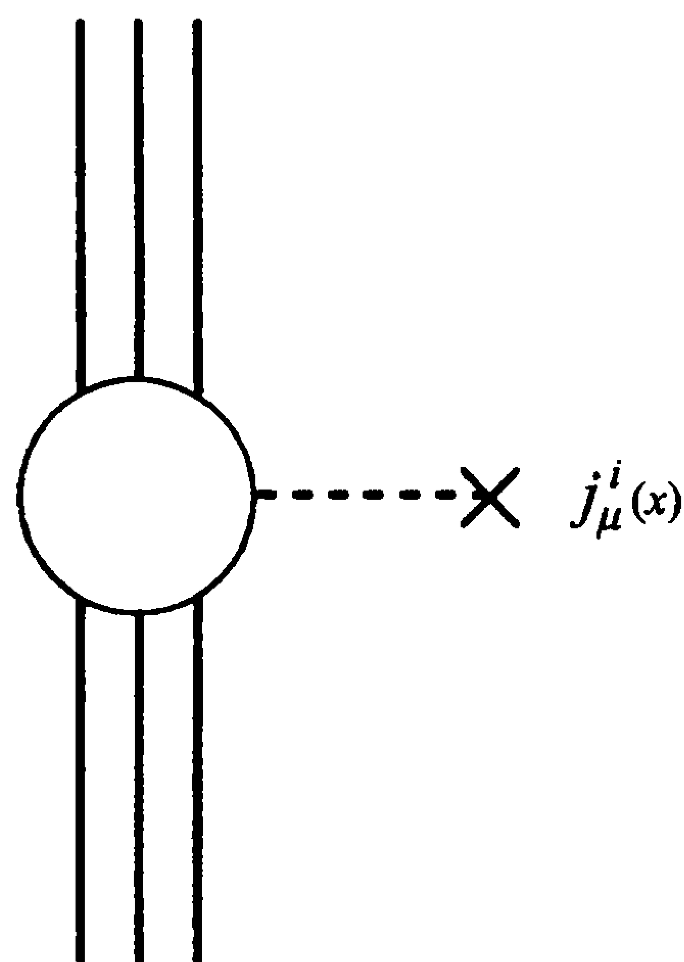


图 2.1

$$\langle 0|j^i_\mu(0)|G^i(q)\rangle = \mathrm{i}f^i q_\mu \tag{2.36}$$

其中,$f^i$ 为常数,$q_\mu$ 为 $G_i$ 的动量。$j^i_\mu$ 与粒子的耦合必定包含它通过$|G^i(q)\rangle$中间态与其他粒子耦合的一项。如果 $G_i$ 的场是出现在拉氏量中的基本场,设为 $\varphi^i$,则式(2.36)表示拉氏量中有一项 $f^i j^i_\mu \varphi^i$。过渡到相互作用表象做微扰论计算可知,矩阵元$\langle b|j^i_\mu(x)|a\rangle$必定包含图 2.1 中的图形的贡献,其中虚线为 $\varphi^i$ 内线。令 $M^i_{ba}=\langle b,G^i|j^i_\mu|a\rangle$为过程 $a\to b+G^i(q)$的跃迁矩阵元,则在 $q^2=0$ 点附近

$$\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\langle b\mid j^i_\mu(x)\mid a\rangle \approx \mathrm{i}f^i\frac{q_u}{q^2}M^i_{ba} + N^i_{\mu,ba}$$

这里,$\frac{1}{q^2}$ 为 $\varphi^i$ 场传播子,$N^i_{\mu,ba}$ 为矩阵元中没有$q^2=0$极点的项。上式在一般情况下可以由矩阵元$\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\langle b\mid j^i_\mu(x)\mid a\rangle$对变量 $q^2$ 的色散关系证明,即使在拉氏量中不含与 $G_i$ 相应的场时(动力学对称性破缺的情况)也成立。由上式及流守恒方程 $\partial_\mu j^i_\mu=0$ 得到

$$M^i_{ba} = \mathrm{i}\frac{q_\mu}{f^i}N^i_{\mu,ba} \tag{2.37}$$

上式表示 Goldstone 粒子与其他粒子的耦合正比于相应的破缺流与其他粒子的耦合的非极点部分,比例系数为$\frac{q_\mu}{f^i}$。

$q_\mu\to 0$ 时,式(2.37)中只剩下 $N^i_{\mu,ba}$ 中在此极限下$\to\infty$的项的贡献。在做微扰计算时,$N^i_{\mu,ba}$ 中 $j^i_\mu$ 作用在圈图的内线上的项在 $q_\mu\to 0$ 时都是有限的,奇异只可能发生在 $q_\mu$ 作用在外线上时(见图 2.2)。如果此外线的动量在质壳上,即 $p^2=-m^2$,则与$j^i_\mu$ 相邻的内线的传播子贡献一个因子

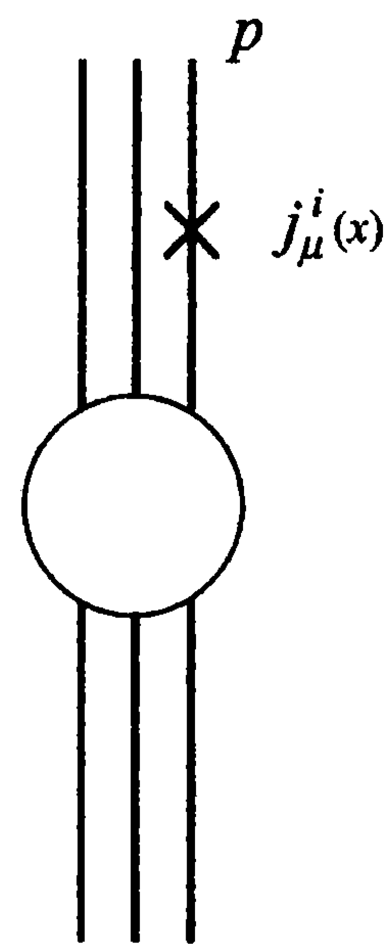


图 2.2

$$\frac{1}{p^2+2pq+q^2+m^2}\to\frac{1}{2pq}$$

因此,此项对 $M^{i}_{ba}$ 的贡献为非零的有限数。对小动量 Goldstone 粒子的耦合只需要考虑这种图形。

## 2.2　几个对称性自发破缺的例子

让我们考虑一个场论的简单例子。设 $\varphi(x)$为实标量场,拉氏量密度为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\partial_{\mu}\varphi\partial_{\mu}\varphi - \frac{1}{2}\mu^{2}\varphi^{2} - \frac{1}{4}\lambda\varphi^{4} \tag{2.38}$$

$\mathscr{L}$有 $\varphi \to -\varphi$ 的反射不变性。这是一个离散的对称群。哈密顿密度为

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^{2} + \frac{1}{2}\mu^{2}\varphi^{2} + \frac{1}{4}\lambda\varphi^{4}$$

为使势能密度

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\mu^{2}\varphi^{2} + \frac{1}{4}\lambda\varphi^{4}$$

有底,$\lambda$ 必须为正数。$V(\varphi)$无底的标量场论不能有稳定的基态,因而物理上是不能接受的。

通常 $\mu^{2}>0$,这时在经典场方程

$$-\partial_{\mu}\partial_{\mu}\varphi + \mu^{2}\varphi + \lambda\varphi^{3} = 0$$

的解中,平凡解

$$\varphi(x) = 0$$

给出 $V(\varphi)$和哈密顿量

$$H = \int \mathscr{H}(\varphi)\mathrm{d}^{3}x$$

的绝对极小。它是稳定的解。在 $\varphi(x)=0$ 附近,$\varphi^{4}$ 项可以忽略,$V(\varphi)$的形状类似于无穷多个谐振子的系统。在量子化的场论中,应用场的系统与谐振子系统的相似性,把 $\varphi(x)$取作量子场论的正则坐标算符。如所周知,这时量子化后得到的粒子质量为$\sqrt{\mu^{2}}$。

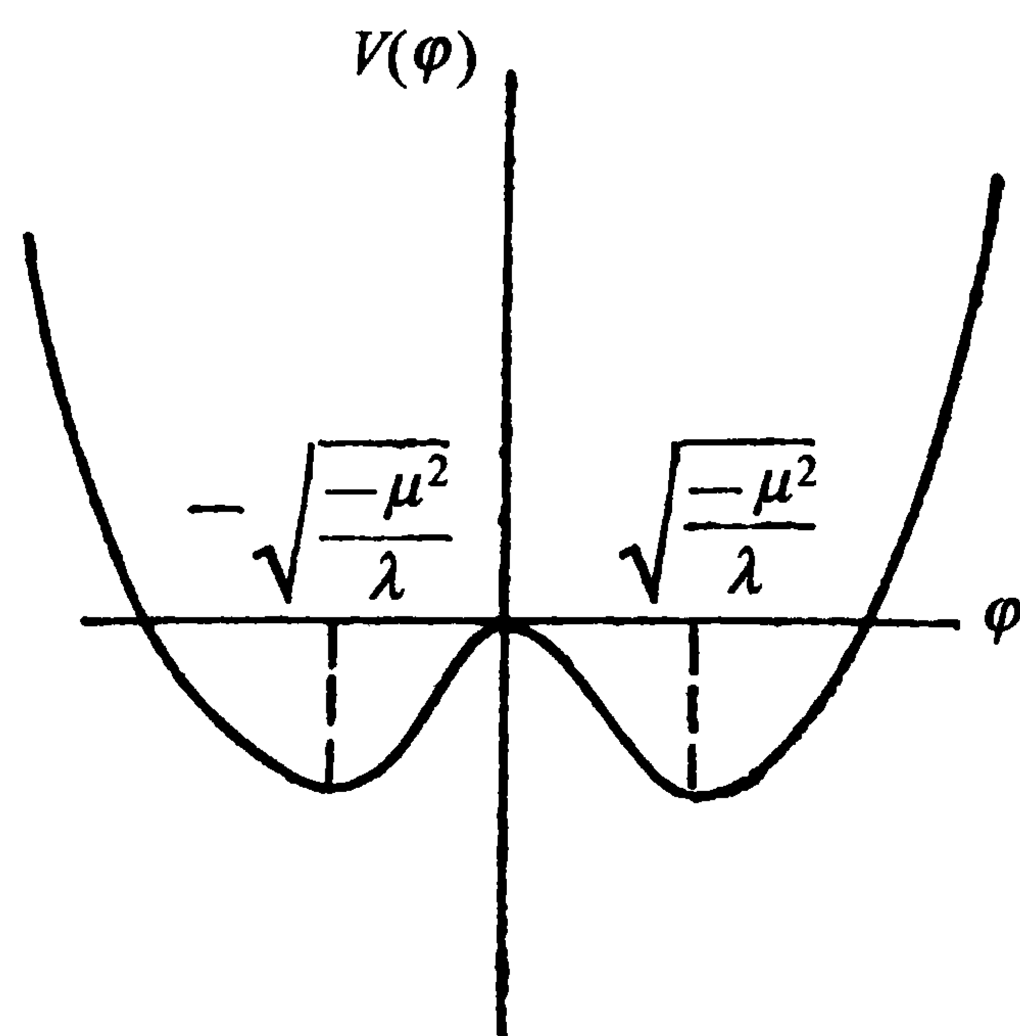


图 2.3

现在我们设 $\mu^{2}<0$。这时 $V(\varphi)$的曲线如图 2.3 中的形状。现在 $\varphi(x)=0$ 不是 $V(\varphi)$的极小而是局部极大,因而是场方程的不稳定解。如果 $\varphi(x)$对解 $\varphi(x)=0$ 有一个小的偏离 $\delta\varphi(x)$,这时在运动方程中$(\delta\varphi)^{3}$ 项可以忽略,$\delta\varphi$ 满足方程

$$\partial_{\mu}\partial_{\mu}\delta\varphi(x) + \mu^{2}\delta\varphi(x) = 0$$

因此它的傅氏分量 $\delta\varphi_k(x)$ 为

$$\delta\varphi_k(x) = c\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} \pm \mathrm{i}\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + \boldsymbol{\mu}^2}\,t)$$

对 $\boldsymbol{k}^2 < -\mu^2$ 的分量，偏离 $\delta_k\varphi(x)$ 将随时间指数地增长。因此这个解是不稳定的。相应地，在量子场论中，如果我们盲目地用以前的方案，则会得到粒子质量 $\sqrt{\mu^2}$ 为虚数的非物理结果。正确的量子化方法应当围绕经典场方程的稳定解进行，通常应当围绕 $H$ 的绝对极小进行，因为经典场论中 $H$ 的绝对极小相应于量子场论的真空。

在 $\mu^2<0$ 时，使 $H$ 为绝对极小的经典场方程的解为

$$\varphi(x) = \pm\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \equiv \pm v \tag{2.39}$$

按照上面所说，正确的量子化方案应当围绕这两个解之一进行。由于我们总可以通过变换 $\varphi\to-\varphi$ 重新定义 $\varphi$ 场，不失一般性，可取式(2.39)中的正号解。令

$$\varphi'(x) = \varphi(x) - v \tag{2.40}$$

为量子化场的正则坐标。拉氏量密度式(2.36)可用 $\varphi'$ 表示为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi'\partial_\mu\varphi' + \mu^2\varphi'^2 - \lambda v\varphi'^3 - \frac{1}{4}\lambda\varphi'^4 \tag{2.36$'$}$$

上式中 $\varphi'$ 场的质量平方是 $-2\mu^2$，它是正数。在微扰论最低阶，忽略相互作用，$\varphi'$ 场的真空平均值为

$$\langle\varphi'\rangle_0 \equiv \langle 0|\varphi'(x)|0\rangle = 0$$

由式(2.40)知

$$\langle\varphi\rangle_0 = v \tag{2.41}$$

上式表示在微扰论最低阶，$v$ 是 $\varphi$ 场的真空平均值。

在另一个理论上可能的真空态中

$$\langle\varphi\rangle_0 = -v \tag{2.42}$$

这两个态以反射变换 $\varphi\to-\varphi$ 相联系。这两个态之间的位垒高度是

$$\int \mathrm{d}^3x\,\frac{\lambda}{4}v^4 = \infty$$

因此量子穿透是不可能的。这是场有无穷多自由度的结果。在第一个真空态基础上的有限能量的激发态也不可能穿透位垒而变成另一个真空态上的激发态。因此物理真空只能取二者之一，在这个系统中产生了对称性的自发破缺。还可以注意到，式(2.36′)对反射变换 $\varphi'\to-\varphi'$ 没有对称性。正像 2.1 节中所说的，由于“边界”条件式(2.41)产生了 $\varphi\to-\varphi$ 对称性的破缺；由于破缺了的对称性是离散的，这个理论中没有零质量 Goldstone 粒子。

我们不在这里讨论微扰论高阶的结果。它们不会改变对称性自发破缺的定性结论,但是会改变真空平均值$\langle\varphi_0\rangle$和粒子的质量。

现在我们来看一个连续对称群的例子。设有 $N$ 个实标量场 $\varphi_l(x)(l=1,2,\cdots,N)$,把它们看作一个 $N$ 维矢量$\varphi(x)$的分量。拉氏量取为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\cdot\partial_\mu\varphi-\frac{1}{2}\mu^2\varphi\cdot\varphi-\frac{1}{4}\lambda(\varphi\cdot\varphi)^2 \tag{2.43}$$

上式中·表示两个矢量的内积。式(2.43)在 $N$ 维矢量空间的转动变换群 O($N$)下是不变的。势能密度

$$V(\varphi)=\frac{1}{2}\mu^2\varphi\cdot\varphi+\frac{1}{4}\lambda(\varphi\cdot\varphi)^2,\qquad \mu^2<0 \tag{2.44}$$

的绝对极小在

$$\sqrt{\varphi(x)\cdot\varphi(x)}=\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}=v \tag{2.45}$$

处。$\varphi_l=0$ 是 $V(\varphi)$的局部极大。所有长度等于$\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}$的 $N$ 维矢量都满足式(2.45),它们在 $N$ 维空间中构成一个 $N-1$ 维球面,因此满足式(2.45)的解有连续无穷多个退化度,它们以 O($N$)群的变换相互联系。与前面一个例子一样,正则量子化只能围绕满足式(2.45)的一个矢量 $\varphi_0$ 进行。因为我们总可以通过属于 O($N$)群的变换把一个 $N$ 维矢量转到内部空间第 $N$ 个坐标轴的方向,在通过 O($N$)群的变换重新定义 $\varphi$ 场后,不失一般性,可取 $\varphi$ 场的真空平均值为(在微扰论最低阶)

$$\langle\varphi\rangle_0=\varphi_0=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\v\end{bmatrix} \tag{2.46}$$

由 2.1 节的讨论知道,只有这个真空态及其局部激发态是物理上实现了的,与这个真空态退化的其他真空态及其激发态不能实现。因此 O($N$)对称性自发破缺了。但这个例子有一个特点,即还留下一个没有破缺的子群。这是由 $\varphi_l(x)(l=1,2,\cdots,N-1)$组成的 $N-1$ 维子空间的转动群 O($N-1$)。式(2.46)在这个 O($N-1$)群下显然是保持不变的。令 $\hat{\varphi}$是由 $\varphi$ 的前$N-1$ 个分量组成的 $N-1$ 维矢量

$$\varphi'(x)=\varphi_N(x)-v \tag{2.47}$$

拉氏量密度式(2.43)可写为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}\partial_\mu\hat{\varphi}\cdot\partial_\mu\hat{\varphi}-\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi'\partial_\mu\varphi'+\mu^2\varphi'^2$$

$$-\lambda v\varphi'(\varphi'^2+\hat{\varphi}\cdot\hat{\varphi})-\frac{1}{4}\lambda(\varphi'^2+\hat{\varphi}\cdot\hat{\varphi})^2+\text{常数} \tag{2.48}$$

上式显然具有 $\mathrm{O}(N-1)$群下的不变性。

由式(2.48)看到 $\varphi'$场的质量是$\sqrt{-2\mu^2}$,这是一个正实数。但是 $\varphi$ 场的前 $N-1$ 个分量是无质量的。原来属于 $\mathrm{O}(N)$群同一个不可约表示的粒子不再是退化的了。注意,$\mathrm{O}(N)$群有$\frac{1}{2}N(N-1)$个生成元 $T_{ij}(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,N)$。$T_{ij}$ 产生$(i,j)$平面上的转动,它的矩阵形式为

$$(T_{ij})_{mn}=-\mathrm{i}(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}) \tag{2.49}$$

而 $\mathrm{O}(N-1)$群只有$\frac{1}{2}(N-1)(N-2)$个生成元。$\mathrm{O}(N)$群的生成元中有 $N-1$ 个不属于 $\mathrm{O}(N-1)$群的生成元,它们相应于第 $N$ 和第 $l(l=1,2,\cdots,N-1)$个方向所组成的平面上的转动。真空平均值式(2.46)在这些转动下不是不变的。破缺的拉氏量的对称群元素的生成元的个数恰好等于零质量标量粒子的个数,这一点在上面的讨论中好像是偶然的,实际上,如 Goldstone 定理所示,这是自发破缺场论的一个普遍结论。为了在现在讨论的例子中看出这两者之间的联系,我们不用减去真空平均值的办法而用另一种办法重新定义场量。

通过下式

$$\varphi(x)=\exp(\mathrm{i}\theta_i(x)/vT_{iN})\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\v+\rho(x)\end{bmatrix} \tag{2.50}$$

定义新的场量 $\rho(x)$及 $\theta_i(x)(i=1,2,\cdots,N-1)$。新场量的总数仍与原来 $\varphi(x)$ 场分量的总数相同。由于任何 $N$ 维空间矢量都可以通过 $\mathrm{O}(N)$的转动变到第 $N$ 个方向,显然所有的 $\varphi(x)$都能写成式(2.50)的形式,而且在指数中只有改变 $\varphi$ 场的真空平均值的生成元是需要的。场量的这种参数化的办法在以后引入规范场的讨论中很有用。把式(2.50)代入式(2.43)并利用矢量

$$T_{iN}\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}\quad\text{与}\quad\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

正交,就得到

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}\partial\rho_\mu\partial\rho_\mu-\frac{1}{2}\partial_\mu\theta_i\partial_\mu\theta_i+\text{含微商的高于场的二次项}$$

$$-\frac{1}{2}\mu^2[v+\rho(x)]^2-\frac{1}{4}\lambda[v+\rho(x)]^4 \tag{2.51}$$

由上式看到，$\rho(x)$场有质量$\sqrt{-2\mu^2}$，而与破缺的生成元相联系的场 $\theta_i(x)$是无质量的。

这些零质量粒子的存在是很容易理解的。它们相应于内部空间中转动真空平均值$\langle\phi\rangle_0$ 方向的场的激发。由于拉氏量的对称性，位势 $V(\varphi)$在这些方向上是平坦的，$V$ 在这些方向上的二次导数为零，因此相应的粒子没有质量。由这些粒子存在的物理原因可以看出它们就是 2.1 节中所讨论的 Goldstone 粒子。现在我们来验证这一点。在这里讨论的 O($N$)标量场模型中，荷密度算符为

$$j_0^{(ij)}=-\mathrm{i}\pi T_{ij}\varphi,\qquad i,j=1,2,\cdots,N \tag{2.52}$$

其中，$T_{ij}$ 由式(2.49)表示。设$\langle\varphi\rangle_0$ 在第 $N$ 个轴方向，其值为 $v$。由正则对易关系

$$\langle 0|[Q^{(iN)},\varphi_i(x)]|0\rangle=\mathrm{i}\langle 0|\varphi_N(x)|0\rangle=\mathrm{i}v\neq 0 \tag{2.53}$$

式(2.53)是 Goldstone 定理的条件。令 $\varphi(x)=\varphi'(x)+\langle\varphi\rangle_0$，式(2.52)可写为

$$j_0^{(iN)}=-v\pi_i'-\varphi_N'\pi_i'+\pi_N'\varphi_i',\qquad i=1,2,\cdots,N-1 \tag{2.54}$$

在 $t=0$ 时刻，我们可以把 $\pi'$和$\varphi'$展开为

$$\varphi_i'(\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2\omega_k}}(a_i(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+a_i^\dagger(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}})$$

$$\pi_i'(\boldsymbol{x})=\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^{3/2}}\int\mathrm{d}^3k\sqrt{\frac{\omega_k}{2}}(a_i(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}-a_i^\dagger(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}) \tag{2.55}$$

在应用这个形式的展开式时，$a_i(\boldsymbol{k})$和 $a_j^\dagger(\boldsymbol{k})$的对易关系为

$$[a_i(\boldsymbol{k}),a_j^\dagger(\boldsymbol{k}')]=\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\delta_{ij}$$

在微扰论最低阶，物理真空与裸真空重合，因此

$$a_i(\boldsymbol{k})|0\rangle=0,\qquad i=1,2,\cdots,N$$

由式(2.54)及(2.55)得

$$j_0^{(iN)}(\boldsymbol{x})|0\rangle=-v\frac{\mathrm{i}}{2(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^3k\sqrt{\omega_k}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}a_i^\dagger(\boldsymbol{k})|0\rangle$$
$$+\mathrm{i}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^3k\int\mathrm{d}^3k'\left(\sqrt{\frac{\omega_k}{\omega_{k'}}}-\sqrt{\frac{\omega_{k'}}{\omega_k}}\right)a_N^\dagger(k)a_i^\dagger(k')|0\rangle \tag{2.56}$$

考虑协变归一化的态

$$|G\rangle=\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}a_i^\dagger(\boldsymbol{k})|0\rangle,\qquad i=1,2,\cdots,N-1$$

由上两式及 Lorentz 协变性得

$$\langle G|j_\mu^i(0)|0\rangle=-\mathrm{i}vk_\mu\neq 0 \tag{2.57}$$

显然

$$\langle G|\varphi_i(x)|0\rangle \neq 0$$

因此，$|G\rangle$是满足式(2.33)中的两个条件的 Goldstone 粒子态，证明了 $\varphi_i(i=1,2,\cdots,N-1)$是Goldstone 粒子场。由式(2.56)得到

$$Q^{(iN)}|0\rangle = -\mathrm{i}\frac{v}{2}\sqrt{\omega_0}a_i^\dagger(0)|0\rangle \tag{2.58}$$

正如 2.1 节提到的，式(2.58)表示 $\hat{Q}^i$ 作用在真空态上得到零动量 Goldstone 粒子态。

现在我们对一般的标量场理论证明 Goldstone 定理，由于复标量场总可以分解为实部和虚部，不失一般性，可以设理论中包含 $N$ 个实标量场 $\varphi_l(x)(l=1,2,\cdots,N)$并把它们看作矢量 $\varphi(x)$的分量。由于下面的讨论与宇称无关，它们也可以是赝标量。理论中可能还有与标量场耦合的旋量场，这里讨论的问题只涉及拉氏量中的纯标量场部分。因此我们设拉氏量密度为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_l\partial_\mu\varphi_l - V(\varphi) \tag{2.59}$$

设拉氏量的最大对称群为 $G$，其生成元在 $\varphi$ 场所属表示中的矩阵为 $T_i(i=1,2,\cdots,r_G)$。因此 $\varphi(x)$场在群 $G$ 下的无穷小变换为

$$\delta\varphi(x) = -\mathrm{i}\alpha^i T_i\varphi(x)$$

由于 $\varphi$ 是实场，$\mathrm{i}T_i$ 必须是实矩阵，因为 $T_i$ 又是厄米矩阵，它必须是反对称矩阵。

由 $V(\varphi)$在群 $G$ 下的不变性，在无穷小变换下，$V$ 的改变为

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial\varphi_l}\delta\varphi_l = -\mathrm{i}\frac{\partial V}{\partial\varphi_l}(\alpha^i T_i)_{lm}\varphi_m = 0 \tag{2.60}$$

将上式再微分一次，得

$$-\mathrm{i}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi_n\partial\varphi_l}(\alpha^i T_i)_{lm}\varphi_m + \frac{\partial V}{\partial\varphi_l}\alpha^i(T_i)_{ln} = 0 \tag{2.61}$$

设 $V(\varphi)$的极小在 $\varphi=\varphi_0$ 处，则

$$\left.\frac{\partial V}{\partial\varphi_l}\right|_{\varphi=\varphi_0} = 0$$

$$V(\varphi) = V(\varphi_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi_n\partial\varphi_l}\right|_{\varphi=\varphi_0}(\varphi-\varphi_0)_n\times(\varphi-\varphi_0)_l + \cdots \tag{2.62}$$

令 $\varphi'=\varphi-\varphi_0$，由上式看到

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi_n\partial\varphi_l}\right|_{\varphi=\varphi_0} = \mu_{nl}^2 \tag{2.63}$$

是 $\varphi'(x)$场的质量平方矩阵。考虑到 $\alpha^i$ 是任意的,由式(2.61)、(2.62)及(2.63)得到

$$\mu_{nl}^2(T_i)_{lm}\varphi_{0m} = 0, \qquad i = 1,2,\cdots,r_G \tag{2.64}$$

设群 $G$ 的对称性自发破缺,$\varphi_0 \neq 0$。又设 $H$ 是 $G$ 的没有破缺的最大子群,因此标量场的真空平均值 $\varphi_0$ 在群 $H$ 下保持不变。如 $H$ 的生成元为 $T_i(i=1,2,\cdots,r_H)$,则 $H$ 的任一元素 $h$ 的矩阵表示 $U(h)$满足

$$U(h)\varphi_0 = \exp\left(-\mathrm{i}\sum_{i=1}^{r_H}\alpha^i T_i\right)\varphi_0 = \varphi_0$$

即

$$(T_i)_{lm}\varphi_{0m} = 0, \qquad i = 1,2,\cdots,r_H \tag{2.65}$$

由式(2.65)和(2.64)得到矩阵方程

$$\mu^2 T_i\varphi_0 = 0, \qquad i = r_H+1, r_H+2,\cdots,r_G \tag{2.66}$$

上式表示质量平方矩阵有 $r_G - r_H$ 个本征值为零的本征矢量 $T_i\varphi_0(i = r_H+1,\cdots,r_G)$。我们来证明这 $r_G - r_H$ 个矢量是线性无关的。如果不是这样,则存在一个线性组合

$$\hat{T} = \sum_{i=r_H+1}^{r_G} c_j T_j \tag{2.67}$$

使

$$\hat{T}\varphi_0 = 0 \tag{2.68}$$

设 $T_i$ 为子群$H$ 的生成元,则由式(2.65)和(2.68)得

$$[\hat{T}, T_i]\varphi_0 = 0 \tag{2.69}$$

上式表示$[\hat{T}, T_i]$或者属于由子群的李代数 $A_H$ 和 $\hat{T}$张成的 $r_H+1$ 维线性空间,或者是 $A_H$ 的元素与另一个 $\hat{T}'$之和,$\hat{T}'$满足类似于式(2.67)和(2.68)的条件。在前一种情况下 $\hat{T}$和 $A_H$ 构成封闭李代数。对后一种情况我们可以对 $\hat{T}'$做类似的讨论。如此下去我们总能得到一个封闭的李代数,它比 $A_H$ 大。这与 $H$ 是$G$ 的最大的没有破缺的子群矛盾。这样就在微扰论最低阶证明了存在 $r_G - r_H$ 个零质量的标量粒子。

以上结果可以推广到不限于微扰论最低阶的普遍证明。我们将在第三章中用泛函方法做。在泛函形式中有一个有效作用量 $\Gamma[\varphi]$ 代替了这里的经典作用量 $S = \int \mathscr{L}\,\mathrm{d}^4 x$,其他的步骤是类似的。用这样的方法我们在那里对量子标量场论证明了 Goldstone 定理:在拉氏量的连续对称性由于真空在这个对称性下非不变而自

发破缺时必然出现零质量的Goldstone粒子。如果最大连续对称群 $G$ 有一个没有破缺的最大连续子群 $H$,则零质量Goldstone粒子的个数等于群 $G$ 和群 $H$ 的生成元个数之差,也就是等于陪集 $G/H$ 上的生成元的个数。

最后讨论一个物理的模型。这是 Gell-Mann 和 Levy 的描述强作用的手征对称性自发破缺的 $\sigma$ 模型[6]。此模型中包含核子场同位旋二重态 $\psi(x)=\begin{pmatrix}\psi_p(x)\\ \psi_n(x)\end{pmatrix}$,同位旋为零的标量场 $\sigma(x)$ 及同位旋为 1 的赝标场 $\boldsymbol{\pi}(x)=(\pi_1(x),\pi_2(x),\pi_3(x))$。拉氏量密度为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=&-\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi-g\bar{\psi}(\sigma+\mathrm{i}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}\gamma_5)\psi\\&-\frac{1}{2}[(\partial_\mu\sigma)^2+(\partial_\mu\boldsymbol{\pi})^2]-\frac{\lambda}{4}(\sigma^2+\boldsymbol{\pi}^2-v^2)^2\end{aligned}\tag{2.70}$$

其中,$\boldsymbol{\tau}=(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$为 Pauli 矩阵。注意,上式中没有核子的质量项。令

$$\Sigma=(\sigma\times I+\mathrm{i}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi})\tag{2.71}$$

$I$ 为 $2\times2$ 单位矩阵,则式(2.70)可以写为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=&-\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi-g(\bar{\psi}_R\Sigma\psi_L+\bar{\psi}_L\Sigma^\dagger\psi_R)\\&-\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(\partial_\mu\Sigma^\dagger\cdot\partial_\mu\Sigma)-\frac{\lambda}{4}\left(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Sigma^\dagger\Sigma-v^2\right)^2\end{aligned}\tag{2.72}$$

其中

$$\psi_L=\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi_L,\qquad \psi_R=\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi_R$$

分别为 $\psi$ 场的手征为 +1 及 −1 的部分。令 $S_L$ 及 $S_R$ 为 SU(2)矩阵。上式显然在如下的 $\mathrm{SU}(2)_L\times\mathrm{SU}(2)_R$ 手征变换群下是不变的

$$\psi_L'=S_L\psi_L,\qquad \psi_R'=S_R\psi_R\tag{2.73}$$

$$\Sigma'=S_R\Sigma S_L^\dagger,\qquad \Sigma'^\dagger=S_L\Sigma^\dagger S_R^\dagger\tag{2.74}$$

$$S_{L,R}=\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{L,R}\right)\tag{2.75}$$

这只有在拉氏量中不含 Fermi 场的质量项时才有可能,因为质量项

$$-m\bar{\psi}\psi=-m\bar{\psi}_L\psi_R-m\bar{\psi}_R\psi_L$$

在变换式(2.73)下不是不变的。由式(2.74)知,$\Sigma$ 构成 $\mathrm{SU}(2)_L\times\mathrm{SU}(2)_R$ 群的 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}^*\right)$表示,此处$\frac{1}{2}$指 SU(2)群的基础表示式(2.75),$\frac{1}{2}^*$ 指其复共轭表示。利用

$$\tau_i\tau_j=\delta_{ij}+\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\tau_k$$

得

$$\delta_{L,R}\boldsymbol{\pi} = \frac{1}{2}(\pm \boldsymbol{\alpha}_{L,R}\sigma + \boldsymbol{\alpha}_{L,R} \times \boldsymbol{\pi})$$

$$\delta_{L,R}\sigma = \mp \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_{L,R} \cdot \boldsymbol{\pi} \tag{2.76}$$

相应于 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 对称的守恒流及守恒荷为

$$\boldsymbol{j}_{L\mu} = i\bar{\psi}_L\gamma_\mu \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\psi_L - \frac{1}{2}\sigma\partial_\mu\boldsymbol{\pi} + \frac{1}{2}\partial_\mu\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{\pi} + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\boldsymbol{\pi} \tag{2.77}$$

$$\boldsymbol{j}_{R\mu} = i\bar{\psi}_R\gamma_\mu \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\psi_R + \frac{1}{2}\sigma\partial_\mu\boldsymbol{\pi} + \frac{1}{2}\partial_\mu\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{\pi} - \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\boldsymbol{\pi} \tag{2.78}$$

由式(2.11)知道,在量子化后,相应的守恒荷 $\boldsymbol{Q}_L$ 和 $\boldsymbol{Q}_R$ 满足

$$[Q_L^i, Q_L^j] = i\varepsilon_{ijk}Q_L^k \tag{2.79}$$

$$[Q_R^i, Q_R^j] = i\varepsilon_{ijk}Q_R^k \tag{2.80}$$

$$[Q_L^i, Q_R^j] = 0 \tag{2.81}$$

式(2.79)~(2.81)构成 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 群的李代数。定义矢量流 $\boldsymbol{j}_\mu$ 及轴矢流 $\boldsymbol{j}_{5\mu}$及相应的守恒荷 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{Q}_5$

$$\boldsymbol{j}_\mu = \frac{1}{2}(\boldsymbol{j}_{L\mu} + \boldsymbol{j}_{R\mu}) = i\bar{\psi}\gamma_\mu \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\psi + \frac{1}{2}\partial_\mu\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{\pi} \tag{2.82}$$

$$\boldsymbol{j}_{5\mu} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{j}_{L\mu} - \boldsymbol{j}_{R\mu}) = i\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5 \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\psi - \sigma\partial_\mu\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\pi}\partial_\mu\sigma \tag{2.83}$$

$$\boldsymbol{Q} = \int d^3x\boldsymbol{j}_0(x), \qquad \boldsymbol{Q}_5 = \int d^3x\boldsymbol{j}_{50}(x) \tag{2.84}$$

矢量流 $\boldsymbol{j}_\mu$ 正是通常的同位旋流,它是 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 群限制于 $\alpha_L = \alpha_R$ 所得到的子群 SU(2)的守恒流。$\boldsymbol{Q}$ 正是场的同位旋。由式(2.10)、(2.11)及(2.76)知道

$$[Q^i, Q^j] = i\varepsilon_{ijk}Q^k \tag{2.85}$$

$$-i[\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{\pi}] = \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\pi}, \qquad -i[\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{Q}, \sigma] = 0 \tag{2.86}$$

$$-i[\boldsymbol{\alpha}_5\cdot\boldsymbol{Q}_5, \boldsymbol{\pi}] = \alpha_5\sigma, \qquad -i[\boldsymbol{\alpha}_5\cdot\boldsymbol{Q}_5, \sigma] = -\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi} \tag{2.87}$$

式(2.86)表示 $\boldsymbol{\pi}$ 的同位旋为 1,$\sigma$ 的同位旋为零。

这个模型的标量场部分与前面讨论 O($N$)模型在 $N=4$ 时一样。这是由于 SU(2)×SU(2)群与 O(4)群是局部同构的。在 $v^2<0$ 时

$$\langle\sigma\rangle_0 = \langle\boldsymbol{\pi}\rangle_0 = 0$$

$SU(2)_L \times SU(2)_R$ 对称不破缺。$\sigma$ 与 $\boldsymbol{\pi}$ 具有相同的质量

$$m_\sigma^2 = m_\pi^2 = -\lambda v^2 \tag{2.88}$$

而 Fermi 子 $p, n$ 的质量保持为零。

在 $v^2>0$ 时，由以前的结果知道，在微扰论最低阶

$$\langle\sigma\rangle_0 = v \tag{2.89}$$

这时 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 对称自发破缺。但是由于 $\sigma$ 在同位旋 SU(2)下不变，同位旋对称还是保持了的。引入真空平均值为零的新场 $\sigma'$

$$\sigma = \sigma' + v \tag{2.90}$$

将 $\sigma'$ 改写为 $\sigma$，拉氏量密度式(2.70)可写为

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &- \bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu + m_N)\psi - g\bar{\psi}(\sigma + \mathrm{i}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\pi}\gamma_5)\psi \\ &- \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma\partial_\mu\sigma + m_\sigma^2\sigma^2) - \frac{1}{2}\partial_\mu\boldsymbol{\pi}\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\pi} \\ &- \lambda(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)^2 - 4v\sigma(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)\end{aligned} \tag{2.91}$$

其中

$$m_N = gv, \qquad m_\sigma^2 = 8\lambda v \tag{2.92}$$

由式(2.91)和(2.92)可以看到，核子得到质量 $m_N$，$\sigma$ 和 $\boldsymbol{\pi}$ 不再具有相同的质量。因此这些公式明显地表示，$SU(2)_L \times SU(2)_R$ 对称性被破坏了。由式(2.91)还可以明显地看到，同位旋 SU(2)对称性没有破坏。式(2.91)表示 $m_\pi=0$，由前面对 O($N$)标量场理论的一般讨论知道，$\boldsymbol{\pi}$ 是 Goldstone 粒子。用新的 $\sigma$ 场表示，式(2.83)中的轴矢流可改写为

$$\boldsymbol{j}_{5\mu} = \mathrm{i}\bar{\psi}_\mu\gamma_5\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\psi - (v + \sigma)\partial_\mu\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\pi}\partial_\mu\sigma \tag{2.93}$$

因此在微扰论最低阶

$$\langle\pi^k(q)|j_{5\mu}^i(0)|0\rangle = \mathrm{i}q_\mu v\delta_{ik} \neq 0 \tag{2.94}$$

这与 Goldstone 定理的式(2.33)相符。

实验上 $\pi$ 介子具有不等于零但比其他介子轻得多的质量。对这个现象的理论解释[6]是，$\pi$ 介子相应于 Goldstone 粒子，但是拉氏量只有近似的 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 对称性，它含有小的明显破坏对称性的项。这时轴矢流不严格守恒，$\pi$ 介子得到一个小的质量 $m_\pi$。考虑矩阵元

$$\langle 0|j_{5\mu}^i(0)|\pi^k(q)\rangle = \delta_{ik}\mathrm{i}f_\pi q_u \tag{2.95}$$

由于 Goldstone 粒子与破缺的流耦合，$f_\pi\neq0$，它是与 $\pi$ 介子衰变有关的常数。设 $\boldsymbol{P}$ 是总动量算符，由

$$\partial_\mu j_{5\mu}^i = -\mathrm{i}[P, j_{5\mu}^i]$$

及 $q^2=-m_\pi^2$ 得

$$\langle 0|\partial_\mu j_{5\mu}^i(0)|\pi^k(q)\rangle = f_\pi m_\pi^2\delta_{ik}$$

因此关于流守恒破坏的最简单假设是

$$\partial_\mu j^i_{5\mu} = f_\pi m_\pi^2 \pi^i \tag{2.96}$$

式(2.96)称为轴矢流部分守恒(PCAC),是 Nambu 和周光召等首先提出的[6,7]。这一段的讨论是基于拉氏量的 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 近似对称性及对称性自发破缺等一般理论,不限于具体的模型。

一般来说,设

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_s + \mathscr{L}' \tag{2.97}$$

其中,$\mathscr{L}_s$ 在内部对称群

$$\varphi_l \rightarrow \varphi_l + \delta\varphi_l = \varphi_l - \mathrm{i}\varepsilon^i T_i \varphi_l$$

下不变。为了简单设 $\mathscr{L}'$ 不含 $\varphi_l$ 的微商。由式(2.17)得到

$$\delta S = \int \mathrm{d}^4 x \left[ \left( \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_l} - \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_l)} \right) \delta\varphi_l + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_l)} \delta\varphi_l \right) \right] = \int \mathrm{d}^4 x \frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial \varphi} \delta\varphi \tag{2.98}$$

由上式得到流

$$j^i_\mu = -\mathrm{i} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} T_i \varphi$$

的散度方程

$$\partial_\mu j^i_\mu = \frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial \varphi} T^i \varphi \tag{2.99}$$

要构造一个满足式(2.96)的模型,只需把拉氏量密度取为

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_s + c\sigma \tag{2.100}$$

其中,$\mathscr{L}_s$ 是式(2.70)的右方,它在 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 变换下是不变的。对于式(2.100)的具体情况,在考虑了式(2.76)以后,式(2.99)化为

$$\partial_\mu j^i_\mu = -c\pi^i \tag{2.101}$$

上式确实有式(2.96)的形式。式(2.100)中的势能项

$$V(\sigma, \boldsymbol{\pi}) = -\frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2 - v^2)^2 + c\sigma$$

的极小在 $\sigma = \sigma_0$ 处,它满足

$$c = -\lambda v^2 \sigma_0 + \lambda \sigma_0^3 \tag{2.102}$$

重新定义 $\sigma$ 场,令 $\sigma \rightarrow \sigma + \sigma_0$,则由 $V(\sigma, \pi)$ 中的二次项得到 $\pi$ 的质量,为

$$m_\pi^2 = \lambda(\sigma_0^2 - v^2) \tag{2.103}$$

$$m_\sigma^2 = \lambda(3\sigma_0^2 - v^2) \tag{2.104}$$

比较式(2.102)和(2.103),得到

$$m_\pi^2 \sigma_0 = c \tag{2.105}$$

比较式(2.96)、(2.101)及上式,得

$$f_\pi = -\sigma_0 \tag{2.106}$$

由式(2.105)、(2.106)及(2.102)可以看到,在 $c \to 0$ 时,$m_\pi^2 \to 0$,但是 $\sigma_0 = -f_\pi \to v \neq 0$。这时理论回到对称性纯粹是自发破缺的情况。

建筑在 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 流的对易关系及 PCAC 上的流代数理论相当好地解释了和这些流及 π 介子有关的低能现象。因此人们相信自发破缺又带有小的明显破缺的 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 对称性是一个正确的观念。但是正如层子模型的观念那样,现在人们相信核子和 π 介子都是复合粒子。因此只能把 σ 模型看作一种低能有效理论。造成这个对称性自发破缺的基本原因还要从下一个层次的夸克相互作用中去寻找。

以上讨论的由于标量场的真空平均值产生对称性自发破缺的例子对弱电统一模型是很有用的。但是对称性的自发破缺不一定来自一个基本场的真空平均值,也可能来自一个复合场的真空平均值。例如,设 $\psi$ 为 Dirac 场,$T$ 为一个矩阵,$\bar{\psi}(x)T\psi(x)$在群 $G$ 下不是不变的,则它的真空平均值

$$\langle \bar{\psi} T \psi \rangle_0 \neq 0$$

就意味着对称群 $G$ 的自发破缺。对任何在群 $G$ 下非不变的复合场 $C(x)$ 也是一样。这一点已包含在前面 Goldstone 定理的一般形式中了。在这种情况下不需要引进基本标量场,因此也不需要参数 $\lambda$ 和 $\mu^2$ 及放入 $\mu^2<0$ 的条件,复合场平均值为零是由于相互作用引起正反 Fermi 子对在真空中凝聚。这时 Goldstone 粒子也是由正反 Fermi 子对组成的复合粒子。这一点可以由 Goldstone 定理看出来。设

$$[Q^i, O(x)] = C(x)$$

这意味着 $O(x)$和 $C(x)$在内部对称群的同一个不可约表示中,因此 $O(x)$显然也是一个复合场。由式(2.33)知道 Goldstone 粒子与复合场 $O(x)$相耦合。事实上式(2.33)中的矩阵元$\langle 0|O(x)|G\rangle$正是复合 Goldstone 粒子的 Bethe-Salpeter 波函数。复合场的真空平均值产生的对称性破缺称为对称性的动力学自发破缺。由于这种理论包含的基本场及参数更少,它更有吸引力。Nambu 和 Jona-Lasinio 的模型[2]是一个 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 对称动力学破缺的例子。在把强子作为由规范作用结合起来的夸克复合态来描述的量子色动力学中,人们也用这种观点解释 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 对称性的破缺。

## 2.3 Higgs 机制

由于不需要在拉氏量中引进明显破坏对称性的项和相应的参数,对称性自发

破缺的理论在理论上很有吸引力。但是 Goldstone 定理断言,这种理论中一定包含零质量的自旋为零的粒子。这样的粒子实验上从未发现。虽然人们相信,强作用中手征对称性 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 是一个近似的自发破缺对称性,Goldstone 定理似乎使得严格的自发破缺对称性难以描述自然界。另一方面我们记得在规范理论中也有一个规范粒子质量似乎为零的问题。有趣的是,在把规范场的概念与对称性自发破缺的概念结合在一个理论中时,这两个问题同时解决了。这就是本节中要叙述的 Higgs 机制。最早讨论 Higgs 机制的文献是[8]~[11]。从 Goldstone 定理的角度来看,虽然这个定理是在非常普遍的条件下证明的,仍然有避免困难的回旋余地。在相对论协变的场论中它要求的零质量态可以是不可观察的非物理态。此外,在非协变的场论中,如果有长程力,这个定理就可以不成立。规范场理论正好是这种情况。

我们以复标量场 $\varphi$ 的 U(1)规范理论为例来说明这一点。这种理论的经典拉氏量密度为

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &-(\partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu)\varphi^*(\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu)\varphi - \mu^2\varphi^*\varphi \\ &- \lambda(\varphi^*\varphi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{2.107}$$

这个理论在规范变换

$$\phi(x) \to \exp(-\mathrm{i}\alpha(x))\varphi(x), \qquad A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$$

下不变。电荷密度为

$$j_0 = -\mathrm{i}(\pi\varphi - \pi^*\varphi^*) = -\mathrm{i}(\dot{\varphi}^* + ieA_0\varphi^*)\varphi + \mathrm{c.c.} \tag{2.108}$$

量子化以后由正则对易关系得

$$[j_0(y), \varphi(x)]_{x_0=y_0} = -\delta^3(x-y)\varphi(x) \tag{2.109}$$

在 $\mu^2>0$ 时,这是标准的标量电动力学。在 $\mu^2<0$ 时,U(1)对称性自发破缺。

我们知道,量子化的理论必须取规范条件。如果取相对论协变的规范条件,理论中必然包含非物理的态。在通常所用的 Lorentz 条件$\partial_\mu A_\mu=0$ 下,理论中还容许如下的规范变换

$$\phi(x) \to \exp(-\mathrm{i}\Lambda(x))\phi(x)$$

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x)$$

其中,$\Lambda(x)$满足条件

$$\Box\Lambda(x) = 0$$

因此,$\Lambda(x)$是零质量场。可以验证 $\Lambda|0\rangle$是 Goldstone 定理所要求的零质量态。但它代表规范变换自由度,所以不相应于可以观测的物理粒子。如果取非协变的规范条件,则 Goldstone 定理可能不成立。例如,在辐射规范条件

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}(x) = 0 \tag{2.110}$$

下，此时 $A_0(x)$不是独立的动力学变量。由 Gauss 定律可以得到

$$A_0(\boldsymbol{x}, t) = \frac{e}{4\pi}\int \frac{\mathrm{d}^3 x' j_0(\boldsymbol{x}', t)}{|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|} \tag{2.111}$$

由式(2.108)和(2.111)知道，由于 $j_0$ 与 $A_0$ 有关，$j_0$ 不是定域场算符，并且这种由相互作用产生的非定域项是长程性质的(只与$|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}|$的一次方成反比)。这时极限式(2.23)

$$\lim_{V\to\infty}\int_V [j_0(y), \varphi(x)]\mathrm{d}^3 y$$

与 $y_0$ 有关，而在 $y_0 \neq x_0$ 时，它可能不存在[由式(2.109) $y_0 = x_0$ 时极限 $= -1$]。Goldstone 定理不适用于这种情况。以后我们可以看到非 Abel 规范场的量子理论的情况是相似的。

现在我们就拉氏量密度式(2.107)所描述的标量场规范理论来说明 Higgs 机制[8~10]。复标量场 $\phi$ 可写为

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + \mathrm{i}\phi_2)$$

在 $\mu^2 < 0$ 时就标量场部分而言，它是 2.2 节中讨论的 O($N$)模型在 $N = 2$ 时的特例。由那里的讨论知道，标量场真空平均值不为零。在微扰论最低阶，它的值为

$$\langle\varphi\rangle_0 = \frac{v}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} \tag{2.112}$$

因此，U(1)对称性自发破缺。类似于式(2.50)，我们可将 $\varphi(x)$写为

$$\varphi(x) = \exp(\mathrm{i}\theta(x)/v)\frac{1}{\sqrt{2}}[v + \rho(x)] \tag{2.113}$$

当没有规范场和 $\varphi$ 耦合时，我们知道拉氏量中不含 $\theta^2(x)$项，因此 $\theta(x)$场是无质量的 Goldstone 场。现在的情况就不同了。将式(2.113)代入式(2.107)，得到

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu\rho\partial_\mu\rho + \mu^2\rho^2 \\ &- \frac{1}{2}\partial_\mu\theta\partial_\mu\theta - \frac{1}{2}e^2v^2A_\mu A_\mu + evA_\mu\partial_\mu\theta \\ &+ \text{场的三次以上的项}\end{aligned} \tag{2.114}$$

上式中用了式(2.112)。由上式知道，$\rho$ 的质量在微扰论最低阶为

$$m_\rho = \sqrt{-2\mu^2} \tag{2.115}$$

但是，由于场的二次项中包含 $A_\mu$ 和 $\theta$ 的混合项，我们不能立刻写出其余粒子的质

量。要知道这些质量,需要把场的二次项对角化,为此引入场

$$B_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{ev}\partial_\mu\theta(x) \tag{2.116}$$

由于上式具有规范变换的形式,因此有

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \tag{2.117}$$

由式(2.116)及(2.117),可将式(2.114)写为

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &-\frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) - \frac{1}{2}e^2 v^2 B_\mu B_\mu \\ &- \frac{1}{2}\partial_\mu\rho\partial_\mu\rho + \mu^2\rho^2 + \text{场的三次以上的项}\end{aligned} \tag{2.118}$$

上式的二次项中不包含不同场的混合项。它清楚地代表一个质量为式(2.115)的标量场 $\rho$ 和一个质量为

$$m_B = ev \tag{2.119}$$

的矢量场 $B_\mu$。

原来的 Goldstone 场 $\theta(x)$在式(2.118)中消失了。但是场的自由度并没有减少。在耦合常数 $e$ 为零时,理论中有两个实标量场 $\rho,\theta$ 和一个质量为零的矢量场 $A_\mu$。零质量矢量场只有相应于横波的两个极化,因此对于给定动量的场只有四个物理的自由度。在引入耦合常数 $e$ 后,由式(2.118)描述的理论中,一个 Goldstone 粒子 $\theta$ 消失了,但是由于有质量的矢量场 $B_\mu$ 多一个相应于纵波的极化,给定动量的场仍旧有四个物理自由度。由式(2.116)可以清楚地看到,原来的 Goldstone 粒子变成了有质量的矢量场 $B_\mu$ 的纵向分量。Goldstone 粒子的消失是与规范粒子得到质量同时发生的,因此我们可以同时解决两个困扰人的问题。这就是 Higgs 机制。

为了将 $\mathscr{L}$ 写为更简单的形式,便于推广到非 Abel 规范场的情形,我们可以在做替换式(2.113)以后再通过下式做标量场的替换

$$\phi'(x) = \exp(-\mathrm{i}\theta(x)/v)\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \rho(x)] \tag{2.120}$$

式(2.120)和(2.116)合起来构成一个规范变换。由于拉氏量密度式(2.107)在规范变换下是不变的,我们可以将它改写为

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &-\frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) \\ &- \frac{1}{2}(\partial_\mu + \mathrm{i}eB_\mu)(v + \rho(x)) \cdot (\partial_\mu - \mathrm{i}eB_\mu) \\ &\times (v + \rho(x)) - \frac{1}{2}\mu^2(v + \rho(x))^2\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{4}\lambda(v+\rho(x))^4 \tag{2.121}$$

上式又可以写为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=&-\frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu)(\partial_\mu B_\nu-\partial_\nu B_\mu)\\&-\frac{1}{2}e^2v^2B_\mu B_\mu-\frac{1}{2}\partial_\mu\rho\partial_\mu\rho-\lambda v^2\rho^2-\lambda v\rho^3-\frac{1}{4}\lambda\rho^4\\&-e^2vB_\mu B_\mu\rho-\frac{1}{2}e^2B_\mu B_\mu\rho^2\end{aligned} \tag{2.122}$$

由上式可以看到，在规范条件式(2.120)下拉氏量不含两种场混合的二次项，它不包含多余的非物理的场。由这个拉氏量导出的微扰论明显地具有幺正性，因为只有非物理的态才有可能导致物理过程 $S$ 矩阵非幺正。在自发破缺的规范场理论中能够保证拉氏量中出现的场都相应于物理的粒子的规范条件称为幺正规范。$B_\mu$ 场具有质量，它的传播子的形式为

$$-\mathrm{i}\left(\delta_{\mu\nu}+\frac{k_\mu k_\nu}{m_B^2}\right)\Big/(k^2+m_B^2) \tag{2.123}$$

由于上式分子上的$\dfrac{k_\mu k_\nu}{m_B^2}$项，由拉氏量式(2.122)导出的微扰论不是明显可重整的(参看 5.1 节)。

以上讨论可以推广到非 Abel 规范理论[12,13]。不失一般性，可以设理论中有实标量场 $\varphi_l(x)(l=1,2,\cdots,N)$，它们构成紧致群 $G$ 的$N$ 维表示(不一定是不可约的)，标量场 $\varphi_l(x)$与群 $G$ 的规范场$A_\mu^i(i=1,2,\cdots,r_G)$作用。规范不变的拉氏量为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=&-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^iF_{\mu\nu}^i-\frac{1}{2}(\partial_\mu-\mathrm{i}g^iA_\mu^iT_i)\varphi\\&\times(\partial_\mu-\mathrm{i}g^iA_\mu^iT_i)\varphi-V(\varphi)\end{aligned} \tag{2.124}$$

其中，$T_i$ 为群$G$ 的生成元在实标量场$\varphi_l$ 所属的表示中的矩阵，因此 $T_i$ 是纯虚的反对称矩阵。耦合常数 $g^i$ 在一个单纯子群的内部与$i$ 无关。$V(\varphi)$是在群 $G$ 下不变的四阶多项式。

现在设 $\varphi$ 场的真空平均值$\langle\varphi\rangle_0=\varphi_0\neq0$，把这里的 $\varphi_0$ 看作 $N$ 维内部空间中的一个矢量。在微扰论最低阶，$\varphi_0$ 对应着 $V(\varphi)$的一个极小值。设群 $G$ 有一个子群$H$ 是保持真空平均值$\langle\varphi\rangle_0$ 不变的小群，它的生成元

$$t_i=T_{r_G-r_H+i}\qquad(i=1,2,\cdots,r_H)$$

满足方程式

$$t_i\varphi_0 = 0 \tag{2.125}$$

群 $G$ 的其余 $r_G - r_H$ 个生成元 $T_i(i=1,2,\cdots,r_G-r_H)$不满足式(2.125)。在 2.2 节中已证明 $T_i\varphi_0(i=1,2,\cdots,r_G)$张成 $r_G-r_H$ 维线性空间，并且在没有规范场时，理论中有 $r_G-r_H$ 个零质量 Goldstone 粒子。

现在我们将 $\varphi(x)$场写为

$$\varphi(x) = \exp\Big(\sum_{i=1}^{r_G-r_H} \mathrm{i}\theta_i(x)T_i\Big)(\varphi_0+\rho(x)) \tag{2.126}$$

注意，只有不属于小群 $H$ 的生成元的 $T_i$ 进入式(2.126)。对在 2.2 节中讨论的 O($N$)对称性模型，我们已经知道，任意的 $\varphi(x)$都能用式(2.50)表示，它是式(2.126)的一个特例。我们将在后面证明，对一般的紧致群，任意的 $\varphi(x)$也能表为式(2.126)，其中 $\rho(x)$是 $N$ 维空间中一个与 $T_i\varphi_0(i=1,\cdots,r_G-r_H)$正交的矢量，即

$$(T_i\varphi_0,\rho(x)) = 0 \tag{2.127}$$

由此知道，$\rho(x)$的独立分量的个数是 $N-(r_G-r_H)$，式(2.126)中的独立场量的个数仍旧是 $N$。由 $t_i$ 的反对称性及式(2.125)和(2.127)得到

$$(T_i\varphi_0,t_i\rho(x)) = -(t_iT_j\varphi_0,\rho) = ([T_i,t_j]\varphi_0,\rho) = 0$$
$$j = 1,2,\cdots,r_H \tag{2.128}$$

因此，满足式(2.127)的 $\rho(x)$构成小群 $H$ 的表示空间。

接着我们做如下的规范变换

$$\varphi' = \exp\Big(-\mathrm{i}\sum_i\theta_iT_i\Big)\varphi = \varphi_0+\rho \tag{2.129}$$

$$g^jA'^j_\mu T_j = \exp\Big(-\mathrm{i}\sum_i\theta_iT_i\Big)g^jA^j_\mu T_j\exp\Big(\mathrm{i}\sum_i\theta_iT_i\Big)$$
$$-\mathrm{i}\partial_\mu\exp\Big(-\mathrm{i}\sum_i\theta_iT_i\Big)\cdot\exp\Big(\mathrm{i}\sum_i\theta_iT_i\Big) \tag{2.130}$$

由拉氏量式(2.124)的规范不变性知道，在做了规范变换使式(2.129)满足后，拉氏量密度可写为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^i_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu - \mathrm{i}g^iT_iA^i_\mu)(\varphi_0+\rho)$$
$$\cdot(\partial_\mu - \mathrm{i}g^iT_iA^i_\mu)(\varphi_0+\rho) - V(\varphi_0+\rho) \tag{2.131}$$

由于式(2.127)，式(2.131)中两种场的混合项 $A_\mu\partial_\mu\rho$ 为零。由此得到

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^i_{\mu\nu} - \frac{1}{2}M^2_{ij}A^i_\mu A^j_\mu$$
$$-\frac{1}{2}(\partial_\mu - \mathrm{i}g^iT_iA^i_\mu)\rho\cdot(\partial_\mu - \mathrm{i}g^iT_iA^i_\mu)\rho$$

$$- V(\varphi_0 + \rho) + g^i g^j (T_i \varphi_0, T_{j\rho}) A_\mu^i A_\mu^j \tag{2.132}$$

其中

$$M_{ij}^2 = - g^i g^j (T_i \varphi_0, T_j \varphi_0) = g^i g^j (\varphi_0, T_i T_j \varphi_0)$$
$$i, j = 1, 2, \cdots, r_G - r_H \tag{2.133}$$

$(M_{ij}^2)$的其余元素为 0,上式中用了 $T_i$ 的反对称性。$(M_{ij}^2)$构成对称的矩阵,因此它可以通过正交变换对角化。由于 $T_i$ 是纯虚的,所以$(M_{ij}^2)$是正定的。

由式(2.132)可以看到,$r_G - r_H$ 个原来的 Goldstone 场 $\theta_i$ 消失了。与此同时,$r_G - r_H$ 个规范场$A_\mu^i$($i = 1, 2, \cdots, r_G - r_H$)得到了质量,其余 $r_H$ 个子群$H$ 的规范场仍旧是无质量的。得到质量的规范场相应于陪集 $G/H$ 的生成元。这就是 Kibble 首先得到的关于规范对称性自发破缺的一般定理的内容[12]。由式(2.130)可得

$$A_\mu'^i = A_\mu^i - \frac{1}{g^i}\partial_\mu \theta^i + \theta^2 \text{ 项}, \qquad i = 1, 2, \cdots, r_G - r_H \tag{2.134}$$

上式表示原来的 $r_G - r_H$ 个 Goldstone 场变成了 $r_G - r_H$ 个有质量矢量场的纵波。因此场的物理自由度并没有改变。

以上的讨论只准确到微扰论的最低阶。但是所得到的 Kibble 定理对量子场论的任意阶都是正确的。要证明这一点,只需要用泛函形式中的有效作用量代替经典作用量 $S = \int d^4 x \mathscr{L}$。

在式(2.129)和(2.127)所确定的规范条件下,拉氏量中不含两种场混合的二次项。此拉氏量中没有多余的场,除了没有破缺的子群的规范场的纵波部分外,所有的场都相应于物理的粒子。因此它是自发破缺非 Abel 规范场的幺正规范。与通常加在规范势 $A_\mu$ 上的规范条件不同,幺正规范是加在标量场上的条件。注意,幺正规范条件没有规定未破缺的子群 $H$ 的规范。

我们现在来证明,如果规范对称群 $G$ 是紧致的,则幺正规范总是存在的[14]。群 $G$ 的任意元素$g$ 都可以表示为子群$H$ 的元素$h$ 和陪集的元素的积

$$g(x) = \exp\left(-\mathrm{i}\sum_i \theta^i(x) T_i\right) h(x)$$
$$i = 1, 2, \cdots, r_G - r_H \tag{2.135}$$

记住

$$h\phi_0 = \varphi_0 \tag{2.136}$$

我们已经由式(2.128)知道,满足式(2.127)的 $\rho(x)$所张成的线性空间在子群 $H$ 下不变,因此只须证明,总存在一个属于群 $G$ 的规范变换$D(x)$,使

$$\varphi'(x) = D(x)\varphi(x) = \varphi_0 + \rho(x) \tag{2.137}$$

其中,$\rho(x)$满足式(2.127)。由 $T_i$ 的反对称性

$$(T_i\varphi_0,\varphi_0)=0 \tag{2.138}$$

为满足式(2.127),只需要求

$$(T_i\varphi_0,\varphi'(x))=(T_i\varphi_0,D(x)\varphi(x))=0 \tag{2.139}$$

考虑标积

$$(\varphi_0,D(x)\varphi(x)) \tag{2.140}$$

对固定点 $x$,$D(x)$是群 $G$ 的元素的表示,它依赖于群参数 $\alpha^i(x)$,$D(x)\equiv D(\alpha^i(x))$。由于我们用的是实表示,$D(\alpha^i)$是一个正交变换矩阵。在给定 $\varphi_0$ 和 $\varphi(x)$以后,标积式(2.140)是 $\alpha^i$ 的有界实函数

$$f(\alpha^i)\equiv(\varphi_0,D(x)\varphi(x))\leqslant|\varphi_0|\cdot|\varphi(x)| \tag{2.141}$$

因此,如果群 $G$ 是紧致的,$f(\alpha^i)$是把有界和闭的群参数空间映到实轴上的一个有界线段的解析函数。这样的函数必然有极大和极小,极大和极小点在有界和闭的群参数空间内。对参数 $\alpha^i$ 的无穷小改变

$$\begin{aligned}\delta_\varepsilon D(x)&=\exp(-\mathrm{i}\varepsilon^i(x)T_i)D(x)-D(x)\\&=-\mathrm{i}\varepsilon^i(x)T_iD(x)\end{aligned} \tag{2.142}$$

设 $D_0(x)$是使标积式(2.140)取极值的 $D(x)$矩阵,则

$$\delta_\varepsilon(\varphi_0,D(x)\varphi(x))_{D(x)=D_0(x)}=0 \tag{2.143}$$

因此

$$(\varphi_0,T_iD_0(x)\varphi(x))=-(T_i\varphi_0,D_0(x)\varphi(x))=0 \tag{2.144}$$

这表示 $D_0$ 是满足式(2.139)的规范变换。以上证明了,总是存在幺正规范,它可以由任意的 $\varphi(x)$在每一点做规范变换 $D(x)$并要求$(\varphi_0,D(x)\varphi(x))$取极值而得到。极大值和极小值都可以用,它们都导致同样形式的拉氏量式(2.132),因此物理上是等价的。

正像整体对称性一样,规范对称性的破缺也可以有动力学的方式,这时得到破缺对称性的真空平均值的场不是基本的标量场而是复合场。我们可以用更一般的方式讨论规范对称性的自发破缺。对 U(1)规范场,全传播子为一系列包含不同数目的真空极化部分的图形之和。由于流守恒,真空极化张量取如下的形式

$$\begin{aligned}i\Pi_{\mu\nu}&=g^2\int\langle 0|T(j_\mu(x)j_\nu(0))|0\rangle\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}^4x\\&=\mathrm{i}(k^2\delta_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu)\Pi(k^2)\end{aligned} \tag{2.145}$$

因此规范场全传播子可写为

$$
(D'_{F\mu\nu}(h) = -\mathrm{i}\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{1}{k^2(1+\Pi(k^2))+\mathrm{i}\varepsilon}
$$

$$
+ k_\mu k_\nu \text{ 项} = D^{T\prime}_{F\mu\nu}(h) + k_\mu k_\nu \text{ 项} \tag{2.146}
$$

其中，$D^{T\prime}_{F\mu\nu}$ 为规范场全传播子的横向部分，满足

$$
k_\mu D^{T\prime}_{F\mu\nu} = 0 \tag{2.147}
$$

裸传播子 $D_{F\mu\nu}$ 的横向部分为

$$
D^T_{F\mu\nu}(k) = -\mathrm{i}\frac{\delta_{\mu\nu} - \dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon} \tag{2.148}
$$

由于流守恒，规范场传播子的纵向部分保持裸传播子的值，不受真空极化部分的影响。由式(2.146)可以看到，如果 $\Pi(k^2)$在 $k^2=0$ 处有一个极点，则规范场将得到质量。现在我们在相对论协变的规范条件下讨论对称性的自发破缺。这时 Goldstone 定理可以应用。因此如果有任何一个在对称群 $G$ 下非不变的算符 $O$(可以是复合算符)的真空平均值不为零

$$
\langle O\rangle_0 \neq 0 \tag{2.149}
$$

则理论中一定存在零质量的 Goldstone 态 $|G\rangle$使

$$
\langle 0|j_\mu(0)|G(k)\rangle = \mathrm{i}f_G k_\mu \neq 0 \tag{2.150}
$$

利用

$$
j_\mu(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathscr{P}x} j_\mu(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathscr{P}x}
$$

(其中，$\mathscr{P}_\mu$ 为场的动量算符)及式(2.150)可将 Goldstone 态$|G\rangle$对真空极化张量的贡献写为

$$
\int\frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3 2\omega'}\Big(\int_0^\infty \mathrm{d}x_0\int \mathrm{d}^3x\langle 0|j_\mu(x)|k'\rangle\langle k'|j_\nu(0)|0\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}
$$

$$
+\int_{-\infty}^0 \mathrm{d}x_0\int \mathrm{d}^3x\langle 0|j_\nu(0)|k'\rangle\langle k'|j_\mu(x)|0\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\Big)
$$

$$
= f_G^2\frac{k_\mu k_\nu}{2\omega_k}\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0-\omega_k+\mathrm{i}\varepsilon)x_0}\mathrm{d}x_0 + \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0+\omega_k-\mathrm{i}\varepsilon)x_0}\mathrm{d}x_0\right)
$$

$$
= f_G^2\frac{k_\mu k_\nu}{2\omega_k}\left(\frac{-\mathrm{i}}{k_0-\omega_k+\mathrm{i}\varepsilon} + \frac{-\mathrm{i}}{k_0+\omega_k-\mathrm{i}\varepsilon}\right)
$$

$$
= -\mathrm{i}f_G^2\frac{k_\mu k_\nu}{k^2+i\varepsilon k_0} = -\mathrm{i}f_G^2\frac{k_\mu k_\nu}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon} \tag{2.151}
$$

由于流守恒，理论中一定还有一项 $\mathrm{i}\delta_{\mu\nu}f_G^2$，它和式(2.151)结合得到 $\Pi_{\mu\nu}$中的一项

$$
\Pi_{\mu\nu}(k^2) = (k^2\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu)\frac{g^2 f_G^2}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon} + \cdots \tag{2.152}
$$

由上式看到 $\Pi(k^2)$在 $k^2=0$ 处有极点。上式与式(2.140)结合,得到规范场的质量

$$M^2 = g^2 f_G^2 \tag{2.153}$$

我们还没有研究非 Abel 规范场的量子化。但是,实际上,对于这里讨论的问题,非 Abel 规范场的情况是相似的。对非 Abel 规范理论,式(2.146)中的 $D'_{F\mu\nu}$ 和 $\Pi(k^2)$一般应看作矩阵,其矩阵元$(D'_{F\mu\nu})_{ij}$和$(\Pi)_{ij}$的指标$(i,j=1,2,\cdots,r_G-r_H)$相应于破缺的生成元 $T_i$,而式(2.150)应改写为

$$\langle 0|j_\mu^i(0)|G_l(k)\rangle = \mathrm{i}(T_i f)_l k_\mu \qquad i = 1,2,\cdots,r_G - r_H \tag{2.154}$$

其中,$f$ 是一个矢量。这时代替式(2.153),我们得到规范粒子的质量矩阵元

$$M_{ij}^2 = g^i g^j (f, T_i T_j f) \tag{2.155}$$

如果在基本标量场的理论中

$$f = \phi_0 \text{ 或 } -\phi_0 \tag{2.156}$$

则式(2.155)与(2.133)重合。式(2.156)与 2.2 节中的式(2.57)及(2.106)一致。

## 参 考 文 献


1 J Goldstone. Nuov Cim. 1961,19:154

2 Y Nambu and G Jona-Lasinio. Phys Rev. 1961,122:345;1961,124:246

3 J Goldstone, A Salam and S Weinberg. Phys Rev. 1962, 127:965

4 G S Guralnik, C R Hagen and T W Kibble. in “Advances in Particle Physics”. edited by R L Cool and R E Marshak, New York:Inter-Science, 1968

5 S Coleman. J Math Phys. 1966,7:787

6 M Gell-Mann and M Lévy. Nuovo Cimento, 1960,16:705; Y Nambu. Phys Rev Lett. 1960,4:380

7 Y Nambu and G Jona-Lasinio. Phys Rev. 1961,122:345;Chou Kuang-chao(周光召). JETP, 1961,12:492

8 P W Higgs. Phys Lett. 1964,12:132;F Englert and R Brout. Phys Rev Lett. 1964,13:321

9 P W Higgs. Phys Rev Lett. 1964,13:508

10 G S Guralnik, C R Hagen and T W B Kibble. Phys Rev Lett. 1964,13:585

11 P W Higgs. Phys Rev. 1966,145:1156

12 T W Kibble. Phys Rev. 1967,155:1554

13 E S Abers and B W Lee. Phys Reports. 1973,9C:1

14 S Weinberg. Phys Rev. 1973,D7:1068

# 第三章　泛函积分(路径积分)方法

量子力学和量子场论的泛函积分(或称路径积分)表述形式的原始思想来自Dirac的一篇文章[1]。Feynman的工作[2]奠定了这个理论形式的基础。在文献[2],[3]中以概率振幅的路径积分形式作为出发点表述了量子力学的形式体系。量子场论的泛函积分形式在文献[4],[5]中有很好的叙述。泛函积分形式近年来在量子力学,特别是量子场论中得到广泛的应用,由它得到不少重要的结果。在本章中将由量子力学和量子场论的通常的算符形式出发推导出一些重要的泛函积分公式,这些公式是本书需要的。

## 3.1　量子力学问题

为了叙述的方便,我们首先讨论量子力学一维问题。设 $\hat{q}(t)$为 Heisenberg 图像中 $t$ 时刻的广义坐标算符,$\hat{p}(t)$为与其共轭的正则动量算符。又设$|q,t\rangle$为 Heisenberg 图像中算符 $\hat{q}(t)$的本征态,其本征值为 $q$,即

$$\hat{q}(t)|q,t\rangle = q|q,t\rangle \tag{3.1}$$

注意,Heisenberg 图像中的态矢量是不随时间改变的,这里记号$|q,t\rangle$中的 $t$ 只是表示它是$t$ 时刻的算符 $\hat{q}(t)$的本征态。

先考虑哈密顿算符 $\hat{H}$不显含时间的情况。这时由 Heisenberg 运动方程得到

$$\hat{q}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}(t-t_0)}\hat{q}(t_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}(t-t_0)} \tag{3.2}$$

令$|q\rangle \equiv |q,t_0\rangle$,即

$$\hat{q}(t_0)|q\rangle = q|q\rangle \tag{3.3}$$

由(3.2)和(3.3)两式得到,两个不同的 Heisenberg 态矢$|q,t\rangle$及$|q\rangle$之间存在如下的幺正变换关系

$$|q,t\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}(t-t_0)}|q\rangle \tag{3.4}$$

这时,变换矩阵元$\langle q',t'|q,t\rangle$可写为

$$\langle q',t'|q,t\rangle = \langle q'|\exp\{-\mathrm{i}\hat{H}(t'-t)\}|q\rangle \tag{3.5}$$

在哈密顿算符 $H(\hat{p}(t),\hat{q}(t),t)$可显含时间的一般情况下,两个时刻 $t$ 及 $t_0$ 的算符 $\hat{O}(t)$及 $\hat{O}(t_0)$仍以幺正变换联系,这里 $\hat{O}$是 $\hat{q}$,$\hat{p}$或它们的函数,不明显依赖于时间。这是因为

$$[\hat{q}(t),\hat{p}(t)] = [\hat{q}(t_0),\hat{p}(t_0)] = \mathrm{i}$$

满足相同的正则对易关系。我们把这个幺正变换写成如下的形式

$$\hat{O}(t) = (U(t,t_0))^{\dagger}\hat{O}(t_0)U(t,t_0) \tag{3.2'}$$

令 $\hat{O}\equiv\hat{O}(t_0)$，$|q\rangle\equiv|q,t_0\rangle$，则由式(3.2′)有

$$|q,t\rangle = (U(t,t_0))^{\dagger}|q\rangle \tag{3.4)'}$$

$$\langle q',t'|q,t\rangle = \langle q'|U(t',t_0)(U(t,t_0))^{\dagger}|q\rangle \tag{3.6}$$

由式(3.2′)及 Heisenberg 运动方程可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(t,t_0) = -\mathrm{i}H(\hat{p},\hat{q},t)U(t,t_0) \tag{3.7}$$

上式中 $\hat{p}\equiv\hat{p}(t_0)$，$\hat{q}\equiv\hat{q}(t_0)$。注意到在 $\hat{H}(t)$ 显含时间的情况下不同时刻的 $\hat{H}$ 一般并不对易，式(3.7)的解应写成如下的无穷乘积的形式

$$\begin{aligned}U(t,t_0) = \lim_{t_j-t_{j-1}\to 0}&[1-\mathrm{i}(t_N-t_{N-1})H(\hat{p},\hat{q},t_N)]\\&\times[1-\mathrm{i}(t_{N-1}-t_{N-2})H(\hat{p},\hat{q},t_{N-1})]\times\cdots\\&\times[1-\mathrm{i}(t_1-t_0)H(\hat{p},\hat{q},t_0)]\end{aligned}$$

其中，$t_j>t_{j-1}$，$t_N=t$。上式可简记为

$$U(t,t_0) = T\exp\left\{-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}H(\hat{p},\hat{q},\tau)\mathrm{d}\tau\right\} \tag{3.8}$$

其中，$T$ 表示编时乘积。将式(3.8)代入式(3.6)就得到

$$\langle q',t'|q,t\rangle = \langle q'|U(t',t)|q\rangle \tag{3.9}$$

其中

$$U(t',t) = T\exp\left\{-\mathrm{i}\int_{t}^{t'}H(\hat{p},\hat{q},\tau)\mathrm{d}\tau\right\} \tag{3.10}$$

变换矩阵元 $\langle q',t'|q,t\rangle$ 表示在 $t$ 时刻坐标测量值为 $q$，在 $t'$ 时刻坐标测量值为 $q'$ 的概率振幅，它在量子力学中是很基本的。下面将把它表示成泛函积分的形式。把时间区间 $[t',t]$ 分成 $N$ 个相等的小区间，并令 $t_j-t_{j-1}=\varepsilon$，$t_0\equiv t$，$t_N\equiv t'$。式(3.5)或(3.10)都可写为

$$U(t',t) = \lim_{N\to\infty}\prod_{j=1}^{N}(1-\mathrm{i}\varepsilon H(\hat{p},\hat{q},t_j)) \tag{3.11}$$

自然，在 $\hat{H}$ 不显含时间的情况下，式(3.11)右方的 $t_j$ 可省去。在式(3.11)右方的乘积中插入 $N-1$ 个因子 $\int\mathrm{d}q_j|q_j\rangle\langle q_j|=1$ $(j=1,2,\cdots,N-1)$，并代入式(3.9)就得到

$$\langle q',t'|q,t\rangle = \lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N}\langle q_j|(1-\mathrm{i}\varepsilon H(\hat{p},\hat{q},t_j))|q_{j-1}\rangle\times\prod_{k=1}^{N-1}\mathrm{d}q_k \quad (3.12)$$

在简单的情况下，$\hat{H}$具有如下的形式

$$H(\hat{p},\hat{q},t) = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + V(\hat{q},t) \quad (3.13)$$

动量算符 $\hat{p}$在 $q$ 表象中的形式可取为

$$\langle q'|\hat{p}|q\rangle = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\delta(q-q') \quad (3.14)$$

这时动量算符 $\hat{p}$的本征态$|p\rangle$的波函数为

$$\langle q|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}pq} \quad (3.15)$$

由式(3.15)可得

$$\begin{aligned}&\langle q_j|(1-\mathrm{i}\varepsilon H(\hat{p},\hat{q},t_j))|q_{j-1}\rangle\\&=\int\mathrm{d}p_j\langle q_j\mid p_j\rangle\times\left\langle p_j\left|-\mathrm{i}\varepsilon\frac{\hat{p}^2}{2m}\right|q_{j-1}\right\rangle+\langle q_j|(1-\mathrm{i}\varepsilon V(\hat{q},t_j))|q_{j-1}\rangle\\&=\int\frac{\mathrm{d}p_j}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_j(q_j-q_{j-1})}\left[1-\frac{1}{2}\mathrm{i}\varepsilon[H(p_j,q_{j-1},t_j)+H(p_j,q_j,t_j)]\right]\end{aligned}$$

因此得到

$$\begin{aligned}\langle q_j|(1-\mathrm{i}\varepsilon H(\hat{p},\hat{q},t_j))|q_{j-1}\rangle\simeq\int\frac{\mathrm{d}p_j}{2\pi}\exp\mathrm{i}\Big\{&p_j(q_j-q_{j-1})\\&-\frac{\varepsilon}{2}[H(p_j,q_{j-1},t_j)+H(p_j,q_j,t_j)]\Big\}\end{aligned} \quad (3.16)$$

在上式中我们把 $H$ 项写成$q_j$ 和$q_{j-1}$对称的形式。对于这里所考虑的式(3.13)中的哈密顿算符的情况，用 $H(p_j,q_j,t_j)$或 $H(p_j,q_{j-1},t_j)$代替它们的平均值，结果是一样的。将式(3.16)代入式(3.12)就得到

$$\begin{aligned}\langle q',t'|q,t\rangle=\lim_{N\to\infty}\int\prod_{k=1}^{N-1}\mathrm{d}q_k\prod_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}p_i}{2\pi}\exp\Big\{\mathrm{i}\sum_{j=1}^{N}\times[&p_j(q_j-q_{j-1})\\&-\varepsilon\overline{H}(p_j,q_j,t_j)]\Big\}\end{aligned} \quad (3.17)$$

这里，$\overline{H}(p_j,q_j,t_j)=\frac{1}{2}[H(p_j,q_j,t_j)+H(p_j,q_{j-1},t_j)]$。可以引入函数 $p(t)$和$q(t)$，使 $p(t_j)=p_j$，$q(t_j)=q_j$。$(p(t),q(t))$确定经典相空间中的一条轨道。又令

$$\dot{q}(t_j) = \frac{q(t_j)-q(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}$$

则式(3.17)可简记为

$$\langle q',t'|q,t\rangle = \int_q^{q'}[\mathrm{d}q(\tau)]\int[\mathrm{d}p(\tau)]\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_t^{t'}[p(\tau)\dot{q}(\tau) - H(p(\tau),q(\tau),\tau)\mathrm{d}\tau\right\} \tag{3.18}$$

其中

$$\int[\mathrm{d}q(\tau)] = \prod_{j=1}^{N-1}\mathrm{d}q(\tau_j)$$

$$\int[\mathrm{d}p(\tau)] = \prod_{j=1}^{N}\frac{\mathrm{d}p(\tau_j)}{2\pi\hbar}$$

这里,我们补上了省略的 $\hbar$ 因子。式(3.18)中的积分是无穷维的,变量是两个函数 $q(\tau)$和 $p(\tau)$,所以称为泛函积分。这个泛函积分的确切定义是由式(3.17)右方给出的。它是所有在 $t$ 时刻坐标为 $q$,在 $t'$时刻坐标为 $q'$的相空间中的轨道 $(p(\tau),q(\tau))$的贡献之和,所以也称为路径积分。注意,在式(3.17)中对 $p$ 的积分比对 $q$ 的积分多一个,对 $p_N$ 没有限制。

以上泛函积分公式的推导是由式(3.13)中的哈密顿算符出发的,现在我们来讨论较一般的情况。设经典拉氏函数有如下形式

$$L(\dot{q},q) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - f_0(q,t) - \dot{q}f_1(q,t) \tag{3.19}$$

其中,$\dot{q} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$,则由 $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$得到经典哈氏函数为

$$H(p,q) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{p}{m}V_1(q,t) + V_0(q,t) \tag{3.20}$$

其中,$V_1 = f_1$,$V_0 = f_0 + \frac{f_1^2}{2m}$。在写出与上式相应的量子力学哈密顿算符 $\hat{H}$时,对 $V_1$ 项有算符次序的问题。但是由 $\hat{H}$的厄米性及对易关系$[\hat{q},\hat{p}] = \mathrm{i}$不难证明,$\hat{H}$总可写成如下的形式

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2m}\hat{p}\ V_1(\hat{q},t) + \frac{1}{2m}V_1(\hat{q},t)\hat{p} + V_0(\hat{q},t) \tag{3.21}$$

利用等式

$$\langle q_j|\hat{p}\ V_1(\hat{q})|q_{j-1}\rangle = \int\frac{\mathrm{d}p_j}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_j(q_j-q_{j-1})}p_jV_1(q_{j-1})$$

$$\langle q_j|V_1(\hat{q})\hat{p}|q_{j-1}\rangle = \int\frac{\mathrm{d}p_j}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_j(q_j-q_{j-1})}V_1(q_j)p_j$$

可知式(3.16)仍旧成立,因此式(3.18)也仍旧成立。与式(3.13)中的哈氏算符不

同,对现在考虑的情况,式(3.16)右方 $H$ 项中对 $q_j$ 和 $q_{j-1}$ 的对称化是必要的。

在更复杂的情况下,$H$ 中 $p^2$ 项的系数也依赖于 $q$。这时,不同的算符顺序给出不同的物理结果。

现在回到 $\hat{H}$ 有式(3.13)的形式的情况。式(3.17)中对 $p_i$ 的积分可以积出来,利用 Gauss 积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}p_j}{2\pi\hbar}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[p_j(q_j-q_{j-1})-\frac{\varepsilon}{2m}p_j^2\right]\right\}=\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\mathrm{i}\varepsilon}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\varepsilon\frac{m}{2}\dot{q}_j^2\right) \tag{3.22}$$

式(3.17)可化为

$$\langle q',t'|q,t\rangle=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{m}{2\pi\mathrm{i}\varepsilon\hbar}\right]^{\frac{1}{2}}\int\prod_{i=1}^{N-1}\frac{\mathrm{d}q_i}{[2\pi\hbar\mathrm{i}\varepsilon/m]^{\frac{1}{2}}}$$
$$\times\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\sum_{j=1}^{N}\varepsilon\cdot\left[\frac{m}{2}\left(\frac{q_j-q_{j-1}}{\varepsilon}\right)^2-\overline{V}(q_j)\right]\right\} \tag{3.23}$$

由于 $\varepsilon\to0$ 时积分集中在 $q_j-q_{j-1}=O(\sqrt{\varepsilon})$ 的区域,上式中的 $\overline{V}(q)$ 可换为 $V[(q_j+q_{j-1})/2]$,引起的误差为 $O(N\varepsilon^{3/2})=O(\sqrt{\varepsilon})\to0$。因此上式可简记为

$$\langle q',t'|q,t\rangle=\left[\frac{m}{2\pi\mathrm{i}\varepsilon\hbar}\right]^{\frac{1}{2}}\int_q^{q'}[\mathrm{d}q(\tau)]\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_t^{t'}L(q(\tau),\dot{q}(\tau)\mathrm{d}\tau)\right\}$$
$$=\left[\frac{m}{2\pi\mathrm{i}\varepsilon\hbar}\right]^{\frac{1}{2}}\int_q^{q'}[\mathrm{d}q(\tau)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}/\hbar S[q(\tau)]} \tag{3.24}$$

其中

$$[\mathrm{d}q(\tau)]=\prod_{i=1}^{N-1}\cdot\frac{\mathrm{d}q_i}{[2\pi\hbar\mathrm{i}\varepsilon/m]^{\frac{1}{2}}}.$$

$$L=\frac{m}{2}\dot{q}^2-V(q)$$

为经典拉氏函数,$S[q(\tau)]$ 为联接 $q(t)'=q'$,$q(t)=q$ 两点的轨道 $q(\tau)$ 的经典作用量,它是 $q(\tau)$ 的泛函。式(3.23)是坐标空间中的泛函积分。它告诉我们,量子力学的概率振幅 $\langle q',t'|q,t\rangle$ 是坐标空间中所有联接 $q(t')=q'$,$q(t)=q$ 两点的轨道 $q(\tau)$ 的贡献的叠加,每个轨道的贡献振幅相同而位相为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}S[q(\tau)]}$。因此,这个公式有相当直观的意义。

由相似的计算可以证明,在拉氏函数有式(3.19)的形式时,式(3.24)仍旧成立,只是要记住,$L(q,\dot{q})$ 在区间 $(q_j,q_{j-1})$ 内应取平均值 $\frac{1}{2}[L(q_j,\dot{q}_j)+L(q_{j-1},\dot{q}_j)]$。它可以换成 $L\left(\frac{q_j+q_{j-1}}{2},\dot{q}_j\right)$ 这是因为它们的 $\dot{q}_j$ 的一次项是相同的,而

$\frac{1}{2}[V(q_j)+V(q_{j-1})]$可以换成 $V\left(\frac{q_j+q_{j-1}}{2}\right)$。

以上叙述的泛函积分理论形式可以直接推广到多自由度的情况。在有 $n$ 个自由度时,令 $q=(q^{(1)},q^{(2)},\cdots,q^{(n)})$为 $n$ 维坐标矢量。设拉氏函数为

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^a M_{ab}\dot{q}^b + f^a(q)\dot{q}^a - V(q) \tag{3.19'}$$

则正则动量为

$$p^a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} = M_{ab}\dot{q}^b + f^a(q)$$

上式可写成矩阵形式

$$p = M\dot{q} + f$$

因此如果 $M$ 是一个非奇异矩阵,它的逆矩阵 $M^{-1}$存在,则哈密顿算符可写为

$$\hat{H}(p,q) = \frac{1}{2}(\hat{p}-f)^{\mathrm{T}}M^{-1}(\hat{p}-\hat{f}) + V(\hat{q}) \tag{3.21'}$$

其中,上标 T 表示矩阵的转置。与式(3.18)相似,不难得到

$$\langle q',t'|q,t\rangle = \int_q^{q'}[\mathrm{d}q(\tau)][\mathrm{d}p(\tau)]$$

$$\times \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_t^{t'}[p^{\mathrm{T}}(\tau)\dot{q}(\tau) - H(p(\tau),q(\tau))]\mathrm{d}\tau\right\} \tag{3.18'}$$

上式中

$$[\mathrm{d}q(\tau)] = \prod_{a=1}^{n}\prod_{i=1}^{N-1}\mathrm{d}q_j^a, \qquad [\mathrm{d}p(\tau)] = \prod_{a=1}^{n}\prod_{i=1}^{N}\frac{\mathrm{d}p_j^a}{2\pi\hbar}$$

$$H(p(\tau),q(\tau)) \equiv \overline{H}(p_j,q_j) = H\left(p_j,\frac{q_j+q_{j-1}}{2}\right)$$

在式(3.18′)中先做对 $p$ 的积分,用变数替换 $p\to p+\bar{f}\to p+M\dot{q}+\bar{f}$ 及高斯积分公式

$$\int\prod_a \frac{\mathrm{d}p^a}{(2\pi\hbar)^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\mathrm{i}\frac{\varepsilon}{2\hbar}p^{\mathrm{T}}M^{-1}p\right\} = (\mathrm{i}\varepsilon)^{-\frac{n}{2}}(\det M)^{\frac{1}{2}} \tag{3.22'}$$

得到

$$\int\prod_a \frac{\mathrm{d}p^a}{2\pi\hbar}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\varepsilon(p^{\mathrm{T}}\dot{q} - \overline{H})\right\}$$

$$= \int\prod_a \frac{\mathrm{d}p^a}{2\pi\hbar}\times\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\varepsilon\left[(p^{\mathrm{T}}\dot{q}) - \frac{1}{2}(p-\bar{f})^{\mathrm{T}}M^{-1}(p-\bar{f}) - \overline{V}\right]\right\}$$

$$= \int\prod_a \frac{\mathrm{d}p^a}{2\pi\hbar}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\varepsilon\left(\bar{f}^{\mathrm{T}}\dot{q} + p^{\mathrm{T}}\dot{q} - \frac{1}{2}p^{\mathrm{T}}M^{-1}p - \overline{V}\right)\right\}$$

$$= (\det M)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(2\pi \mathrm{i} \hbar \varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{ \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \varepsilon \left( \bar{f}^{\mathrm{T}} \dot{q} + \frac{1}{2} \times \dot{q}^{\mathrm{T}} M \dot{q} - \bar{V} \right) \right\}$$

$$= (\det M)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(2\pi \mathrm{i} \hbar \varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \exp\left( \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \varepsilon \bar{L} \right)$$

因此式(3.24)推广为

$$\langle q', t' | q, t \rangle = (\det M)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(2\pi \mathrm{i} \hbar \varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \int_q^{q'} [\mathrm{d}q] \times \exp\left\{ \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \int_t^{t'} L(q(\tau), \dot{q}(\tau), \tau) \mathrm{d}\tau \right\} \tag{3.25}$$

上式中

$$[\mathrm{d}q(\tau)] = \prod_{j=1}^{N-1} (\det M)^{\frac{1}{2}} \prod_{a=1}^{n} \frac{\mathrm{d}q_j^a}{(2\pi \mathrm{i} \hbar \varepsilon)^{\frac{1}{2}}}$$

式(3.25)是 Feynman 原来所用的形式。他以式(3.25)作为量子力学的基本假设，由它推出 Schödinger 方程和通常量子力学的算符表述形式[2,3]。我们在上面的表述中是沿着相反方向做的。

在更复杂的情况下，$\hat{H}$中的矩阵 $M$ 依赖于 $q$，$M = M(q)$。在用曲线坐标描述粒子运动时就发生这种情况。在 $M$ 与 $q$ 有关时不同的算符顺序给出不同的物理结果，在泛函形式中，这相应于 $H(p, q, t)$在区间$(q_j, q_{j-1})$内不同的平均值。要消除这个不唯一性必须引入附加的物理原则，例如对单粒子在三维平直空间内的外场中的运动，用直角坐标写出的哈密顿算符没有算符次序的问题，在球坐标下$\hat{H}$的表示式是由直角坐标下 $\hat{H}$的形式做变换确定的。对一般的曲线坐标下路径积分的形式有兴趣的读者可参看文献[6]。如果我们把哈密顿算符中 $\hat{p}$的二次项的顺序取为

$$\frac{1}{8} (\hat{p}^a \hat{p}^b M_{ab}^{-1}(\hat{q}) + 2 \hat{p}_j^{\ a} M_{ab}^{-1} \hat{p}^b + M_{ab}^{-1}(\hat{q}) \hat{p}^a \hat{q}^b)$$

则不难得到

$$\langle q', t' \mid q, t \rangle = \lim_{N \to \infty} [\det \bar{M}(q')]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(2\pi \mathrm{i} \hbar \varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \int \prod_{i=1}^{N-1} \times [\det \bar{M}(q_i)]^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot \prod_{a=1}^{n} \frac{\mathrm{d}q_i^a}{(2\pi \hbar \mathrm{i} \varepsilon)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{ \int \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \varepsilon \sum_j \bar{L}(q_j, \dot{q}_j) \right\}$$

$$\bar{L}(q_j, \dot{q}_j) = L\left( \frac{q_j + q_{j-1}}{2}, \dot{q}_j \right) \tag{3.26}$$

利用公式

$$\prod_j [\det \bar{M}(q_j)]^{\frac{1}{2}} = \exp\left[ \frac{1}{2} \sum_j \ln \det \bar{M}(q_j) \right]$$

$$\varepsilon \to 0 \text{ 时} \qquad \sum_j \to \delta(0)\int \mathrm{d}t$$

可将式(3.26)写为

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \lim_{N\to\infty} [\det M(q')]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(2\pi \mathrm{i}\hbar\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \int_q^{q'} [\mathrm{d}q(\tau)] \cdot \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_t^{t'} \mathrm{d}\tau L_{\mathrm{eff}}(q(\tau), \dot{q}(\tau))\right\}$$

$$L_{\mathrm{eff}} = L + \frac{\hbar}{2\mathrm{i}}\delta(0)\ln\det M(q) \tag{3.26'}$$

上式中,$[\mathrm{d}q(\tau)] = \prod_{i,a} \frac{\mathrm{d}q_i^a}{(2\pi \mathrm{i}\hbar\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}$。这个结果是文献[7]中得到的。式(3.26′)中的奇异项 $\delta(0)$ 并不会引起发散,在计算时要回到式(3.26),所得的结果是有限的。式(3.26)对 $q$ 和 $q'$ 表面上有一点不对称,这是由于定义 $\bar{L}(\dot{q}_j, q_j)$ 对初态和末态有一个不对称,实际的结果是对称的。

泛函积分式(3.26)对少数简单的情况可以严格地积出来。最简单的情况是自由运动的粒子。这时依次完成对 $q_1, q_2, \cdots, q_{N-1}$ 的 Gauss 型积分不难证明

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \left[\frac{2\pi \mathrm{i}(t'-t)}{m}\right]^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{\mathrm{i}m}{2(t'-t)} \times (q'-q)^2\right] \tag{3.27}$$

我们再来考虑在与时间有关的外力 $J(t)$ 作用下的谐振子的例子。这时哈密顿函数和拉氏函数分别为(取 $m=1$)

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) - J(t)q$$

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) + J(t)q \tag{3.28}$$

由式(3.23)

$$\begin{aligned}\langle q', t' | q, t \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \mathrm{i}\varepsilon}} \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=1}^{N-1} \frac{\mathrm{d}q_j}{(2\pi \mathrm{i}\varepsilon)^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad \times \exp\left\{\sum_{j=1}^{N} \frac{\mathrm{i}\varepsilon}{2}\left[\frac{(q_j - q_{j-1})^2}{\varepsilon^2} - \omega^2 q_{j-1}^2 + 2J(\tau_j)q_j\right]\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \mathrm{i}\varepsilon}} \lim_{N\to\infty} \int \prod_{i=1}^{N-1} \frac{\mathrm{d}q_i}{(2\pi \mathrm{i}\varepsilon)^{\frac{1}{2}}} \times \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{2\varepsilon} \cdot [\underline{q}^{\mathrm{T}} M \underline{q} \right. \\ &\quad \left. + (1 - \omega^2\varepsilon^2) q_0^2 + q_N^2 + 2(\varepsilon^2 \underline{J}^T - \underline{A}^{\mathrm{T}})\underline{q}]\right\}\end{aligned} \tag{3.29}$$

上式中,$q_0 = q$, $q_N = q'$

$$\underline{q}=\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N-1} \end{pmatrix}, \qquad \underline{J}=\begin{pmatrix} J(\tau_1) \\ J(\tau_2) \\ \vdots \\ J(\tau_{N-1}) \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}=\begin{pmatrix} q_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q_N \end{pmatrix}$$

它们都是 $N-1$ 行一列矩阵，$\underline{q}^{\mathrm{T}}, \underline{J}^{\mathrm{T}}, \underline{A}^{\mathrm{T}}$ 表示它们的转置。$M$ 是 $N-1$ 行 $N-1$ 列方矩阵

$$M_{i,j-1}=M_{j,j+1}=-1, \qquad M_{j,j}=2-\omega^2\varepsilon^2$$

$$j=1,2,\cdots,N-1$$

$M$ 的其他元素为零。做替换

$$\underline{q} \to \underline{q}-M^{-1}(\varepsilon^2\underline{J}-\underline{A})$$

并利用 Gauss 积分公式

$$\int\prod_{i=1}^{N-1}\frac{\mathrm{d}q_i}{(2\pi\mathrm{i}\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{\mathrm{i}\frac{1}{2\varepsilon}\underline{q}^{\mathrm{T}}M\underline{q}\right\}=(\det M)^{-\frac{1}{2}} \tag{3.30}$$

得到

$$\begin{aligned}\langle q',t'|q,t\rangle=&\sqrt{\frac{1}{2\pi\mathrm{i}\varepsilon}}\lim_{N\to\infty}(\det M)^{-\frac{1}{2}}\\&\times\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{2\varepsilon}[(1-\omega^2\varepsilon^2)q_0^2+q_N^2-(M^{-1})_{11}q_0^2\right.\\&+(M^{-1})_{N-1,N-1}q_N^2+2(M^{-1})_{1,N-1}q_0q_N+2\varepsilon^2J_i\\&\left.\times(M^{-1})_{ij}A_j-\varepsilon^4J_i(M^{-1})_{ij}J_j]\right\}\end{aligned} \tag{3.31}$$

引入 $k$ 行 $k$ 列矩阵 $M_k$

$$M_k=(2-\omega^2\varepsilon^2)^k M_k'$$

其中

$$M_k' = \begin{vmatrix} 1 & -s & 0 & 0 & \cdots & & & & \\ -s & 1 & -s & 0 & \cdots & & & & \\ 0 & -s & 1 & -s & 0\cdots & & & & \\ & & & & \vdots & & & & \\ & & & & & 0 & -s & 1 & -s \\ & & & & & 0 & 0 & -s & 1 \end{vmatrix} \tag{3.32}$$

$$s = \frac{1}{2 - \omega^2 \varepsilon^2}$$

注意,$M_{N-1} = M$。又令

$$D_k = \det M_k'$$

它满足迭代关系

$$D_k = D_{k-1} - s^2 D_{k-2}, \qquad D_0 = D_1 = 1 \tag{3.33}$$

式(3.33)可以用如下的形式解出

$$\begin{pmatrix} D_k \\ D_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -s^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

上式中的矩阵有如下两个本征矢量

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \lambda^* \\ 1 \end{pmatrix}$$

分别相应于本征值 $\lambda$ 及 $\lambda^*$,其中

$$\lambda = \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{4s^2 - 1}}{2} \tag{3.35}$$

利用公式

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1 - \lambda^*}{\lambda - \lambda^*} \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1 - \lambda}{\lambda - \lambda^*} \begin{pmatrix} \lambda^* \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{\lambda - \lambda^*} \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\lambda^*}{\lambda - \lambda^*} \begin{pmatrix} \lambda^* \\ 1 \end{pmatrix}$$

由式(3.34)得到

$$D_{k-1} = \frac{\lambda^k - (\lambda^*)^k}{\lambda - \lambda^*} \tag{3.36}$$

$\varepsilon \to 0$ 时

$$\lambda = \frac{1}{2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\varepsilon} + O(\varepsilon^2) \tag{3.37}$$

因此

$$D_{k-1} \simeq \frac{\sin \omega k \varepsilon}{2^{k-1} \omega \varepsilon} \tag{3.38}$$

由式(3.32)及(3.38)得到

$$\det M=\frac{\sin\omega t}{\omega\varepsilon}+O(\varepsilon^2)$$

$$(M^{-1})_{1,1}=(M^{-1})_{N-1,N-1}=\frac{1}{2\left(1-\frac{\omega^2\varepsilon^2}{2}\right)}\times\frac{D_{N-2}}{D_{N-1}}=1-\varepsilon\cot\omega(t'-t)+O(\varepsilon^2)$$

$$(M^{-1})_{1,N-1}=\frac{1}{2\left(1-\frac{\omega^2\varepsilon^2}{2}\right)}\cdot\frac{s^{N-2}}{D_{N-1}}=\frac{\omega\varepsilon}{\sin\omega(t'-t)}+O(\varepsilon^2)$$

$$(M^{-1})_{1,j}=(M^{-1})_{j,1}=\frac{1}{2\left(1-\frac{\omega^2\varepsilon^2}{2}\right)}\times\frac{s^{j-1}D_{N-j-1}}{D_{N-1}}=\frac{\sin[(N-j)\omega\varepsilon]}{\sin\omega(t'-t)}+O(\varepsilon^2)$$

$$\begin{aligned}(M^{-1})_{i,j}&=\frac{1}{2\left(1-\frac{\omega^2\varepsilon^2}{2}\right)}\frac{D_{i-1}D_{N-j-1}s^{j-i}}{D_{N-1}}\\&=\frac{\sin(\omega i\varepsilon)\sin[\omega(N-j)\varepsilon]}{\omega\varepsilon\sin\omega(t'-t)}+O(\varepsilon^2),\qquad j>i\end{aligned}\tag{3.39}$$

将式(3.39)代入式(3.31)并把求和号换成积分

$$\sum_i\varepsilon_i\to\int\mathrm{d}\tau$$

即得

$$\begin{aligned}\langle q',t'|q,t\rangle=&\left(\frac{\omega}{2\pi\mathrm{i}\sin\omega(t'-t)}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\mathrm{i}\\&\times\left\{\frac{\omega}{2\sin\omega(t'-t)}[(q^2+q'^2)\cdot\cos\omega(t'-t)-2qq']\right.\\&+\frac{q'}{\sin\omega(t'-t)}\int_t^{t'}J(\tau)\sin\omega(\tau-t)\mathrm{d}\tau\\&+\frac{q}{\sin\omega(t'-t)}\int_t^{t'}J(\tau)\sin\omega(t'-\tau)\mathrm{d}\tau\\&-\frac{1}{\omega\sin\omega(t'-t)}\int_t^{t'}\mathrm{d}\tau'\int_t^{\tau'}\mathrm{d}\tau\sin\omega(t'-\tau')\\&\left.\times\sin\omega(\tau-t)\cdot J(\tau')J(\tau)\right\}\end{aligned}\tag{3.40}$$

算符 $\hat{q}(t_1)(t'<t_1<t)$在态$\langle q',t'|$和$|q,t\rangle$间的矩阵元也可以表为泛函积分的形式。因$|q,t_1\rangle$为一组完备态,我们有

$$\langle q',t'|\hat{q}(t_1)|q,t\rangle=\iint\mathrm{d}q_i\mathrm{d}q_i'\langle q',t'|q_i',t_1\rangle\times\langle q_i',t_1|\hat{q}(t_1)|q_i,t_1\rangle$$

$$\times \langle q_i, t_1 | q, t\rangle = \int \mathrm{d}q_i \cdot q_i \langle q', t' | q_i, t_1\rangle \langle q_i, t_1 | q, t\rangle$$

利用式(3.18)将上式右方两个变换矩阵元表成泛函积分，注意到式(3.14)中对 $p$ 的积分比对 $q$ 的积分多一个就得到

$$\langle q', t' | \hat{q}(t_1) | q, t\rangle = \iint_q^{q'} [\mathrm{d}p][\mathrm{d}q] q(t_1) \times \exp\left\{ \mathrm{i}\int_t^{t'} [p\dot{q} - H(p,q)\mathrm{d}\tau] \right\} \tag{3.41}$$

在 $t < t_1 < t_2 < t'$ 时，矩阵元 $\langle q', t' | \hat{q}(t_2)\hat{q}(t_1) | q, t\rangle$ 也可以表成为泛函积分的形式

$$\langle q', t' | \hat{q}(t_2)\hat{q}(t_1) | q, t\rangle = \int \langle q', t' | q_j', t_2\rangle \langle q_j', t_2 | \hat{q}(t_2) | q_j, t_2\rangle \times \langle q_j, t_2 | q_i', t_1\rangle \langle q_i', t_1 | \hat{q}(t_1) | q_i, t_1\rangle \langle q_i, t_1 | q, t\rangle \mathrm{d}q_i \mathrm{d}q_i' \mathrm{d}q_j \mathrm{d}q_j'$$

同样，利用式(3.18)可将上式化为

$$\langle q', t' | \hat{q}(t_2)\hat{q}(t_1) | q, t\rangle = \iint_q^{q'} [\mathrm{d}p][\mathrm{d}q] q(t_2) q(t_1) \times \exp\left\{ \mathrm{i}\int_t^{t'} [p\dot{q} - H(p,q)]\mathrm{d}\tau \right\}$$

上式的推导只在 $t_2 > t_1$ 时成立，如果 $t_1 > t_2$ 则上式右方等于 $\langle q', t' | \hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2) | q, t\rangle$。因此

$$\langle q', t' | T(\hat{q}(t_2)\hat{q}(t_1)) | q, t\rangle = \iint_q^{q'} [\mathrm{d}p][\mathrm{d}q] q(t_2) q(t_1) \times \exp\left\{ \mathrm{i}\int_t^{t'} [p\dot{q} - H(p,q)]\mathrm{d}\tau \right\} \tag{3.42}$$

其中，$T$ 表示编时乘积。推广到 $k$ 个算符的乘积的情况得到

$$\langle q', t' | T(\hat{q}(t_k)\hat{q}(t_{k-1})\cdots\hat{q}(t_1)) | q, t\rangle = \iint_q^{q'} [\mathrm{d}p][\mathrm{d}q] \times q(t_k)\cdots q(t_1) \exp\left\{ \mathrm{i}\int_t^{t'} [p\dot{q} - H(p,q)]\mathrm{d}\tau \right\} \tag{3.43}$$

在式(3.43)中 $|q, t\rangle$ 和 $\langle q', t'|$ 是算符 $\hat{q}(t)$ 和 $\hat{q}(t')$ 的本征态。但是在量子力学中更有兴趣的是算符在能量的本征态，特别是基态之间的矩阵元。设此量子体系的能量本征态为 $|n\rangle$，相应于本征值 $E_n(n = 0,1,2,\cdots)$，又令

$$\phi_n(q) = \langle q | n\rangle$$

为相应的波函数。由式(3.4)及(3.42)可得算符的编时乘积在基态中的期望值

$$\langle 0 | T(\hat{q}(t_k)\cdots\hat{q}(t_1)) | 0\rangle = \iint \phi_0^*(q') \langle q', t' | T(\hat{q}(t_k)\cdots$$

$$\times \hat{q}(t_1))|q,t\rangle\phi_0(q)\mathrm{d}q\mathrm{d}q'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_0(t-t')}$$

$$= \iint \mathrm{d}q\mathrm{d}q' \iint_q^{q'} [\mathrm{d}p][\mathrm{d}q]\phi_0^*(q')q(t_k)\cdots q(t_1)$$

$$\times \exp\left\{\mathrm{i}\int_t^{t'} [p\dot{q} - H(p,q)]\mathrm{d}\tau\right\}\phi_0(q)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_0(t-t')} \tag{3.44}$$

引入

$$W[J] \equiv \lim_{\substack{t\to-\infty \\ t'\to\infty}} \langle 0 | T\left(\exp\mathrm{i}\left[\int_t^{t'} J(\tau)\hat{q}(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\right)| 0\rangle \tag{3.45}$$

由上式做泛函微商得到

$$(i)^{-k}\frac{\delta^k W[J]}{\delta J(t_1)\delta J(t_2)\cdots\delta J(t_k)}\bigg|_{J=0} = \langle 0 | T(\hat{q}(t_k)\cdots\hat{q}(t_1))| 0\rangle \tag{3.46}$$

因此，由 $W[J]$可以求出任意个 $\hat{q}$算符的编时乘积。$W[J]$称为生成泛函，它是在文献[8]中首先引入的。利用式(3.44)可将式(3.45)表成为如下的泛函积分形式

$$W[J] = \lim_{\substack{t\to-\infty \\ t'\to\infty}} \iint \mathrm{d}q\mathrm{d}q' \iint_q^{q'} [\mathrm{d}p][\mathrm{d}q]\phi_0^*(q')$$

$$\times \exp\left\{\mathrm{i}\int_t^{t'} [p\dot{q} - H(p,q) + Jq]\mathrm{d}\tau\right\}\phi_0(q)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_0(t-t')} \tag{3.47}$$

设想在哈密顿函数中附加一个外场项 $-J(t)q(t)$，总哈密顿算符变为

$$\hat{H}_J = H(\hat{p}_J,\hat{q}_J) - J(t)\hat{q}_J(t)$$

又设 $J(t)$只在有限的时间区间内不为零，在 $J(t)$引入以前和撤去以后 $\hat{H}$的基态 $|0\rangle$是定态。由式(3.47)可以看出

$$W[J] = \lim_{\substack{t\to-\infty \\ t'\to+\infty}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_0(t-t')}\iint \langle 0 | q'\rangle\langle q' | U_J(t',t) | q\rangle\langle q | 0\rangle\mathrm{d}q\mathrm{d}q' \tag{3.48}$$

其中 $U_J(t',t) = T\exp\{-\mathrm{i}\int_t^{t'} H_J(\tau)\mathrm{d}\tau\}$

因此，$W[J]$是外力 $J(t)$作用下基态到基态的跃迁振幅。这一点也可以直接由 $W[J]$的定义式(3.45)通过算符 $\hat{q}_J$ 与 $\hat{q}$之间的幺正变换证明。

式(3.47)的计算需要用基态波函数 $\phi_0(q)$，我们希望导出一个更方便的生成泛函公式，为此我们引入 $J$ 的泛函

$$F(z;q',t';q,t) = \langle q' | T\exp\left\{-\mathrm{i}\hat{H}z(t'-t) + \mathrm{i}z\int_t^{t'} J(\tau)\hat{q}(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}| q\rangle$$

设 $J(\tau)$只在$|\tau| < T$ 时不为零。在 $t' > t''' > T$ 和 $-t > -t'' > T$ 时

$$F(z;q',t';q,t) = \iint \mathrm{d}q''\mathrm{d}q'''\langle q' | \exp\{-\mathrm{i}\hat{H}z(t'-t''')\} | q'''\rangle$$

$$\times F(z;q''',t''';q'',t'')\langle q'' | \exp\{-\mathrm{i}\hat{H}z(t''-t)\} | q\rangle \tag{3.49}$$

利用能量本征态$|n\rangle$的完备性,我们有关系式

$$\langle q' \mid \exp\{-\mathrm{i}\hat{H} z(t'-t''')\} \mid q'''\rangle = \sum_n \phi_n(q')\phi_n^*(q''')\exp\{-\mathrm{i}E_n z(t'-t''')\}$$

其中,$\phi_n(q)$为能量本征态$|n\rangle$的波函数,$E_n$ 为相应的能量本征值,不妨取 $E_0=0$。设 $\mathrm{Im}z<0$,将上式代入式(3.49),两端除以 $\phi_0(q')\phi_0^*(q)$,先令 $t'\to\infty, t\to-\infty$,然后令 $t'''\to\infty, t''\to-\infty$。这时 $n\neq 0$ 项的贡献消失,得到

$$\lim_{\substack{t\to-\infty\\ t'\to\infty}} \frac{F(z;q',t';q,t)}{\phi_0(q')\phi_0^*(q)} = \lim_{\substack{t''\to-\infty\\ t'''\to\infty}} \iint \phi_0^*(q'') \times F(z;q''',t''';q'',t'')\phi_0(q'')\mathrm{d}q'''\mathrm{d}q'' \tag{3.50}$$

上式左方实际上与 $q$ 及 $q'$ 无关,$q$ 及 $q'$ 可取任何确定的值,当 $z=1-\mathrm{i}\eta, \eta\to 0+$ 时式(3.50)右方趋于式(3.48)中的 $W[J]$。此时,除一个常数外,式(3.50)左方可以用泛函积分表示。把式(3.5)中的 $\hat{H}(t'-t)$ 换为 $(1-\mathrm{i}\eta)\times\left[\hat{H}\cdot(t'-t)+\int\mathrm{d}\tau J\hat{q}\right]$,由类似于由式(3.5)~(3.20)的推导可得

$$W[J] = \lim_{\eta\to 0+}\int[\mathrm{d}q]\exp\left\{\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau(1-\mathrm{i}\eta) \times\left[L\left(q,(1+\mathrm{i}\eta)\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau}\right)+J(\tau)q(\tau)\right]\right\} \tag{3.51}$$

$F(z;q',\infty;q,-\infty)$是 $z$ 的解析函数,上式表示除一个常数外,$z\to 1-\mathrm{i}0+$ 时它的边界值就是 $W[J]$。引入

$$W_E[J] = \lim_{z\to -i}\frac{F(z;q',\infty;q,-\infty)}{\phi_0(q')\phi_0^*(q)}$$

由与得到式(3.51)的类似计算不难证明

$$W_E[J] = N\int[\mathrm{d}q]\exp\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\left[-L_E\left(q,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau}\right)+J(\tau)q(\tau)\right]$$

$$L_E\left(q,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau}\right)\equiv -L\left(q,\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau}\right) \tag{3.51$'$}$$

将式(3.51′)与(3.51)比较得到

$$(-\mathrm{i})^k\left.\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(t_k)\cdots\delta J(t_1)}\right|_{J=0} = \left.\frac{\delta^n W_E[J]}{\delta J(\tau_k)\cdots\delta J(\tau_1)}\right|_{j=0,\tau_j=it_j} \tag{3.52}$$

上式右方包含把 $\tau_k$ 解析延拓到复平面上。由式(3.52)知道算符编时乘积的真空期待值$\langle 0|T(\hat{q}(t_k)\cdots\hat{q}(t_1))|0\rangle$也可用 $W_E[J]$计算,式(3.51′)不含基态波函数$\phi_0(q)$,它比式(3.47)易于计算。用相对论性理论的术语时 $W_E[J]$称为欧氏时空(虚的时间)中的生成泛函。由式(3.52)知道$\dfrac{\delta^n W_E[J]}{\delta J(\tau_k)\cdots\delta J(\tau_1)}$是把$\langle 0|T(\hat{q}(t_k)\cdots$

$\hat{q}(t_1))|0\rangle$的表示式中的 $t_i$ 由实轴沿顺时钟方向转到虚轴的结果。

仍以谐振子为例说明上述结果。先由式(3.48)求 $W[J]$。谐振子基态能量为 $E_0=\frac{1}{2}\omega$,波函数为

$$\phi_0(q) = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{1}{2}\omega q^2\right) \tag{3.53}$$

将式(3.40)及(3.53)代入式(3.48)并完成对 $q$ 及$q'$的 Gauss 型积分,就得到

$$\begin{aligned} W[J] &= \exp\left\{\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau'\int_{-\infty}^{\tau'}\mathrm{d}\tau J(\tau')\left[\frac{\mathrm{i}}{2\omega}\times\exp(-\mathrm{i}\omega(\tau'-\tau))\right]J(\tau)\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau'\times\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau J(\tau')D_F(\tau'-\tau)J(\tau)\right\} \end{aligned} \tag{3.54}$$

其中

$$D_F(t) = \frac{\mathrm{i}}{2\omega}[\theta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}+\theta(-t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}] = -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\nu}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu t}}{\nu^2-\omega^2+\mathrm{i}\varepsilon} \tag{3.55}$$

由式(3.54)及(3.46)得到

$$\langle 0 \mid T(\hat{q}(t_2)\hat{q}(t_1)) \mid 0\rangle = -\mathrm{i}D_F(t_2-t_1)$$

为 Feynman 传播子。

现在再由欧氏理论形式讨论。由式(3.51′)得到

$$W_E[J] = N\int[\mathrm{d}q]\exp\{-S_E[J]\} \tag{3.56}$$

其中

$$S_E[J] = \int L_E(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$L_E = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau}\right)^2+\frac{1}{2}\omega^2q^2-J(\tau)q(\tau) \tag{3.57}$$

式(3.56)中的边界条件可取为 $q(\tau=\pm\infty)=0$。令

$$q(\tau) = q_c(\tau)+q'(\tau)$$

则

$$\begin{aligned} S_E[q,J] &= S_E[q_c,J]+\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\delta L_E}{\delta\dot{q}}\frac{\mathrm{d}q'}{\mathrm{d}\tau}+\frac{\delta L_E}{\delta q}q'\right)_{q=q_c}\mathrm{d}\tau \\ &\quad+\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}q'}{\mathrm{d}\tau}\right)^2+\frac{\omega^2}{2}q'^2\right]\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{3.58}$$

令 $q_c(\tau)$满足边界条件 $q_c(\tau=\pm\infty)=0$ 及欧氏空间中的经典运动方程

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\delta L_E}{\delta\dot{q}(\tau)}-\frac{\delta L_E}{\delta q(\tau)}\right]_{q=q_c(\tau)} = 0 \tag{3.59}$$

则式(3.58)中 $q'$ 的一次项在部分积分后消失,因此

$$W_E[J] = N\exp\{-S_E[q_c,J]\}\int[\mathrm{d}q(\tau)]\exp\left\{-\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\dot{q}^2}{2}+\frac{\omega^2}{2}q^2\right]\mathrm{d}\tau\right\}$$

上式右方最后一个因子与 $J$ 无关。由

$$W_E[J]|_{J=0} = 1 \tag{3.60}$$

得到

$$W_E[J] = \exp\{-S_E[q_c,J]\} \tag{3.61}$$

运动方程(3.59)可写为

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}-\omega^2\right]q_c(\tau) = -J(\tau) \tag{3.62}$$

引入欧氏空间 Green 函数 $D_E(\tau)$,它满足方程

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}-\omega^2\right]D_E(\tau) = \delta(\tau) \tag{3.63}$$

及边界条件

$$\lim_{\tau\to\pm\infty}D_E(\tau) = 0$$

由此可解出

$$D_E(\tau) = -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\nu}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\tau}}{\nu^2+\omega^2} = -\frac{\mathrm{e}^{-\omega|\tau|}}{2\omega} \tag{3.64}$$

因此

$$q_c(\tau) = -\int_{-\infty}^{\infty}D_E(\tau-\tau')J(\tau')\mathrm{d}\tau' \tag{3.65}$$

将式(3.65)代入式(3.57)并部分积分,可得到

$$S_E[q_c,J] = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}J(\tau)q_c(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau'J(\tau)D_E(\tau-\tau')J(\tau') \tag{3.66}$$

将上式代入式(3.61)即得

$$W_E[J] = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau'J(\tau)D_E(\tau-\tau')J(\tau')\right\} \tag{3.67}$$

比较式(3.67)和(3.54)可以看到,$W_E[J]$确实是 $W[J]$的解析延拓,$D_E(t)$可由 $D_F(t)$把 $t$ 由实轴顺时钟地转到虚轴(同时把 $\nu$ 由实轴反时钟地转到虚轴)而得到,即

$$D_F(t) = -\mathrm{i}D_E(\mathrm{i}t) \tag{3.68}$$

由式(3.54)和(3.55)可以看出,对这里讨论的受外力作用的谐振子问题,$W[J]$可

以表示为如下的简单形式

$$W[J]=N\int[\mathrm{d}q(\tau)]\exp\left\{\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}q(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^2-\frac{1}{2}(\omega^2-\mathrm{i}\varepsilon)q^2(\tau)+J(\tau)q(\tau)\right]\mathrm{d}\tau\right\}$$

$$=N\int[\mathrm{d}q]\exp\left\{\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\left[L(\tau)+\mathrm{i}\frac{\varepsilon}{2}q^2(\tau)+J(\tau)q(\tau)\right]\mathrm{d}\tau\right\} \tag{3.69}$$

如果令 $q(\tau)=q_c(\tau)+q'(\tau)$，其中 $q_c(\tau)$满足实数时间的拉氏运动方程

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}+\omega^2-\mathrm{i}\varepsilon\right]q_c(\tau)=J(\tau) \tag{3.70}$$

按照上面计算 $W_E[J]$的步骤，即可由式(3.69)得到式(3.54)。式(3.69)是沿时间的实轴积分的。由上面的讨论可以看到，Feynman 传播子中由 $\omega^2-\mathrm{i}\varepsilon$ 规则确定的边界条件是与$W[J]$可延拓到欧氏空间相联系的。式(3.69)在推广到量子场论时很有用。

## 3.2 Bose 算符的复数表示和 Fermi 算符的反对易 c 数表示

仍旧考虑量子力学一维问题，我们将叙述泛函积分的另一种形式，这种形式较易于推广到 Fermi 算符的情况。为此，我们将采用 Fock 和 Bargman 所引入的复数表示[5,9]，代替坐标 $q$ 和动量 $p$，考虑复变数

$$z=\frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q+\mathrm{i}p),\qquad z^*=\frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q-\mathrm{i}p) \tag{3.71}$$

其中，$\omega$ 为任意常数，对谐振子的情况，即取 $\omega$ 为谐振子的频率。

与 $z$ 及$z^*$对应的算符分别用 $\hat{a}$和 $\hat{a}^\dagger$ 代表，$\hat{a}$和 $\hat{a}^\dagger$ 互为共轭，由正则对易关系知道它们满足对易关系

$$[\hat{a},\hat{a}^\dagger]=1,\qquad[\hat{a},\hat{a}]=[\hat{a}^\dagger,\hat{a}^\dagger]=0 \tag{3.72}$$

我们以 $z^*$ 的解析函数 $f(z^*)$表征一个态矢，并将此态矢记为$|f\rangle$。算符 $\hat{a}$，$\hat{a}^\dagger$ 表示为

$$\hat{a}^\dagger=z^*,\qquad \hat{a}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^*}$$

即

$$\hat{a}^\dagger|f\rangle=|z^*f\rangle,\qquad \hat{a}|f\rangle=\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^*}f\right\rangle \tag{3.73}$$

式(3.73)满足对易关系式(3.72)。在此表示下，为满足 $\hat{a}$和 $\hat{a}^\dagger$ 互为共轭的条件，要适当定义两个态矢的内积。这个定义可取为

$$\langle g \mid f \rangle = \int g(z^*)^* f(z^*) \mathrm{e}^{-z^* z} \frac{\mathrm{d}z^* \mathrm{d}z}{2\pi \mathrm{i}} \tag{3.74}$$

其中，$z = x + \mathrm{i}y$，把积分式(3.74)理解为 $xy$ 平面上的积分，把积分测度理解为

$$\frac{\mathrm{d}z^* \mathrm{d}z}{2\pi \mathrm{i}} = \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi} = \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{2\pi} \tag{3.75}$$

利用解析函数的 Cauchy-Riemann 条件

$$\frac{\mathrm{d}f(z^*)}{\mathrm{d}z} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}g(z^*)^*}{\mathrm{d}z^*} = 0$$

由式(3.74)可以得到

$$\begin{aligned} \langle g \mid z^* f \rangle &= \int g(z^*)^* z^* f(z^*) \mathrm{e}^{-z^* z} \frac{\mathrm{d}z^* \mathrm{d}z}{2\pi \mathrm{i}} \\ &= -\int g(z^*)^* f(z^*) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \mathrm{e}^{-z^* z} \frac{\mathrm{d}z \mathrm{d}z^*}{2\pi \mathrm{i}} \\ &= \int \left( \frac{\mathrm{d}g(z^*)}{\mathrm{d}z^*} \right)^* f(z^*) \mathrm{e}^{-z^* z} \frac{\mathrm{d}z^* \mathrm{d}z}{2\pi \mathrm{i}} \\ &= \left\langle \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}z^*} \middle| f \right\rangle \end{aligned} \tag{3.76}$$

相似地有

$$\left\langle g \middle| \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z^*} \right\rangle = \langle z^* g \mid f \rangle \tag{3.76'}$$

因此 $z^*$ 和 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^*}$ 在此内积下互为共轭。

考虑算符 $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$。在谐振子情况下，$\hat{n}$ 就是占有数算符。在 Fock-Bargman 表示中

$$\hat{n} = z^* \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^*} \tag{3.77}$$

令其相应于本征值 $n$ 的本征态为 $| f_n \rangle$，即

$$\hat{n} | f_n \rangle = \left| z^* \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^*} f_n \right\rangle = n | f_n \rangle$$

显然

$$f_n(z^*) = \frac{(z^*)^n}{\sqrt{n!}} \tag{3.78}$$

在式(3.74)中定义的内积条件下，$f_n(z^*)$ 为正交归一的。事实上，用复 $z$ 平面的极坐标 $z = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 可得

$$\langle f_m \mid f_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \int (z)^m (z^*)^n \mathrm{e}^{-z^* z} \frac{\mathrm{d}z^* \mathrm{d}z}{2\pi \mathrm{i}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \rho \mathrm{d}\rho \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \rho^{n+m} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(m-n)} \mathrm{e}^{-\rho^2} = \delta_{mn} \tag{3.79}$$

因此$|f_n\rangle$为一组正交完备基。

现在来考虑一般算符$\hat{A}$的表示。$\hat{A}$可以表示成为如下的以$|f_n\rangle$为基的矩阵形式

$$\hat{A} = \sum_{n,m} |f_m\rangle A_{mn} \langle f_n| \tag{3.80}$$

由式(3.80)及(3.74)和(3.78)得到

$$\hat{A}|f\rangle = \sum_n \hat{A}|f_n\rangle\langle f_n|f\rangle = \sum_n A_{mn}\langle f_n|f\rangle|f_m\rangle$$

$$= \sum_n A_{mn} \int \frac{1}{\sqrt{n!}} (z')^n f(z^{*\prime}) \mathrm{e}^{-z'z^{*\prime}} \times \frac{\mathrm{d}z' \mathrm{d}z^{*\prime}}{2\pi \mathrm{i}} |f_m\rangle$$

因此,表征态矢$\hat{A}|f\rangle$的函数为

$$(\hat{A} f)(z^*) = \int A(z^*, z') f(z^{*\prime}) \mathrm{e}^{-z'z^*} \frac{\mathrm{d}z' \mathrm{d}z^*}{2\pi \mathrm{i}} \tag{3.81}$$

其中

$$A(z^* z') = \sum_{m,n} \frac{1}{\sqrt{n!}\sqrt{m!}} A_{mn} (z^*)^m (z')^n \tag{3.82}$$

$A(z_1^* z')$称为写成矩阵形式的算符$\hat{A}$的核。由式(3.81)可得两个算符乘积$\hat{A} = \hat{A}_1 \hat{A}_2$的核

$$A(z^* z) = \int A_1(z^*, \zeta) A_2(\zeta^*, z') \mathrm{e}^{-\zeta^* \zeta} \frac{\mathrm{d}\zeta^* \mathrm{d}\zeta}{2\pi \mathrm{i}} \tag{3.83}$$

$A(z^*, z')$是两个独立的复变数$z^*$和$z'$的解析函数。

一般的算符$\hat{A}$也可以表成如下的正规乘积形式

$$\hat{A} = \sum_{n,m} K_{mn} (\hat{a}^\dagger)^m (\hat{a})^n \tag{3.84}$$

其中,$\hat{a}^\dagger$算符都排在$\hat{a}$算符的左边。引入两个独立复变数$z', z^*$的函数$K(z^*, z')$

$$K(z^*, z') = \sum_{m,n} K_{mn} (z^*)^m z'^n \tag{3.85}$$

我们来证明,核$A(z^*, z')$与$K(z^*, z')$满足关系

$$A(z^*, z') = \mathrm{e}^{z^* z'} K(z^*, z') \tag{3.86}$$

先考虑

$$\hat{A} = (\hat{a}^{\dagger})^k (\hat{a})^l \tag{3.87}$$

的情况,此时

$$K(z^* z') = (z^*)^k (z')^l \tag{3.88}$$

由式(3.73)、(3.74)及(3.76)可得

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \langle f_m \mid \hat{A} \mid f_n \rangle = \left\langle \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^{*k}} f_m \middle| \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}z^{*l}} f_n \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{m!}\sqrt{n!}} \int \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}(z^m) \cdot \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}z^{*l}}(z^*)^n \times \mathrm{e}^{-z^* z} \frac{\mathrm{d}z^* \mathrm{d}z}{2\pi \mathrm{i}} \\ &= \begin{cases} \sqrt{\dfrac{n!}{(n-l)!}} \sqrt{\dfrac{m!}{(m-k)!}} \times \delta_{m-k,n-l}, & \text{当 } m \geqslant k, n \geqslant l \\ 0, & \text{当 } n < l \text{ 或 } m < k \end{cases} \end{aligned} \tag{3.89}$$

因此

$$\begin{aligned} A(z^*, z') &= \sum_{nm} A_{mn} \frac{(z^*)^m}{\sqrt{m!}} \frac{(z')^n}{\sqrt{n!}} \\ &= (z^*)^k (z')^l \sum_j \frac{(z^*)^j (z')^j}{j!} \\ &= (z^*)^k (z')^l \mathrm{e}^{z^* z'} \end{aligned}$$

此即式(3.86)。一般的算符 $\hat{A}$ 可表示成式(3.87)形式的算符之和,因此式(3.86)在一般情况下也成立。

现在求算符 $\hat{U} = T \exp\left\{-\mathrm{i}\int_t^{t'} \hat{H}(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}$ 的核,这里哈密顿算符 $\hat{H}$ 可显含时间。设 $\hat{H}$ 已表成为 $a^{\dagger}$ 及 $a$ 的正规乘积形式

$$\hat{H} = H(\hat{a}^{\dagger}, \hat{a}, t)_{\text{正规}} \tag{3.90}$$

把 $\hat{U}$ 算符写为

$$\begin{aligned} \hat{U}(\hat{a}^{\dagger}, \hat{a}, t', t) &= \lim_{N\to\infty} \prod_{j=1}^{N-1} \exp\{-\mathrm{i}\hat{H}(\tau_j)\varepsilon\} \\ &= \lim_{N\to\infty} \prod_{j=1}^{N-1} \hat{U}(\hat{a}^{\dagger}, \hat{a}, \tau_j + \varepsilon, \tau_j) \end{aligned} \tag{3.91}$$

由式(3.86),$\hat{U}(\hat{a}^{\dagger}, \hat{a}, \tau_j + \varepsilon, \tau_j)$的核为

$$U(z_j^*, z_{j-1}, \tau_j + \varepsilon, \tau_j) \simeq \mathrm{e}^{z_j^* z_{j-1}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon H(z_j^*, z_{j-1}, \tau_j)} \tag{3.92}$$

由上式及式(3.83)得 $\hat{U}(\hat{a}^{\dagger}, \hat{a}, t', t)$的核为

$$\begin{aligned} U(z^{*\prime}, z, t', t) = \lim_{N\to\infty} \int \exp\{ & z_N^* z_{N-1} - z_{N-1}^* z_{N-1} + z_{N-1}^* z_{N-2} \\ & - z_{N-2}^* z_{N-2} + \cdots - z_1^* z_1 + z_1^* z_0 \} \end{aligned}$$

$$\times \exp\{-\mathrm{i}\varepsilon[H(z_N^*, z_{N-1}, \tau_N) + H(z_{N-1}^*, z_{N-2}, \tau_{N-1}) + \cdots$$

$$+ H(z_1^*, z_0, \tau_1)]\} \prod_{j=1}^{N-1} \frac{\mathrm{d}z_j^* \mathrm{d}z_j}{2\pi \mathrm{i}} \tag{3.93}$$

其中，$z_0 = z, z_N^* = z^{*\prime}$。上式可简写为

$$U(z^{*\prime}, z, t', t) = \int^{z^{*\prime}} \int_z \left[\frac{\mathrm{d}z^*(\tau)\mathrm{d}z(\tau)}{2\pi \mathrm{i}}\right]$$

$$\times \exp\left\{\frac{1}{2}[z^*(t')z(t') + z^*(t)z(t)]\right\}$$

$$\times \exp\left\{\mathrm{i}\int_t^{t'} \left[\frac{1}{2\mathrm{i}}(\dot{z}^* z - z^* \dot{z}) - H(z^*, z, \tau)\right]\mathrm{d}\tau\right\} \tag{3.94}$$

注意，上式中 $z(\tau)$和 $z^*(\tau)$是独立的路径，它们并不是互为复共轭的，这一点不难由上面的推导看出来。$z$ 是$z(\tau)$的初始值，$z^*(\tau)$则没有初值条件[同样 $z^{*\prime}$是 $z^*(\tau)$的终值，$z(\tau)$没有终值条件]。

由式(3.71)可得

$$\frac{1}{2}\left(p\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} - q\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z\frac{\mathrm{d}z^*}{\mathrm{d}t} - z^*\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) \tag{3.95}$$

因此式(3.94)中第二个指数正是经典作用量。又由式(3.75)

$$\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}z^*}{2\pi \mathrm{i}} = \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{2\pi}$$

因此式(3.94)与 3.1 节中相空间泛函积分公式(3.18)有相似的形式，多出的因子 $\exp\left\{\frac{1}{2}[z^*(t')z(t') + z^*(t)z(t)]\right\}$来源于边界条件不同。

现在把以上的理论形式用于在外力作用下的谐振子的情况，此时正规形式的哈密顿算符为

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - j(t)\hat{a}^\dagger - j^*(t)\hat{a}, \qquad \hat{H}_0 = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} \tag{3.96}$$

它的核为

$$H(z_j^*, z_{j-1}, \tau_j) = \omega z_j^* z_{j-1} - j(\tau_j) z_j^* - j^*(\tau_j) z_{j-1}$$

于是式(3.93)只含 Gauss 型积分。按照与 3.1 节中计算式(3.56)和(3.69)的相似的步骤，令

$$z(\tau) = z_c(\tau) + u(\tau)$$

$$z^*(\tau) = z_c^*(\tau) + u^*(\tau) \tag{3.97}$$

其中，$z_c(\tau)$，$z_c^*(\tau)$满足如下极值条件及边界条件

$$\begin{aligned}&\dot{z}_c(\tau)+\mathrm{i}[\omega z_c(\tau)-j(\tau)]=0,\qquad z_c(t)=z\\&\dot{z}_c^*(\tau)-\mathrm{i}[\omega z^*(\tau)-j^*(\tau)]=0,\qquad z_c^*(t')=z^{*\prime}\end{aligned}\tag{3.98}$$

容易看出式(3.94)与 $z_c, z_c^*$ 轨道对它的贡献只差一个与 $j, j^*$ 及边界值无关的常系数。式(3.94)的解为

$$z_c(\tau)=z\exp[-\mathrm{i}\omega(\tau-t)]+\mathrm{i}\int_t^\tau \mathrm{d}\tau'\exp[-\mathrm{i}\omega(\tau-\tau')]j(\tau')$$

$$z_c^*(\tau)=z^{*\prime}\exp[\mathrm{i}\omega(\tau-t')]+\mathrm{i}\int_\tau^{t'}\mathrm{d}\tau'\exp[\mathrm{i}\omega(\tau-\tau')]j^*(\tau')\tag{3.99}$$

注意,上式中 $z(\tau)$和 $z^*(\tau)$并不是互为共轭的,这是因为它们的边界条件不一样。将式(3.99)代入式(3.94),利用由式(3.98)得到的关系式

$$\dot{z}_c^* z_c - z_c^*\dot{z}_c = 2\mathrm{i}H(z_c^*, z_c, \tau)+\mathrm{i}j^* z_c+\mathrm{i}z_c^* j$$

简化计算,立即得到

$$\begin{aligned}U(z^{*\prime},z,t',t)=N\exp\Big\{&z^{*\prime}\exp[-\mathrm{i}\omega(t'-t)]z\\&+\mathrm{i}\int_t^{t'}\mathrm{d}\tau\{z^{*\prime}\exp[-\mathrm{i}\omega(t'-\tau)]j(\tau)\\&+j^*(\tau)\exp[-\mathrm{i}\omega(\tau-t')]z\}\\&-\frac{1}{2}\int_t^{t'}\int_t^{t'}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau' j^*(\tau)\exp[-\mathrm{i}\omega\mid\tau-\tau'\mid]j(\tau')\Big\}\end{aligned}\tag{3.100}$$

对谐振子的情况,如 $j(\tau)$及 $j^*(\tau)$只在 $\tau$ 的有限区间内不为零,则在$|\tau|$很大时态$|f_0\rangle$就是自由谐振子的基态$|0\rangle$。在 $\hat{H}$写成正规形式(3.96)时,基态能量 $E_0=0$,因此,按照式(3.74)、(3.78)及(3.81),3.1 节中引进的基态到基态振幅 $W[j,j^*]$可以表示为

$$\begin{aligned}W[j,j^*]&=\lim_{\substack{t\to-\infty\\t'\to\infty}}\langle f_0\mid\hat{U}(t',t)\mid f_0\rangle e^{-\mathrm{i}E_0(t'-t)}\\&=N\lim_{\substack{t\to-\infty\\t'\to\infty}}\int\frac{\mathrm{d}z^{*\prime}\mathrm{d}z'}{2\pi\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}z^*\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}}e^{-z^{*\prime}z'}e^{-z^*z}U(z^{*\prime},z,t',t)\end{aligned}\tag{3.101}$$

对复数 Gauss 积分有公式

$$\begin{aligned}&\int\prod_{j=1}^N\frac{\mathrm{d}z_j^*\mathrm{d}z_j}{2\pi\mathrm{i}}\exp[-z^*Mz+A^*z+z^*A]\\&=(\det M)^{-1}\exp[A^*M^{-1}A]\end{aligned}\tag{3.102}$$

其中,$A, z$ 为$N\times1$ 复数矩阵,$M$ 为厄米部分正定的非奇异$N\times N$ 复数矩阵。由式(3.102)及(3.100)计算式(3.101)中的积分,此时

$$M = \begin{vmatrix} 1, & -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-t')} \\ 0, & 1 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} \mathrm{i}\int_t^{t'} \mathrm{d}\tau \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t'-\tau)} j(\tau) \\ 0 \end{vmatrix}, \qquad A^* = \begin{vmatrix} 0 \\ \mathrm{i}\int_t^{t'} \mathrm{d}\tau j^*(\tau) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(\tau-t)} \end{vmatrix}^{\mathrm{T}}$$

式(3.102)就等于1。因此得到

$$W[j,j^*] = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \mathrm{d}\tau' j^*(\tau') \times \exp[-\mathrm{i}\omega \mid \tau - \tau' \mid] j(\tau)\right\} \tag{3.103}$$

上式中已利用归一化条件 $W[0,0]=1$。在 $j=j^*=\frac{1}{\sqrt{2\omega}}J$ 时,式(3.96)与3.1节式(3.28)的 $H$ 相同,故式(3.103)与3.1节式(3.54)是相同的。不难看出对外场中的谐振子 $W[j,j^*]$ 亦可写为

$$W[j,j^*] = N\int\left[\frac{\mathrm{d}z^*(\tau)\mathrm{d}z(\tau)}{2\pi\mathrm{i}}\right]\cdot \exp\left\{\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\mathrm{i}} \times (\dot{z}^* z - z^* \dot{z}) - H_0(z^*, z) + \mathrm{i}\varepsilon z^* z + j^* z + z^* j\right]\mathrm{d}\tau\right\} \tag{3.104}$$

式(3.104)与(3.101)的差别只是将 $M$ 改为

$$M = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}, & -\exp[-\mathrm{i}(\omega - \mathrm{i}\varepsilon)(t - t')] \\ 0, & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

这个改变只是使积分改变一个常系数,可以吸收到归一化因子 $N$ 中,$\mathrm{i}\varepsilon$ 的引入是为保持 $M$ 的厄米部分正定所要求的。这个公式相应于3.1节的式(3.65)。

上述理论形式只适用于 $\hat{a}$ 和 $\hat{a}^\dagger$ 满足式(3.83)中Bose型对易关系的情况。由于要考虑Bose型算符与Fermi型算符耦合的理论,我们希望Fermi型自由度也能用和上述理论形式上尽量相似的理论来描述。由于Fermi型算符的反对易关系,这样做自然会遇到困难,这些困难在Berezin的工作中得到较好的解决[9]。

先考虑Fermi算符的一维问题,设算符 $\hat{b}, \hat{b}^\dagger$ 满足反对易关系

$$\{\hat{b}, \hat{b}^\dagger\} = 1, \qquad \hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger = 0, \qquad \hat{b}\,\hat{b} = 0 \tag{3.105}$$

我们希望 $\hat{b}, \hat{b}^\dagger$ 算符能有与式(3.73)形式上相似的表示。因此我们取

$$\hat{b}^\dagger = b^*, \qquad \hat{b} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b^*} \tag{3.106}$$

而态矢 $|\rangle$ 用 $f(b^*)$ 来表征,记为 $|f\rangle$。假如 $b, b^*$ 是通常的复数,式(3.106)将不能满足反对易关系式(3.105)。因此我们要求

$$\{b,b^*\}=0,\qquad (b^*)^2=0,\qquad (b)^2=0 \tag{3.107}$$

满足式(3.107)的 $b$ 和 $b^*$ 不能表成互为厄米共轭的矩阵,它们是互相独立的量。数学上满足式(3.107)的 $b,b^*$ 是二阶 Grassmann 代数的基。由 $(b^*)^2=0$, $f(b^*)$ 的最一般形式为

$$f(b^*)=c_0+c_1b^* \tag{3.108}$$

其中, $c_0,c_1$ 为通常的复数。微商按通常的定义,即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b^*}f(b^*)=c_1 \tag{3.109}$$

由式(3.107)、(3.108)及(3.109)可以验证,反对易关系式(3.105)满足

$$\hat{b}\,\hat{b}^\dagger f(b^*)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b^*}b^*f(b^*)=c_0$$

$$\hat{b}^\dagger\hat{b}\,f(b^*)=b^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b^*}f(b^*)=c_1b^*$$

因此

$$\{\hat{b}_1,\hat{b}^\dagger\}f(b^*)=f(b^*)$$

式(3.105)中第一式满足。由 $(b^*)^2=0$,知 $(\hat{b}^\dagger)^2=0$ 满足。

$$(\hat{b})^2f(b^*)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}b^{*2}}(c_0+c_1b^*)=0$$

故 $\hat{b}^2=0$ 也满足。由式(3.108)知只有两个独立的函数 $f_0=1$ 和 $f_1=b^*$,相应的态矢分别记为 $|f_0\rangle$ 和 $|f_1\rangle$,它们是占有数算符 $\hat{N}=\hat{b}^\dagger\hat{b}$ 的本征态

$$\hat{N}\,f_0=b^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b^*}1=0,\qquad \hat{N}\,f_1=b^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b^*}b^*=f_1 \tag{3.110}$$

为了定义两个态矢的内积需要定义 Grassmann 代数上的积分,我们希望内积有与式(3.74)相似的形式,因此我们取内积为

$$\langle f'\mid f\rangle=\int(f'(b^*))^*f(b^*)\mathrm{e}^{-b^*b}\mathrm{d}b^*\mathrm{d}b \tag{3.111}$$

由上式和式(3.108)及(3.109)得到

$$\langle f'\mid f\rangle=\int[c_0'^*c_0+c_0'^*c_1b^*+c_0c_1'^*b+(c_1'^*c_1+c_0'^*c_0)bb^*]\mathrm{d}b^*\mathrm{d}b \tag{3.112}$$

为了使式(3.112)不产生矛盾, $\mathrm{d}b$ 和 $\mathrm{d}b^*$ 应反对易,它们和 $b,b^*$ 也应反对易。我们要求 $|f_0\rangle$ 和 $|f_1\rangle$ 在此内积下正交归一,由

$$\langle f_1\mid f_0\rangle=\langle f_0\mid f_1\rangle=0 \tag{3.113}$$

或$\int b\mathrm{d}b = \int b^* \mathrm{d}b^* = 0$或$\int \mathrm{d}b = \int \mathrm{d}b^* = 0$。但前者不能保证

$$\langle f_1 \mid f_1 \rangle = \langle f_0 \mid f_0 \rangle = 1 \tag{3.114}$$

因此,我们定义 Grassmann 代数上的积分

$$\int b\mathrm{d}b = \int b^* \mathrm{d}b^* = 1 \tag{3.115}$$

$$\int \mathrm{d}b = \int \mathrm{d}b^* = 0 \tag{3.116}$$

这样,正交归一条件式(3.113)和(3.114)得到满足。由式(3.112)、(3.115)及(3.116)容易验证$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a^*}$和 $a^*$ 在此内积下是互为共轭的。事实上

$$\langle f' \mid b^* f \rangle = \int [c_0'^* c_0 b^* + c_0 c_1'^* bb^*] \mathrm{d}b^* \mathrm{d}b = c_0 c_1'^*$$

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b^*} f' \middle| f \right\rangle = \int c_1'(c_0 + c_1 b^*)(1 - b^* b)\mathrm{d}b^* \mathrm{d}b = c_0 c_1'^*$$

一般的算符 $\hat{A}$可以表示成为以$|f_n\rangle(n=0,1)$为基的矩阵形式

$$\hat{A} = \sum_{mn=0}^{1} | f_m \rangle A_{mn} \langle f_n | \tag{3.117}$$

如同 Bose 子算符的公式(3.81)一样,可以由式(3.113)~(3.116)得到表征态矢$\hat{A}|f\rangle$的函数为

$$(\hat{A} f)(b^*) = \int A(b^*, b') f(b'^*) \mathrm{e}^{-b^{*\prime} b'} \mathrm{d}b^* \mathrm{d}b' \tag{3.118}$$

其中

$$\begin{aligned} A(b^*, b') &= \sum_{mn} A_{mn} (b^*)^m (b')^n \\ &= A_{00} + A_{10} b^* + A_{01} b' + A_{11} b^* b' \end{aligned} \tag{3.119}$$

规定 $b', b^{*\prime}$与$b, b^*$反对易,$A(b^*, b')$称为算符 $\hat{A}$的核。由式(3.118)可以得到两个算符的积 $\hat{A} = \hat{A}_1 \hat{A}_2$ 的核为

$$A(b^*, b') = \int A_1(b^*, b'') A_2(b^{*\prime\prime}, b') \mathrm{e}^{-b^{*\prime\prime} b''} \mathrm{d}b^{*\prime\prime} \mathrm{d}b'' \tag{3.120}$$

算符 $\hat{A}$也可以写成如下的正规形式

$$\hat{A} = K_{00} + K_{10} \hat{b}^\dagger + K_{01} \hat{b} + K_{11} \hat{b}^\dagger \hat{b} \tag{3.121}$$

定义

$$K(b^*, b') = K_{00} + K_{10} b^* + K_{01} b' + K_{11} b^* b' \tag{3.122}$$

由式(3.117)和(3.121)

$$A_{mn}=\langle f_m \mid \hat{A} \mid f_n\rangle=\sum_{kl}K_{kl}\langle f_m \mid (\hat{b}^{\dagger})^k(\hat{b})^l \mid f_n\rangle=0$$

因此由式(3.119)

$$\begin{aligned}A(b^*,b')=&\sum_{m,n}\sum_{k,l}K_{kl}\langle f_m \mid (\hat{b}^{\dagger})^k(\hat{b})^l \mid f_n\rangle(b^*)^m(b')^n\\=&\sum_{\substack{m\geqslant k\\n\geqslant l}}\sum_{k,l}\delta(n-l-m+k)K_{kl}(b^*)^m(b')^n\\=&\sum_{k,l}K_{kl}(b^*)^k(b')^l\sum_{j=0}^{1-k}(-1)^{jk}(b^*)^j(b')^j\\&\times(b^*)^k(b')^l=\sum_{k,l}K_{kl}(1+b^*b')(b^*)^k(b')^l\end{aligned}$$

由上式得到

$$e^{b^*b'}K(b^*,b')=A(b^*,b') \tag{3.123}$$

上述理论很容易推广到 $p$ 维的情况,这时有 $2p$ 个算符

$$\hat{b}_i,\hat{b}_i^{\dagger} \qquad i=1,2,\cdots,p$$

满足反对易关系

$$\{\hat{b}_i,\hat{b}_j^{\dagger}\}=\delta_{ij}, \qquad \{\hat{b}_i,\hat{b}_j\}=\{\hat{b}_i^{\dagger},\hat{b}_j^{\dagger}\}=0 \tag{3.124}$$

引入 $2p$ 个互相反对易的 Grassmann 代数的元素

$$b_i,b_i^* \qquad i=1,2,\cdots,p \tag{3.125}$$

态矢量由 $f(b^*)$表征,取表示

$$\hat{b}_i^{\dagger}=b_i^*, \qquad \hat{b}_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b_i^*} \tag{3.126}$$

在微商$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b_i^*}f(b^*)$的定义中,$f(b^*)$中的 $b_i^*$ 因子要先用反对易关系移到最左边然后再去掉。态矢量的内积定义为

$$\langle f' \mid f\rangle=\int(f'(b^*))^*f(b^*)e^{-\sum_i b_i^*b_i}\prod_j \mathrm{d}b_j^*\mathrm{d}b_j \tag{3.127}$$

在积分式(3.127)中所有的量 $b_i^*$,$b_i$,$\mathrm{d}b_i^*$,$\mathrm{d}b_i$ 都是互相反对易的,$2p$ 阶 Grassmann 代数上的积分由

$$\int b_i\mathrm{d}b_i=\int b_i^*\mathrm{d}b_i^*=1, \qquad \int\mathrm{d}b_i=\int\mathrm{d}b_i^*=0 \tag{3.128}$$

定义。$f_{n_i}(b^*)=(b_1^*)^{n_1}(b_2^*)^{n_2}\cdots(b_p^*)^{n_p}$ 为一组正交完备基,其中 $n_i=0,1$。两个算符的乘积 $\hat{A}=\hat{A}_1\hat{A}_2$ 的核满足

$$A(b^*,b')=\int A_1(b^*,b'')A_2(b^{*\prime\prime},b')e^{-\sum_i b''^*_i b''_i}\times\prod_j \mathrm{d}b^{*\prime\prime}_j\mathrm{d}b''_j \tag{3.129}$$

核 $A(b^*,b')$与代表算符正规形式的函数 $K(b^*,b')$的关系为

$$A(b^*,b') = e^{+\sum b_i^* b_i'} K(b^*,b') \tag{3.130}$$

注意,式(3.129)、(3.130)和 Bose 算符情况的式(3.83)、(3.86)在形式上完全相同,由于前面对 Bose 算符情况下核 $U(a^*,a,t',t)$的推导只依赖于式(3.83)和(3.86),我们立即可以写下 Fermi 型算符情况下的算符 $\hat{U}$的核。如果哈密顿算符 $\hat{H}$写成正规形式

$$\hat{H} = \sum_{mn} K_{mn}(t)(\hat{b}^\dagger)^m(b)^n = H(\hat{b}^\dagger,\hat{b},t)$$

则

$$\begin{aligned} U(b^*,b,t',t) = \int \exp\Big\{ & \frac{1}{2}\sum_i (b_i^*(t')b_i(t') + b_i^*(t)b_i(t)) \\ & + i\int_t^{t'} \frac{1}{2i}\Big[\sum_i (\dot{b}_i^*(\tau)b_i(\tau) - b_i^*(\tau)\dot{b}_i(\tau)) \\ & - iH(b^*(\tau),b(\tau),\tau)\Big]d\tau\Big\} \\ & \times \prod_j [db_j^*(\tau)db_j(\tau)] \end{aligned} \tag{3.131}$$

其中,边界条件为

$$b_i^*(t') = b_i^{*\prime}, \qquad b_i(t) = b_i \tag{3.132}$$

为了对具体问题进行计算,需要知道 Grassmann 代数上的积分的一些性质。首先考虑积分变量替换公式。设 $2n$ 个量 $x_i$,$dx_i$ 互为反对易,积分定义为

$$\int dx_i = 0, \qquad \int x_i dx_i = 1, \qquad i = 1,2,\cdots,n \tag{3.133}$$

考虑在积分

$$\int f(x)dx_n\cdots dx_1 \tag{3.134}$$

中做替换

$$x_i = c_{ij}y_j, \qquad dx_i = \tilde{c}_{ij}dy_j \tag{3.135}$$

其中,$2n$ 个量 $y_j$,$dy_j$ 也反对易。对 $y_i$ 的积分定义为

$$\int dy_i = 0, \qquad \int y_i dy_i = 1 \tag{3.136}$$

由式(3.135)得到

$$\begin{aligned} x_1x_2\cdots x_n &= \det|c_{ij}|\, y_1y_2\cdots y_n \\ dx_n dx_{n-1}\cdots dx_1 &= \det|\tilde{c}_{ij}|\, dy_n dy_{n-1}\cdots dy_1 \end{aligned} \tag{3.137}$$

(3.133)和(3.136)两式要求

$$\int x_1 x_2 \cdots x_n \mathrm{d}x_n \mathrm{d}x_{n-1} \cdots \mathrm{d}x_1 = \int y_1 y_2 \cdots y_n \mathrm{d}y_n \mathrm{d}y_{n-1} \cdots \mathrm{d}y_1$$

由上式及式(3.137)知

$$\det |\tilde{c}_{ij}| = (\det |c_{ij}|)^{-1} \tag{3.138}$$

因此$|\tilde{c}_{ij}|$与$|c_{ij}|$的逆矩阵只能差一个行列式为1的矩阵因子。与普通的积分不同,这里变量及其微分按行列式互逆的矩阵变换。由式(3.137)和(3.138)得Grassmann代数上变量替换公式

$$\int f(x)\mathrm{d}x_n \cdots \mathrm{d}x_1 = (\det |c_{ij}|)^{-1} \int f(x(y))\mathrm{d}y_n \cdots \mathrm{d}y_1 \tag{3.139}$$

上式满足平移不变性$\int f(x + x_n)\mathrm{d}x_n \cdots \mathrm{d}x_1 = \int f(x)\mathrm{d}x_n \cdots \mathrm{d}x_1$。

考虑"Gauss型积分"

$$I = \int \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum M_{ij}x_i x_j} \mathrm{d}x_n \cdots \mathrm{d}x_1 \tag{3.140}$$

其中,$M_{ij}$为实数,$M_{ij} = -M_{ji}$。斜对称实矩阵$|M_{ij}|$可以通过正交变换$x_i = \sum c_{ij} y_j$化为如下的标准形式

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots\cdots \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0\cdots \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & 0\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

因为对于正交变换,$\det|c_{ij}| = 1$,由式(3.139)

$$I = \int \mathrm{e}^{-(\lambda_1 y_1 y_2 + \lambda_2 y_3 y_4 + \cdots + \lambda_{n/2} y_{n-1} y_n)} \mathrm{d}y_n \cdots \mathrm{d}y_1, \qquad \text{当 } n \text{ 为偶数}$$

$$I = \int \mathrm{e}^{-(\lambda_1 y_1 y_2 + \lambda_2 y_3 y_4 + \cdots + \lambda_{(n-1)/2} y_{n-2} y_{n-1})} \mathrm{d}y_n \cdots \mathrm{d}y_1, \qquad \text{当 } n \text{ 为奇数}$$

由上式及式(3.136)

$$I = \lambda_1 \cdots \lambda_n = (\det |M_{ij}|)^{\frac{1}{2}}, \qquad \text{当 } n \text{ 为偶数}$$

$$I = 0, \qquad \text{当 } n \text{ 为奇数}$$

因为$n$为奇数时,$\det|M_{ij}| = 0$,故这两个式子可合写为

$$\int \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum M_{ij}x_i x_j} \mathrm{d}x_n \cdots \mathrm{d}x_1 = (\det |M_{ij}|)^{\frac{1}{2}} \tag{3.141}$$

如用记号$b_i^*$,$\bar{b}_i$,则

$$\int \exp\{-b^* Mb\} \mathrm{d}b_n^* \mathrm{d}b_n \cdots \mathrm{d}b_1^* \mathrm{d}b_1 = \det|M_{ij}| \tag{3.141'}$$

上式可推广到 $M_{ij}$ 为复数的情况,这是因为上式左右两方都是 $M_{ij}$ 的多项式,两个多项式在实变量时相等,则它们在复变量时也相等。由于积分定义满足平移不变性,由式(3.141)可以得到更一般的公式

$$\int \exp\{-b^* Mb + A^* b + b^* A\} \mathrm{d}x_n \cdots \mathrm{d}x_1 = (\det|M_{ij}|)\exp(A^* M^{-1} A) \tag{3.142}$$

注意,上式与通常的 Gauss 积分公式(3.102)的差别是出现了$(\det|M_{ij}|)$而不是$(\det|M_{ij}|)^{-1}$因子。

现在回到式(3.131)的讨论。考虑一个与 Bose 一维谐振子对应的情况,哈密顿算符取为

$$\hat{H}_\gamma = \omega \hat{b}^\dagger \hat{b} - \gamma^*(t)\hat{b} - \hat{b}^\dagger \gamma(t) = \hat{H}_0 - \gamma^*(t)\hat{b} - \hat{b}^\dagger \gamma(t) \tag{3.143}$$

其中,$\gamma^*(t)$与 $\gamma(t)$反对易,它们与 $\hat{b}^\dagger, \hat{b}$也反对易。这时积分式(3.131)可以利用公式(3.142)算出来,更简便的方法是利用极值轨道。注意到在求 Bose 谐振子的 $U(z^*, z, t', t)$时,所用的极值轨道法计算公式作为符号运算,对现在的情况是可以照搬的,这样就对式(3.143)中的 $\hat{H}$得到与式(3.100)相似的公式

$$\begin{aligned} U(b^{*\prime}, b, t', t) = N\exp\{ & b^{*\prime}\exp[-\mathrm{i}\omega(t'-t)]b \\ & + \mathrm{i}\int_t^{t'} \mathrm{d}\tau \{b^{*\prime}\exp[-\mathrm{i}\omega(t'-\tau)]\gamma(\tau) + \gamma^*(\tau) \\ & \times \exp[-\mathrm{i}\omega(\tau - t)]b\} - \frac{1}{2}\int_t^{t'}\int_t^{t'} \mathrm{d}\tau \mathrm{d}\tau' \gamma^*(\tau) \\ & \times \exp[-\mathrm{i}\omega|\tau - \tau'|]\gamma(\tau')\} \end{aligned} \tag{3.144}$$

由式(3.113)、(3.118)和(3.144)得到在外场 $\gamma(t), \gamma^*(t)$下基态($|f_0\rangle$)到基态的跃迁振幅为

$$W[\gamma^*, \gamma] = N \lim_{\substack{t\to-\infty \\ t'\to\infty}} \int \mathrm{d}b^{*\prime}\mathrm{d}b'\mathrm{d}b^*\mathrm{d}b \, \mathrm{e}^{-b^{*\prime}b'} \times U(b^{*\prime}, b, t', t)\mathrm{e}^{-b^* b} \tag{3.145}$$

利用公式(3.142),由上式得到

$$W[\gamma^*, \gamma] = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \mathrm{d}\tau' \gamma^*(\tau')\exp[-\mathrm{i}\omega|\tau - \tau'|]\gamma(\tau)\right\} \tag{3.146}$$

对应于式(3.104),现在有

$$W[\gamma^*,\gamma] = N\int[\mathrm{d}b^*(\tau)\mathrm{d}b(\tau)]\exp\left\{\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\mathrm{i}}(\dot{b}^*b - b^*\dot{b})\right.\right.$$
$$\left.\left. - H_0(b^*,b) + \mathrm{i}\varepsilon b^*b + \gamma^*(\tau)b + b^*\gamma(\tau)\right]\mathrm{d}\tau\right\} \tag{3.147}$$

由式(3.131)不难证明,如哈密顿量 $\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{H}_{\text{int}}(b^\dagger,b)$,其中 $\hat{H}_0=\hat{\omega b}^\dagger\hat{b}$,则生成泛函为

$$W[\gamma^*,\gamma] = N\exp\left\{-\mathrm{i}\int H_{\text{int}}\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta\gamma(\tau')},\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta\gamma^*(\tau')}\right)\right.$$
$$\left.\times\,\mathrm{d}\tau'\right\}\int[\mathrm{d}b^*(\tau)\mathrm{d}b(\tau)]\exp\left\{\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\mathrm{i}}(\dot{b}^*b - b^*\dot{b})\right.\right.$$
$$\left.\left. - H_0(b^*,b) + \mathrm{i}\varepsilon b^*b + \gamma^*b + b^*\gamma\right]\mathrm{d}\tau\right\} \tag{3.148}$$

由以上讨论我们看到,在 Fock-Bargman-Berezin 表示中 Fermi 算符与 Bose 算符两种情况的公式非常相似,一个主要的差别是"Gauss 型积分"公式(3.142)中出现 $\det|M_{ij}|$ 的正一次方。

## 3.3 量子场论的泛函积分形式

前两节中叙述的泛函积分形式在自由度 $n\to\infty$ 时就可以描述量子场。首先考虑 Bose 场的情况,为了简单,我们考虑一个实标量场 $\phi(x)$ 的理论,这时拉氏函数可表示为

$$L = \int\mathscr{L}(\phi(x))\mathrm{d}^3x \tag{3.149}$$

由量子力学到量子场论的过渡可以由 3.1 节中叙述的形式出发,也可以由 3.2 节中叙述的形式出发。在第一种做法中,先把空间分成 $n$ 个边长为 $\varepsilon$ 的小正方格,令 $\phi_\alpha(t)$ 为在第 $\alpha$ 个正方格中场 $\phi(x)$ 的平均值,把它看作场的坐标,即 $\phi_\alpha(t)=q_\alpha(t)$。拉氏函数式(3.149)可改写为对所有的正方格的贡献求和的形式

$$L = \lim_{n\to\infty}\sum_{\alpha=1}^{n}\varepsilon^3\mathscr{L}_\alpha(\dot{\phi}_\alpha(t),\phi_\alpha(t),\phi_{\alpha+\delta}(t)) \tag{3.150}$$

其中,$L_\alpha$ 对 $\phi_{\alpha+\delta}$ 的依赖是由把场 $\phi(x)$ 对空间坐标的微商改写为差分而引起的。由式(3.2)得到与 $\phi_\alpha(t)$ 共轭的正则动量为

$$p_\alpha(t) = \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}_\alpha(t)} = \varepsilon^3\frac{\partial\mathscr{L}_\alpha}{\partial\dot{\phi}_\alpha(t)} \equiv \varepsilon^3\pi_\alpha(t) \tag{3.151}$$

因此哈密顿量是

$$H = \sum_{\alpha} p_\alpha \dot{\phi}_\alpha - L = \sum_{\alpha} \varepsilon^2 \mathscr{H}_\alpha \tag{3.152}$$

其中

$$\mathscr{H}_\alpha(\pi_\alpha, \phi_\alpha, \phi_{\alpha+\delta}) = \pi_\alpha \dot{\phi}_\alpha - \mathscr{L}_\alpha \tag{3.153}$$

量子化之后,令$|\phi_\alpha, t\rangle$表示算符 $\hat{\phi}_\alpha(t)(\alpha = 1, 2, \cdots, n)$的共同本征态,量子振幅$\langle \phi'_\alpha, t' | \phi_\alpha, t\rangle$可以直接在式(3.25)中令 $n \to \infty$得到

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \to 0} \langle \phi'_\alpha, t' \mid \phi'_\alpha, t\rangle \\
&= \lim_{\substack{N \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} \int_{\phi_\alpha}^{\phi'_\alpha} \prod_{\alpha'=1}^{n} \prod_{i=1}^{N-1} [\mathrm{d}\phi_{\alpha'}(\tau_i)] \times \prod_{i=1}^{N} \left[\frac{\varepsilon^3 \mathrm{d}\pi_{\alpha'}(\tau_i)}{2\pi}\right] \exp\left\{ \mathrm{i}\varepsilon^4 \sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{n} \left[ \pi_\alpha(\tau_j) \right.\right. \\
&\left.\left. \times \frac{\phi_\alpha(\tau_j) - \phi_\alpha(\tau_{j-1})}{\varepsilon} - \mathscr{H}_\alpha(\pi_\alpha(\tau_j), \phi_\alpha(\tau_{j-1}), \phi_{\alpha+\delta}(\tau_{j-1}))\right]\right\}
\end{aligned} \tag{3.154}$$

上式可以简记为.

$$\begin{aligned}
\langle \phi'(\boldsymbol{x}), t' \mid \phi(\boldsymbol{x}), t\rangle &= \int_{\phi(\boldsymbol{x})}^{\phi'(\boldsymbol{x})} [\mathscr{D}\phi][\mathscr{D}\varepsilon^3 \pi] \\
&\times \exp\left\{ \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \int_t^{t'} \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}^3 \boldsymbol{x} \left[ \pi(\boldsymbol{x}, \tau) \frac{\partial \phi(\boldsymbol{x}, \tau)}{\partial \tau} - \mathscr{H}(\boldsymbol{x}, \tau) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.155}$$

其中

$$\pi(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\phi}(\boldsymbol{x}, t)}, \qquad \mathscr{H} = \pi \dot{\phi} - \mathscr{L} \tag{3.156}$$

$\pi_\alpha$ 和 $\mathscr{H}_\alpha$ 就是 $\pi(x)$和 $\mathscr{H}(x)$在第 $\alpha$ 个方格中的平均值

$$[\mathscr{D}\phi][\mathscr{D}\varepsilon^3 \pi] = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} \prod_{\alpha=1}^{n} \prod_{i=1}^{N-1} (\mathrm{d}\phi_\alpha(\tau_i)) \times \prod_{i=1}^{N} \left( \frac{\varepsilon^3 \mathrm{d}\pi_\alpha(\tau_i)}{2\pi\hbar} \right) \tag{3.157}$$

以下设拉氏函数密度有如下的形式

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \mathscr{L}_{\mathrm{int}}(\phi) = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_{\mathrm{int}}(\phi) \tag{3.158}$$

这时哈密顿函数密度为

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} \nabla \phi(x) \cdot \nabla \phi(x) + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \mathscr{L}_{\mathrm{int}}(\phi) \tag{3.159}$$

将上式代入式(3.155)求出对 $\pi$ 的积分就得到

$$\langle \phi'(\boldsymbol{x}), t' \mid \phi(\boldsymbol{x}), t\rangle = (\varepsilon / \sqrt{2\pi \mathrm{i} \hbar})^n \int_{\phi(\boldsymbol{x})}^{\phi'(\boldsymbol{x})} [\mathscr{D}\phi] \times \exp\left\{ \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \int_t^{t'} \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}^3 x' \mathscr{L}(\boldsymbol{x}', \tau) \right\} \tag{3.160}$$

其中,$[\mathscr{D}\phi] = \prod_{\alpha=1}^{n} \prod_{i=1}^{N-1} (\varepsilon \mathrm{d}\phi'_\alpha(\tau_i) / \sqrt{2\pi \mathrm{i} \hbar})$。

在量子场论中,基态就是真空态,对应于 3.1 节中的式(3.45)。令 $W[J]$表示真空态之间的矩阵元

$$W[J]=\langle 0\mid T\exp\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x J(\boldsymbol{x},t)\hat{\phi}(\boldsymbol{x},t)\}\mid 0\rangle \tag{3.161}$$

其中,$J(\boldsymbol{x},t)$为 $c$ 数函数,$T$ 表示编时乘积。量子场论中有兴趣的物理量都可以由 $W[J]$导出来。由式(3.158)有

$$\begin{aligned}\left.\frac{\delta^k W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\cdots\delta J(x_k)}\right|_{J=0}&=(\mathrm{i})^k\langle 0\mid T(\hat{\phi}(x_1)\cdots\hat{\phi}(x_k))\mid 0\rangle\\&=\mathrm{i}^k G(x_1\cdots x_k)\end{aligned} \tag{3.162}$$

这里,$G(x_1\cdots x_k)$是 $k$ 点 Green 函数。因此 $W[J]$称为 Green 函数的生成泛函。3.1 节中对 $W[J]$的讨论可以直接推广到无穷维的情况。设想在拉氏函数中附加一个外源项$\int \mathrm{d}^4 x J(\boldsymbol{x},t)\phi(\boldsymbol{x},t)$,则由 3.1 节式(3.47)知道,$W[J]$是在外源 $J(\boldsymbol{x},t)$中真空到真空的量子振幅,由式(3.47)我们知道,当拉氏函数密度有如式(3.158)的形式时

$$W[J]=\exp\left\{+\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x\mathscr{L}_{\mathrm{int}}\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right\}W_0[J] \tag{3.163}$$

其中,$W_0[J]$是自由场拉氏函数密度

$$\mathscr{L}_0=-\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial_\mu\phi)-\frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{3.164}$$

情况下的生成泛函

$$\begin{aligned}W_0[J]=&\lim_{\substack{t_i\to\infty\\t_f\to\infty}}\int\mathscr{D}\phi_f(\boldsymbol{x})\mathscr{D}\phi_i(\boldsymbol{x})\int_{\phi_i(\boldsymbol{x})}^{\phi_f(\boldsymbol{x})}[\mathscr{D}\phi]\boldsymbol{\Psi}_0^*[\phi_f]\\&\times\exp\left\{\mathrm{i}\int(\mathscr{L}_0(x)+J(x)\phi(x))\mathrm{d}^4 x\right\}\boldsymbol{\Psi}_0[\phi_i]\end{aligned} \tag{3.165}$$

上式中,$\boldsymbol{\Psi}_0$ 为自由场真空的态矢泛函,真空态的能量 $E_0$ 已取为零。

为求 $W_0[J]$,可以把 $\phi$ 场在体积为 $V$ 的立方盒内按实的正规模式展开如下

$$\begin{aligned}\phi(x)&=\sqrt{\frac{2}{V}}\sum_{\substack{\boldsymbol{k}\\k_1>0}}(q_{1\boldsymbol{k}}(t)\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})+q_{2\boldsymbol{k}}(t)\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}))\\J(x)&=\sqrt{\frac{2}{V}}\sum_{\substack{\boldsymbol{k}\\k_1>0}}(j_{1\boldsymbol{k}}(t)\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})+j_{2\boldsymbol{k}}(t)\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}))\end{aligned} \tag{3.166}$$

这里,对 $\boldsymbol{k}$ 的求和中只包含$k_1$ 大于零的项。这时包括外源的拉氏函数为

$$L_J=L_0+\int J\phi\mathrm{d}^3 x=\sum_{\boldsymbol{k}}\cdot\sum_{i=1,2}\left[\frac{1}{2}(\dot{q}_{i\boldsymbol{k}}^2-\omega_{\boldsymbol{k}}^2 q_{i\boldsymbol{k}}^2)+j_{i\boldsymbol{k}}\cdot q_{i\boldsymbol{k}}\right]=\sum L_{\boldsymbol{k}i} \tag{3.167}$$

其中

$$\omega_k^2 = k^2 + m^2$$

$$j_{1k} = \sqrt{\frac{2}{V}}\int d^3 x J(x)\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$$

$$j_{2k} = \sqrt{\frac{2}{V}}\int d^3 x J(x)\sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) \tag{3.168}$$

式(3.167)中的 $L_{ki}$ 与式(3.28)有相同的形式，故 $L_J$ 代表无穷多个在外场中的谐振子。由式(3.54)得到

$$W_0[J] = \exp\left\{\frac{i}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{i=1,2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau' d\tau j_{ik}(\tau') \times D_F(\tau'-\tau,\boldsymbol{k}) j_{ik}(\tau)\right\}$$

其中

$$D_F(\tau'-\tau,\boldsymbol{k}) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0}{2\pi}\frac{e^{-ik_0(\tau'-\tau)}}{-k_0^2 + k^2 + \mu^2 - i\varepsilon}$$

将式(3.168) 代入上式，并把对 $\boldsymbol{k}$ 的求和 $\sum_{k_1>0}$ 换成积分 $\frac{V}{2(2\pi)^3}\int d^3\boldsymbol{k}$ 就得到

$$W_0[J] = \exp\left\{\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d^4x' d^4x J(x')\Delta_F(x'-x)J(x)\right\} \tag{3.169}$$

其中

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{e^{ikx}}{k^2 + m^2 - i\varepsilon} \tag{3.170}$$

为标量场 Feynman 传播子。

如在 3.1 节中指出的，式(3.169)可以由下式得到

$$\begin{aligned} W_0[J] &= N\int[\mathscr{D}\phi]\exp\left\{i\int d^4x[\mathscr{L}_0(x) + i\varepsilon\phi^2 + J\phi]\right\} \\ &= N\int[\mathscr{D}\phi]\exp\left\{i\int d^4x \times \left[-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}(m^2 - i\varepsilon)\phi^2 + J\phi\right]\right\} \end{aligned} \tag{3.171}$$

现在我们直接由式(3.171) 开始计算来证明这一点。回到离散的形式，把时空分为体积为 $\varepsilon^4$ 的小方格，令 $\phi_\alpha$ 表示 $\phi(x)$ 在第 $\alpha$ 个方格中的平均值。做替换 $\int d^4x \to \sum_\alpha \varepsilon^4$，则式(3.171) 中的积分可表为如下的形式

$$\varepsilon^4\left(-\frac{1}{2}\phi_\alpha A_{\alpha\beta}\phi_\beta + J_\alpha\phi_\beta\right)$$

其中

$$A_{\alpha\beta} = (-\Box + m^2 - i\varepsilon)_{\alpha\beta} \tag{3.172}$$

这里，□是表示差分运算的矩阵

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Box_{\alpha\beta}\phi_\beta \to (\partial_\mu\partial_\mu\phi)_\alpha \tag{3.173}$$

因此由 Gauss 积分公式有

$$W_0[J] = \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^4 J_\alpha (A^{-1})_{\alpha\beta} J_\beta\right\} \tag{3.174}$$

其中，$A^{-1}$表示矩阵$|A_{\alpha\beta}|$的逆矩阵。由式(3.172)得

$$(-\Box + m^2 - \mathrm{i}\varepsilon)_{\alpha\gamma}(A^{-1})_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\beta} \to \varepsilon^4\delta(x-y) \tag{3.175}$$

其中，$x,y$ 为第$\alpha$ 及第$\beta$ 个方格的坐标。由式(3.173)及(3.175)得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-4}(A^{-1})_{\alpha\beta} = \Delta_F(x-y) \tag{3.176}$$

其中，$\Delta_F(x-y)$为方程

$$(-\partial_\mu\partial_\mu + m^2 - \mathrm{i}\varepsilon)\Delta_F(x-y) = \delta^4(x-y) \tag{3.177}$$

的解，这就是式(3.170)中的 $\Delta_F$。将式(3.176)代入式(3.174)并取极限 $\varepsilon\to 0$ 即得式(3.169)。将式(3.171)代入式(3.163)得到在拉氏函数为式(3.158)时 $W[J]$的表示式

$$\begin{aligned} W[J] &= N\int[\mathscr{D}\phi]\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int \mathrm{d}^4x\left[-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi\right.\right. \\ &\qquad \left.\left. -\frac{1}{2}(m^2 - \mathrm{i}\varepsilon)\phi^2 + \mathscr{L}_{\mathrm{int}}(\phi) + \hbar J\phi\right]\right\} \\ &= N\int[\mathscr{D}\phi]\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int \mathrm{d}^4x[\mathscr{L}(x) + \mathrm{i}\varepsilon\phi^2 + \hbar J\phi]\right\} \end{aligned} \tag{3.178}$$

可以引进欧氏空间 Green 函数生成泛函 $W_E[J]$

$$\begin{aligned} W_E[J] = N\int[\mathscr{D}\phi]\exp\left\{-\int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}\tau\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)^2\right.\right. \\ \left.\left. +\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \mathscr{L}_{\mathrm{int}}(\phi) - J\phi\right]\right\} \end{aligned} \tag{3.179}$$

由 3.1 节中的证明可以看出式(3.178)中的 $W[J]$是由式(3.179)的 $W_E[J]$把 $\tau$ 由实轴逆时钟地解析延拓到虚轴$\tau = \mathrm{i}t$ 得到的边界值。

将式(3.169)代入式(3.163)得到 $W[J]$的明显表达式

$$\begin{aligned} W[J] = \exp\left\{+\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathscr{L}_{\mathrm{int}}\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right\} \\ \times\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x'\mathrm{d}^4xJ(x')\Delta_F(x'-x)J(x)\right\} \end{aligned} \tag{3.180}$$

将上式右方第一个因子按照 $\mathscr{L}_{\mathrm{int}}$中的耦合常数的幂次展开，并用式(3.162)计算 Green 函数就得到通常的微扰论。当 $\mathscr{L}_{\mathrm{int}}$中只含一个耦合常数时微扰展开的 $n$ 阶项为

$$\frac{1}{n!}\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}_{\mathrm{int}}\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right]^n \times \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4 x'\mathrm{d}^4 x J(x')\Delta_{\mathrm{F}}(x'-x)J(x)\right\}$$
$$(3.180')$$

不难由此得出通常的 Wick 定理和 Feynman 规则。因此可以把式(3.178)的泛函积分当作量子场论的出发点,由它可以得出一切量子场论中感兴趣的量。

类似于式(3.178)的泛函积分原来是由离散情形下的公式中方格的边长 $\varepsilon\to 0$ 的极限定义的,对量子场论这样无穷多自由度的情况,除自由场等特殊情况外,一般不能保证 $\varepsilon\to 0$ 的极限存在,这时泛函积分的定义有含糊之处。一个可能的而且也是实用的看法是把泛函积分用它的微扰展开式[如式(3.180)和(3.180′)]来定义。可以在这个基础上做正规化和重整化。

以上叙述的理论形式不难推广到多个 Bose 场 $\phi_i$ 和更一般的相互作用的情况,在一般情况下相互作用项可能会有 $\dot{\phi}_i$ 的一次项。这种情况相应于量子力学中拉氏函数式(3.19),在那里我们已经看到,这种项不产生特殊困难。对于非规范理论只要 $\phi_i$ 的二次导数项的系数是常数,得到的结果是式(3.167)和(3.178)的直接推广。规范场理论的特殊问题是理论中包含由规范不变性带来的非物理自由度,这种理论的量子化及泛函积分形式将在本书的下文中叙述。

现在我们来讨论包含 Fermi 子的场论的泛函积分形式。考虑一个在外源 $\eta(x)$中的自由 Fermi 子场,拉氏函数为

$$\mathscr{L}_0 = -\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\psi$$
$$\mathscr{L}_\eta = \mathscr{L}_0 + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x) \tag{3.181}$$

在量子场论中,须把 $\eta(x)$,$\bar{\eta}(x)$看作互相反对易且与场算符 $\hat{\psi}(x)$, $\hat{\bar{\psi}}(x)$反对易的量。对 $\hat{\psi}(x)$和 $\eta(x)$做三维傅氏展开

$$\hat{\psi}(x) = \sqrt{\frac{1}{V}}\sum_{k}\sum_{s=1}^{2}\sqrt{\frac{m}{\omega_k}}(u_{k,s}\hat{b}_{k,s}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} + v_{k,s}\hat{d}^{\dagger}_{k,s}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x})$$
$$\eta(x) = \sqrt{\frac{1}{V}}\sum_{k}\sum_{s=1}^{2}\sqrt{\frac{m}{\omega_k}}\gamma_4(u_{k,s}\gamma_{k,s}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} + v_{k,s}\lambda^{*}_{k,s}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}) \tag{3.182}$$

其中,$\gamma_{k,s}$,$\gamma^{*}_{k,s}$,$\lambda_{k,s}$,$\lambda^{*}_{k,s}$互相反对易,且与 $\hat{b}$,$\hat{b}^{\dagger}$,$\hat{d}$,$\hat{d}^{\dagger}$ 反对易。利用正交归一条件

$$\bar{u}_{k,s}u_{k,s'} = -\bar{v}_{k,s}v_{k,s'} = \delta_{ss'}$$
$$\bar{u}_{k,s}\gamma_4 u_{k,s'} = \bar{v}_{k,s}\gamma_4 v_{k,s'} = \frac{\omega_k}{m}\delta_{ss'}$$
$$\bar{u}_{k,s}v_{k,s'} = \bar{v}_{k,s}u_{k,s'} = 0$$
$$\bar{u}_{k,s}\gamma_4 v_{-k,s'} = \bar{v}_{k,s}\gamma_4 u_{-k,s'} = 0 \tag{3.183}$$

得到正规化的哈密顿算符

$$\hat{H}_\eta = \int d^3 x [ :\bar{\psi}(\gamma \cdot \nabla + m)\psi: - \bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta]$$

$$= \sum_{k} \sum_{s=1}^{2} [\omega_k (\hat{b}^\dagger_{k,s}\hat{b}_{k,s} + \hat{d}^\dagger_{k,s}\hat{d}_{k,s}) - \gamma^*_{k,s}\hat{b}_{k,s}$$

$$- \lambda_{k,s}\hat{d}_{k,s} - \hat{b}^\dagger_{k,s}\gamma_{k,s} - \hat{d}_{k,s}\lambda^*_{k,s}] = \sum_{k}\sum_{s=1}^{2} H_{k,s} \tag{3.184}$$

上式中的 $H_{k,s}$ 与式(3.143)有相同的形式。因此,由式(3.146)可得

$$W_0[\gamma^*, \gamma, \lambda^*, \lambda] = \exp\Big\{ - \frac{1}{2}\sum_{k}\sum_{s=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}$$

$$\times d\tau d\tau' [\gamma^*_{k,s}(\tau')\exp(-i\omega_k \mid \tau - \tau' \mid)\gamma_{k,s}(\tau)$$

$$+ \lambda^*_{k,s}(\tau')\exp(-i\omega_k \mid \tau - \tau' \mid)\lambda_{k,s}(\tau)]\Big\} \tag{3.185}$$

由式(3.182)和(3.183)

$$\gamma_{k,s} = \frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{\omega_k}}\int d^3 x e^{-ik\cdot x}\bar{u}_{k,s}\eta(x)$$

$$\lambda_{k,s} = \frac{1}{\sqrt{V}}\sqrt{\frac{m}{\omega_k}}\int d^3 x e^{-ik\cdot x}\bar{\eta}(x)v_{k,s} \tag{3.186}$$

将式(3.186) 代入式(3.185),把 $\sum_{k}$ 换成 $\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3 \boldsymbol{k}$ 并利用公式

$$\sum_{s} u_s(p)\bar{u}_s(p) = \frac{-ip + m}{2m}, \qquad \sum_{s} v_s(p)\bar{v}_s(p) = \frac{-ip - m}{2m}$$

完成对极化的求和,就得到

$$W_0[\bar{\eta}, \eta] = \exp\left\{\frac{i}{2}\iint d^4 x d^4 x' \bar{\eta}(x') S_F(x' - x)\eta(x)\right\} \tag{3.187}$$

其中

$$S_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \alpha^4 k \frac{e^{ik\cdot x}}{k^2 + m^2 - i\varepsilon}(-i\gamma \cdot k + m)$$

正是 Fermi 场的 Feyman 传播子。

由式(3.147)还可以知道 $W_0[\bar{\eta}, \eta]$ 可以写成

$$W_0[\bar{\eta}, \eta] = N\int \prod_{k,s} [db^*_{k,s} db_{k,s} dd^*_{k,s} dd_{k,s}]$$

$$\times \exp\Big\{ i\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k,s}\Big[\frac{1}{2i}(\dot{b}^*_{k,s}b_{k,s} - b^*_{k,s}\dot{b}_{k,s})$$

$$+ \frac{1}{2i}(\dot{d}^*_{k,s}d_{k,s} - d_{k,s}\dot{d}_{k,s}) - H_0(b^*, b, d^*, d)$$

$$+ \mathrm{i}\varepsilon(b_{k,s}^{*}b_{k,s} + d_{k,s}^{*}d_{k,s}) + \gamma_{k,s}^{*}b_{k,s} + b_{k,s}^{*}\gamma_{k,s}$$

$$+ \lambda_{k,s}^{*}d_{k,s} + d_{k,s}^{*}\lambda_{k,s}\Big]\mathrm{d}\tau\Big\} \tag{3.188}$$

其中,$b_{k,s}(\tau)$,$b_{k,s}^{*}(\tau)$,$d_{k,s}(\tau)$,$d_{k,s}^{*}(\tau)$为 Grassmann 代数的元素。引入

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k}\sum_{s=1}^{2}\sqrt{\frac{m}{\omega_k}}(u_{k,s}b_{k,s}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} + v_{k,s}d_{k,s}^{*}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x})$$

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{k}\sum_{s=1}^{2}\sqrt{\frac{m}{\omega_k}}(\bar{u}_{k,s}b_{k,s}^{*}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} + v_{k,s}d_{k,s}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}) \tag{3.189}$$

这里,$\psi(x)$,$\bar{\psi}(x)$是相互反对易的 Grassmann 代数的元素,不要与场算符 $\hat{\psi}(x)$、$\hat{\bar{\psi}}(x)$相混。由式(3.189)及(3.183)不难验证式(3.188)中的指数上的积分等于

$$\int \mathrm{d}^4x[\mathrm{i}\psi^{*}(x)\dot{\psi}(x) - \bar{\psi}(x)(\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + m - \mathrm{i}\varepsilon)\psi(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x)]$$

$$= \int \mathrm{d}^4x[\mathscr{L}_0(\bar{\psi}(x),\psi(x)) + \mathrm{i}\varepsilon\bar{\psi}(x)\psi(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x)]$$

又由式(3.189)有

$$\int \psi^{*}(x)\psi(x)\mathrm{d}^3x = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\sum_{s=1}^{2}(b_{k,s}^{*}b_{k,s} + d_{k,s}^{*}d_{k,s})\mathrm{d}^3k$$

因此变换 $\psi(x)$,$\psi^{*}(x)\to b_{k,s}^{*}$,$b_{k,s}$,$d_{k,s}^{*}$,$d_{k,s}$是函数空间的幺正变换,变换的 Jacobi 行列式=1。又 $\det(\gamma_4)=1$。因此

$$\prod_{k,s}[\mathrm{d}b_{k,s}^{*}\mathrm{d}b_{k,s}\mathrm{d}d_{k,s}^{*}\mathrm{d}d_{k,s}] = [\mathscr{D}\bar{\psi}][\mathscr{D}\psi]$$

式(3.188)可写为

$$W_0[\bar{\eta},\eta] = N\exp\Big\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x[\mathscr{L}_0(\bar{\psi}(x),\psi(x))$$

$$+ \mathrm{i}\varepsilon\bar{\psi}(x)\psi(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x)]\Big\}$$

$$= N\exp\Big\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x[-\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu + m - \mathrm{i}\varepsilon)\psi$$

$$+ \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x)]\Big\} \tag{3.190}$$

有相互作用的 Fermi 场的生成泛函也可以表示成类似的泛函积分的形式。以 Fermi 场与标量场相互作用的理论为例。这时拉氏函数密度有如下的形式

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_{\mathrm{int}}(\bar{\psi},\psi,\phi),\quad \mathscr{L}_0 = \mathscr{L}_{0\phi} + \mathscr{L}_{0\psi} \tag{3.191}$$

其中,$\mathscr{L}_{0\phi}$和 $\mathscr{L}_{0\psi}$分别由式(3.164)及(3.181)定义。注意到式(3.148),不难证明

$$W[\bar{\eta},\eta,J] = N\int[\mathscr{D}\bar{\psi}][\mathscr{D}\psi][\mathscr{D}\phi]$$
$$\times \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int \mathrm{d}^4x\mathscr{L}_{\text{int}}\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta\eta(x)},\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)},\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right\}$$
$$\times \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int \mathrm{d}^4x[\mathscr{L}_{0\phi} + \mathscr{L}_{0\psi} + \mathrm{i}\varepsilon\bar{\psi}\psi + \mathrm{i}\varepsilon\phi^2\right.$$
$$\left. + \hbar\bar{\eta}\psi + \hbar\bar{\psi}\eta + \hbar J\phi]\right\} \tag{3.192}$$

因此

$$W[\bar{\eta},\eta,J] = N\int[\mathscr{D}\bar{\psi}][\mathscr{D}\psi][\mathscr{D}\phi]\times\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int \mathrm{d}^4x[\mathscr{L}(\bar{\psi},\psi,\phi)\right.$$
$$\left. + \mathrm{i}\varepsilon\bar{\psi}\psi + \mathrm{i}\varepsilon\phi^2 + \hbar\bar{\eta}\psi + \hbar\bar{\psi}\eta + \hbar J\phi]\right\} \tag{3.193}$$

由式(3.169)、(3.187)和(3.192)可以写出 $W[\bar{\eta},\eta,J]$的显示表达式和微扰论展开的 Feynman 规则。

由以上推导的泛函积分公式可以看出这个理论形式有一些特点:第一,它的公式有很紧凑的形式;第二,它以比较简单的形式把量子理论的量用经典作用量表示出来。表征量子性的 Planck 常数 $\hbar$ 出现在作用量前的一个系数$\frac{\mathrm{i}}{\hbar}$及泛函积分测度 $\pi\left(\frac{\varepsilon \mathrm{d}\phi_\alpha}{\sqrt{2\pi \mathrm{i}\hbar}}\right)$中。因此,由泛函积分形式容易导出经典作用量的对称性在量子理论中的推论,例如自发破缺现象的 Goldstone 定理,规范场理论的 Ward-Takahashi 恒等式。泛函积分的极值轨道是满足经典场方程的轨道,由泛函积分形式容易导出围绕经典轨道以 $\hbar$ 为展开参数的半经典近似公式。此外,某些性质复杂的理论,例如非交换群规范场,用通常的正则形式进行量子化比较困难,泛函积分形式为找到正确的量子化规则提供了基础。泛函积分形式还被应用于其他方面得到一些有兴趣的结果。

## 3.4　连通 Green 函数和单粒子不可约顶角的生成泛函

为了书写简单,考虑单分量标量场的情况。由式(3.181)得到的 $n$ 点 Green 函数

$$G(x_1,\cdots,x_n) = \langle 0 \mid T(\hat{\phi}(x_1)\cdots\hat{\phi}(x_n)) \mid 0\rangle \tag{3.194}$$

的微扰展开项中包含一些相应于互不连通的子图形的因子。相应于 Wick 定理中各种可能的收缩方式,可以把 $G(x_1,\cdots,x_n)$表成为如下的形式

$$G(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{k=1}^{n}\Sigma(\text{各种可能的满足}\sum_{j=1}^{k} n_j = n\text{ 的 }n_j\text{ 的组合})$$

$$\Sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n\text{ 在 }k\text{ 个因子中的分配})\prod_{j=1}^{k} G_c(x_{j1},x_{j2},\cdots,x_{jn_j}) \quad (3.195)$$

其中,$G_c(x_1,\cdots,x_p)$表示连通图对 $p$ 点 Green 函数的贡献,称为 $p$ 点连通 Green 函数。引入由下式定义的泛函 $Z[J]$

$$W[J] = e^{iZ[J]} = \sum_k \frac{(iZ[J])^k}{k!} \quad (3.196)$$

因 $W[J]$归一化为 $W[J]|_{J=0}=1$,故有

$$Z[J]|_{J=0} = 0 \quad (3.197)$$

由(3.196)、(3.197)两式可得

$$(-i)^n \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_{n-1})\delta J(x_n)}\bigg|_{J=0} = \sum_{k=1}^{n}\Sigma$$

$$(\text{各种可能的满足}\sum_{j=1}^{k} n_j = n\text{ 的 }n_j\text{ 的组合})\Sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n\text{ 在 }k\text{ 个因子}$$

$$\text{中的分配})i^k\prod_{j=1}^{k}(-i)^{n_j}\frac{\delta^{n_j}Z[J]}{\delta J(x_{j1})\cdots\delta J(x_{jn_j})}. \quad (3.198)$$

比较式(3.195)与(3.198)得到

$$(-i)^{n-1}\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\bigg|_{J=0} = G_c(x_1,\cdots,x_n) \quad (3.199)$$

因此,$Z[J]$称为连通 Green 函数的生成泛函。

在重整化理论中需要考虑单粒子不可约顶角,亦即正规顶角。我们来构造一个能生成正规顶角的泛函。为此,我们作如下的泛函 Legendre 变换[10]

$$\Gamma[\phi_c] = Z[J] - \int d^4x J(x)\phi_c(x) \quad (3.200)$$

其中,经典场 $\phi_c(x)$由下式定义

$$\phi_c(x) = \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} \quad (3.201)$$

由上式知道 $J=0$ 时 $\phi_c(x)$是场的平均值

$$\phi_c(x)|_{J=0} = \langle 0|\hat{\phi}(x)|0\rangle \equiv v \quad (3.202)$$

由式(3.200)

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)} = \int\frac{\delta Z[J]}{\delta J(y)}\frac{\delta J(y)}{\delta\phi_c(x)}d^4y - \int d^4y\frac{\delta J(y)}{\delta\phi_c(x)}\phi_c(y) - J(x)$$

由上式及式(3.201)得到

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} = -J(x) \tag{3.203}$$

$\phi_c(x)$是泛函微分方程(3.203)的解。式(3.201)与(3.203)在形式上是对称的。由式(3.202)及(3.203)得到

$$\left.\frac{\delta \Gamma(\phi_c)}{\delta \phi_c(x)}\right|_{\phi_c = v} = 0 \tag{3.204}$$

上式表示 $\hat{\phi}$场的真空期望值是 $\Gamma[\phi_c]$的变分极值。

现在来看 $\Gamma[\phi_c]$高阶变分的物理意义。由式(3.201)得

$$\int \mathrm{d}^4 z \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x)\delta J(z)} \frac{\delta J(z)}{\delta \phi_c(y)} = \delta^4(x-y) \tag{3.205}$$

由式(3.203)得

$$-\frac{\delta^2 \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(z)\delta \phi_c(y)} = \frac{\delta J(z)}{\delta \phi_c(y)} \tag{3.206}$$

定义

$$\Delta_F'(x-z)_J \equiv \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x)\delta J(y)} \equiv \frac{\delta \phi_c(x)}{\delta J(y)} \tag{3.207}$$

及它的逆$(\Delta_F')^{-1}(z-y)_J$

$$\int \Delta_F'(x-z)_J (\Delta_F')^{-1}(z-y)_J \mathrm{d}^4 z = \delta^4(x-y)$$

由式(3.205)和(3.206)得到

$$-\frac{\delta^2 \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)\delta \phi_c(y)} = (\Delta_F')^{-1}(x-y)_J \tag{3.208}$$

由式(3.207)知道,当 $J=0$ 时

$$-\mathrm{i}\Delta_F'(x-y)_{J=0} = -\mathrm{i}\Delta_F'(x-y)$$

是 $\hat{\phi}$场总传播子。由式(3.203)、(3.204)知道 $J=0$ 时 $\phi_c = v$。因此有

$$-\left.\frac{\delta^2 \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)\delta \phi_c(y)}\right|_{\phi_c = v} = (\Delta_F')^{-1}(x-y) \tag{3.209}$$

即 $-\mathrm{i}\left.\frac{\delta^2 \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)\delta \phi_c(y)}\right|_{\phi_c = v}$是总传播子的逆。

对式(3.205)作变分$\frac{\delta}{\delta \phi_c}$并利用式(3.206)可得

$$\int \mathrm{d}^4 y' \mathrm{d}^4 z' \frac{\delta^3 Z[J]}{\delta J(x)\delta J(y')\delta J(z')} \frac{\delta J(y')}{\delta \phi_c(y)} \frac{\delta J(z')}{\delta \phi_c(z)}$$
$$- \int \mathrm{d}^4 y' \mathrm{d}^4 z' \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x)\delta J(y')} \frac{\delta^3 \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(y')\delta \phi_c(y)\delta \phi_c(z)} = 0$$

在上式两边乘以两个相应的 $\Delta'_{FJ}$ 并进行积分，利用式(3.206)～(3.208)可得

$$(-\mathrm{i})^2\frac{\delta^3 Z[J]}{\delta J(x)\delta J(y)\delta J(z)}=\int \mathrm{d}^4x'\mathrm{d}^4y'\mathrm{d}^4z'(-\mathrm{i})$$

$$\times\Delta'_{\mathrm{F}}(x-x')_J\cdot(-\mathrm{i})\Delta'_{\mathrm{F}}(y-y')_J(-\mathrm{i})\Delta'_{\mathrm{F}}(z-z')_J$$

$$\times\mathrm{i}\frac{\delta^3\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x')\delta\phi_c(y')\delta\phi_c(z')}\tag{3.210}$$

这里的计算是逆矩阵微商法则在连续情况下的推广。由上式可见

$$\left.\frac{\delta^3\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)\delta\phi_c(y)\delta\phi_c(z)}\right|_{\phi_c=v}$$

是单粒子不可约三点顶角。一般来说，单粒子不可约 $n$ 点顶角是去掉外线传播子且不能通过切断一条内线而分成两个不连通部分的 $n$ 点 Green 函数，也称为 $n$ 点正规顶角。

我们用归纳法证明 $\Gamma$ 在 $\phi_c=v$ 处的任意阶变分是正规顶角。设此结论对 $n$ 阶成立，且

$$(-\mathrm{i})^{n-1}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}=\int\mathrm{d}x'_1\cdots\mathrm{d}x'_n(-\mathrm{i})^n$$

$$\times\Delta'_{\mathrm{F}}(x_1-x'_1)_J\cdots\Delta'_{\mathrm{F}}(x_n-x'_n)_J\cdot\mathrm{i}\frac{\delta^n\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x'_1)\cdots\delta\phi_c(x'_n)}+R_n\tag{3.211}$$

其中，$R_n$ 为单粒子可约项。由于上式左方为有外源 $J$ 存在时的联通 Green 函数，显然 $R_n$ 可以表示成一些有内线的树图(即不含闭合圈的图)之和，每个树图由相应于 $\frac{\delta^m\Gamma}{\delta\phi_c(x_1)\cdots\delta\phi_c(x_m)}$ 的正规顶角及相应于 $\Delta'_{FJ}$ 的内线和外线组成。由式(3.210)知道 $n=3$ 时式(3.211)是成立的。对式(3.211)再作一次变分 $\frac{\delta}{\delta J}$。因为式(3.210)可写为

$$(-\mathrm{i})\frac{\delta}{\delta J(x)}(-\mathrm{i})\Delta'_{\mathrm{F}}(y-z)_J$$

$$=\int\mathrm{d}^4x'\mathrm{d}^4y'\mathrm{d}^4z'\times(-\mathrm{i})\Delta'_{\mathrm{F}}(x-x')_J(-\mathrm{i})\cdot\Delta'_{\mathrm{F}}(y-y')_J(-\mathrm{i})$$

$$\times\Delta'_{\mathrm{F}}(z-z')_J\mathrm{i}\frac{\delta^3\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x')\delta\phi_c(y')\delta\phi_c(z')}\tag{3.212}$$

所以当 $\frac{\delta}{\delta J}$ 作用到式(3.211)右方一个因子 $\Delta'_{\mathrm{F}}(y-z)_J$ 上时，得到的结果是产生一

条新的外线,一条新的内线和一个新的三点正规顶角。当$\frac{\delta}{\delta J}$作用到式(3.211)右方一个正规顶角因子上时得到

$$-\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{\delta^m\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(y_1)\cdots\delta\phi_c(y_m)}=\int\mathrm{d}^4x'(-\mathrm{i})\Delta_{\mathrm{F}}'(x-x')\times\frac{\delta^{m+1}\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x')\delta\phi_c(y_1)\cdots\delta\phi_c(y_m)}\tag{3.213}$$

由归纳假设,当 $m<n$ 时[由式(3.211)中 $R_n$ 内的项产生]这样作用的结果是产生一条新外线,它连接在 $R_n$ 内一个原来的$m$ 点正规顶角上,把它变成一个 $m+1$ 点正规顶角。上述两种 情况得到的都是有内线的树图,即单粒子可约项。不难看出,将$\frac{\delta}{\delta J(x)}$作用于式(3.211)中除$\frac{\delta^n\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x_1)\cdots\delta\phi_c(x_n)}$以外其他所有的因子上就得到 $n+1$ 点连通 Green 函数的有内线的树图的全部。因此得到

$$(-\mathrm{i})^n\frac{\delta^{n+1}Z[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_{n+1})}=\int\mathrm{d}^4x_1'\cdots\mathrm{d}^4x_{n+1}'(-\mathrm{i})^{n+1}\times\Delta_{\mathrm{F}}'(x_1-x_1')_J\cdots\Delta_{\mathrm{F}}'(x_{n+1}-x_{n+1}')_J\,\mathrm{i}\frac{\delta^{n+1}\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x_1')\cdots\delta\phi_c(x_{n+1}')}+R_{n+1}\tag{3.214}$$

上式中,$R_{n+1}$包含全部的单粒子可约项。这样就证明了

$$\left.\frac{\delta^{n+1}\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x_1)\cdots\delta\phi_c(x_{n+1})}\right|_{\phi_c=v}$$

是 $n+1$ 点正规顶角。因此我们称 $\Gamma[\phi_c]$为正规顶角生成泛函。

令 $\Gamma^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)$表示 $n$ 阶正规顶角,以上的结论表示正规顶角生成泛函可以写成如下的形式

$$\Gamma[\phi_c]=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\Gamma^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)(\phi_c(x_1)-v)\cdots(\phi_c(x_n)-v)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\tag{3.215}$$

这里已用了式(3.204),所以上式中没有 $n=1$ 的项。

由平移不变性,$\Gamma^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)$只与 $n-1$ 个坐标差 $x_i-x_n$ 有关,因此它的傅氏变换 $\widetilde{\Gamma}^{(n)}$应定义为

$$\widetilde{\Gamma}^{(n)}(p_1,\cdots,p_n)(2\pi)^4\delta^4(p_1+\cdots+p_n)=\left(\prod_{i=1}^{n}\int\mathrm{d}^4x_i\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_ix_i}\right)\cdot\Gamma^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)\tag{3.216}$$

本节中推导的公式可直接推广到 $N$ 个标量场$\phi_i(i=1,2,\cdots,N)$的情况,只要认为坐标 $x$ 中包含指标$i$,对 $x$ 的积分包含对相应的$i$ 求和就可以了。

式(3.204)确定 $\hat{\phi}$场的真空期望值,在自发破缺理论中有重要的意义。由于真空的平移不变性。真空期望值 $v$ 不依赖于时空坐标 $x$。因此我们可以在式(3.204)中限于 $\phi_c$ 不依赖于$x$ 的情况。这样就把泛函极值问题化为通常的函数极值问题。为了讨论自发破缺现象,需要考虑 $N$ 个标量场 $\hat{\phi}_i(x),i=1,2,\cdots,N$。引入由下式定义的超势 $\mathscr{V}(\varphi)$

$$\Gamma[\phi_c = \varphi] = -(2\pi)^4\delta^4(0)\mathscr{V}(\varphi) \tag{3.217}$$

其中,$\varphi=(\varphi_i)$不依赖于 $x$。由式(3.215)和(3.216)可得

$$\mathscr{V}(\varphi) = -\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\widetilde{\Gamma}^{(n)}_{i_1\cdots i_n}(0,0,\cdots,0)(\varphi_{i_1}-v_{i_1})\cdots(\varphi_{i_n}-v_{i_n}) \tag{3.218}$$

因此有

$$\left.\frac{\mathrm{d}^n\mathscr{V}(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi_{i_1}\cdots\mathrm{d}\varphi_{i_n}}\right|_{\varphi=v} = -\widetilde{\Gamma}^{(n)}_{i_1\cdots i_n}(0,0,\cdots,0) \tag{3.219}$$

相应于式(3.204)现在有

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathscr{V}(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi_i}\right|_{\varphi=v} = 0 \tag{3.220}$$

由式(3.208)及(3.219)有

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{V}(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi_i\mathrm{d}\varphi_j}\right|_{\varphi=v} = [\widetilde{\Delta}'^{-1}_{\mathrm{F}}(0)]_{ij} \tag{3.221}$$

其中,$[\widetilde{\Delta}'^{-1}_{\mathrm{F}}(p)]_{ij}$是$[\Delta'^{-1}_{\mathrm{F}}(x)]_{ij}$的傅氏变换。矩阵 $\widetilde{\Delta}'^{-1}_{\mathrm{F}}(p)$的第 $i$ 个本征值在 $p^2=-m_i^2$ 处有零点,其中 $m_i$ 为粒子的质量,此外无其他零点。在零点附近它有$(p^2+m_i^2)$的行为。因此,矩阵 $\widetilde{\Delta}'^{-1}_{\mathrm{F}}(0)$的本征值在 $m_i\neq 0$ 时是正的,式(3.220)和(3.221)表示此时 $\mathscr{V}(\varphi)$在 $\varphi=v$ 处是极小。

设拉氏函数 $L$ 在变换

$$\phi_i \to \phi_i - \mathrm{i}\theta_\alpha L^\alpha_{ij}\phi_j, \qquad \alpha = 1,2,\cdots,r \tag{3.222}$$

下不变,$L_{ij}$取为实对称矩阵。在 $Z[J]$的泛函积分表示式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}Z[J]} = N\int[\mathscr{D}\phi]\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x[\mathscr{L}(\phi)+\mathrm{i}\varepsilon\phi_j\phi_j+J_i\phi_i]\right\}$$

中做形如式(3.222)的变量替换可以推出 $Z[J]$在如下的变换

$$J_i \to J_i - \mathrm{i}\theta_\alpha L^\alpha_{ij}J_j \tag{3.223}$$

下是不变的。由 $Z[J]$的这个性质及 $\Gamma[\phi_c]$的表示式

$$\Gamma[\phi_c] = Z[J] - \int\mathrm{d}^4xJ_i(x)\phi_i(x) \tag{3.224}$$

$$\phi_{ci}(x) = \frac{\delta Z[J]}{\delta J_i(x)} \tag{3.225}$$

可知 $\mathscr{V}(\varphi)$在变换

$$\varphi_i \to \varphi_i - \mathrm{i}\theta_\alpha L_{ij}^\alpha \varphi_j \tag{3.226}$$

下不变,即

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{V}(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi_i} L_{ij}^\alpha \varphi_j = 0, \qquad \alpha = 1,2,\cdots,r \tag{3.227}$$

对上式微分并利用式(3.220)、(3.221)得到

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{V}(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi_i \mathrm{d}\varphi_k}\right|_{\varphi=v} L_{ij}^\alpha v_j = \widetilde{\Delta}'^{-1}_{\mathrm{F}}(0)_{ki} L_{ij}^\alpha v_j = 0 \qquad \alpha = 1,2,\cdots,r \tag{3.228}$$

由于矩阵 $\Delta'^{-1}_{\mathrm{F}}(0)$的零本征值相应于零质量粒子,由式(3.228)可以推出 Goldstone 定理,即零质量 Goldstone 粒子的个数等于使 $L_{ij}^\alpha v_j \neq 0$ 的生成元的个数。这个证明考虑了微扰论的任意阶次,不像以前用拉氏量中 $V(\varphi)$项的讨论只限于树图。

## 3.5 按圈数展开法

生成泛函 $W[J], Z[J], \Gamma[\phi_c]$可以如前面所说按照微扰论即按照耦合常数的幂次展开。另一种做法是按照 Feynman 图的圈数展开。这两种做法在一些情况下(例如有自发破缺时)是不一样的。为了说明按圈数展开的性质,可以人为地引入一个参数 $\lambda$,把生成泛函写为

$$\begin{aligned}
W[J] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Z[J]} &= N\int[\mathscr{D}\phi]\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\left[\frac{1}{\hbar\lambda}(\mathscr{L}(x) + \mathrm{i}\varepsilon\phi_j\phi_j) + J_j\phi_j\right]\right\} \\
&= N\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int \mathrm{d}^4x\,\frac{1}{\lambda}\mathscr{L}_{\mathrm{int}}\left[\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right]\right\}\cdot\exp\left\{\frac{\lambda\hbar}{2\mathrm{i}}\int \mathrm{d}^4x'\mathrm{d}^4x \right. \\
&\quad \left. \times J_j(x')\Delta_{\mathrm{F}}(x'-x)J_j(x)\right\}
\end{aligned} \tag{3.229}$$

把上式按 $\lambda$ 的幂次展开,然后取 $\lambda = 1$。由上式可以看到,每个顶点有一个因子 $\lambda^{-1}$,每个传播子有一个因子 $\lambda$,因此,每个有 $E$ 条外线,$I$ 条内线和 $V$ 个顶角的 Feynman 图有一个因子$(\lambda)^{E+I-V}$。又由于对任意的含 $L$ 个闭合圈的 Feynman 图有关系式

$$L = I - V + 1$$

可见按 $\lambda$ 的幂次展开就是按圈数 $L$ 的展开。由此可以看到按圈数展开的优点,由于在式(3.229)中$\frac{1}{\lambda}$是作为一个系数乘在 $\mathscr{L}$之前的,在按圈数展开的各阶中,$\mathscr{L}$所有的对称性都能明显地保持。注意,式(3.229)中 $\lambda$ 的地位和 $\hbar$ 的地位是相似的,因此按圈数的展开也是按 $\hbar$ 的幂次的展开。这个展开把 $\hbar$ 看作小量,也就是半经典近似。注意,半经典近似的精神是把拉氏函数中的量都看作 $\hbar^0$ 阶。例如,$\phi^2$ 项

的系数 $m^2$ 如果换成量子场论中粒子的质量也会出现 $\hbar^{-2}$ 的系数，但是在这里仍看做 $\hbar^0$ 阶。

现在我们来叙述按 $\hbar$ 幂次的展开写出生成泛函 $W[J]$, $Z[J]$ 和 $\Gamma[\phi_c]$ 的方法。在 $\hbar$ 看作小量时，按照稳定位相法，生成泛函 $W[J]=e^{iZ[J]}$ 的泛函积分表示式(3.178)中主要由极值轨道附近的轨道做出贡献。极值轨道 $\phi_0(x)$ 满足经典运动方程

$$\left.\frac{\delta S[\phi_0,J]}{\delta\phi_0(x)}\right|_J = 0 \tag{3.230}$$

其中

$$S[\phi_0,J] = \int d^4x[\mathscr{L}(\phi_0) + J\phi_0] \tag{3.231}$$

即

$$\partial_\mu\partial_\mu\phi_0 - (m_0^2 - i\varepsilon)\phi_0 + \mathscr{L}'_{\text{int}}(\phi_0) = -J(x) \tag{3.230$'$}$$

上式中已把 $\hbar J$ 改写为 $J$。把 $\phi$ 场在 $\phi_0$ 附近展开，在式(3.178)中做变量替换 $\phi(x)\to\phi_0(x)+\phi(x)$，即得

$$\begin{aligned}e^{iZ[J]} = W[J] = N\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S[\phi_0,J]\right\}\int[\mathscr{D}\phi]\\ \times\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\left[-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\cdot\partial\phi_\mu - \frac{1}{2}(m_0^2 - i\varepsilon\right.\right.\\ \left.\left.- \mathscr{L}''_{\text{int}}(\phi_0))\phi^2 + \sum_{k\geqslant 3}\frac{\phi^k}{k!}\mathscr{L}^{(k)}_{\text{int}}(\phi_0)\right]\right\}\end{aligned} \tag{3.232}$$

由于 $\phi_0$ 满足极值条件式(3.230)，$\phi$ 的一次项在式(3.232)中不出现。在式(3.232)右方的泛函积分中做变量替换 $\phi\to\hbar^{\frac{1}{2}}\phi$，除一个可以吸收到归一化常数 $N$ 中的常系数以外，此泛函积分变为

$$\begin{aligned}\int\prod_\alpha\frac{d\phi_\alpha}{(2\pi i)^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{i\int d^4x\left[-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}\right.\right.\\ \left.\left.\times(m_0^2 - i\varepsilon - \mathscr{L}''_{\text{int}}(\phi_0))\phi^2 + \sum_{k\geqslant 3}\hbar^{\frac{k}{2}-1}\frac{\phi^k}{k!}\mathscr{L}^{(k)}_{\text{int}}(\phi_0)\right]\right\}\end{aligned} \tag{3.233}$$

把式(3.233)按照 $\hbar$ 的幂级数展开，$\phi$ 的奇次项对积分无贡献。取 $\hbar$ 的最低阶近似，式(3.233)中 $k\geqslant 3$ 的项可忽略。这时泛函积分可积出而得到

$$\begin{aligned}\int\prod_\alpha\frac{d\phi_\alpha}{(2\pi i)^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-i\int d^4x\left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}\right.\right.\\ \left.\left.\times(m_0^2 - i\varepsilon - \mathscr{L}''_{\text{int}}(\phi_0))\phi^2\right]\right\} = \int\prod_\alpha\frac{d\phi_\alpha}{(2\pi i)^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

$$\times \exp\{-\mathrm{i}\varepsilon^4 \phi_\alpha A_{\alpha\beta}\phi_\beta\} = [\mathrm{Det}(\varepsilon^4 A_{\alpha\beta})]^{-\frac{1}{2}} \tag{3.234}$$

其中,矩阵$(A_{\alpha\beta})$由下式定义

$$A_{\alpha\beta}\phi_\beta = (-\Box + m_0^2 - \mathrm{i}\varepsilon - \mathscr{L}''_{\mathrm{int}}(\phi_0))_{\alpha\beta}\phi_\beta \xrightarrow{\varepsilon\to 0} (-\partial_\mu\partial_\mu + m_0^2 - \mathrm{i}\varepsilon - \mathscr{L}''_{\mathrm{int}}(\phi_0))\phi(x) \tag{3.235}$$

由于一个常系数总可以吸收到归一化因子 $N$ 中去,为计算式(3.234)右方的行列式我们只须计算行列式

$$[\mathrm{Det}(\Delta_{\mathrm{F}}A)]^{-\frac{1}{2}}$$

这里,矩阵 $\Delta_{\mathrm{F}}$ 的定义为

$$(\Delta_{\mathrm{F}})_{\alpha\beta} = (-\Box + m_0^2 - \mathrm{i}\varepsilon)^{-1}_{\alpha\beta} \tag{3.236}$$

即

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\Delta_{\mathrm{F}})_{\alpha\beta} = \varepsilon^4\Delta_{\mathrm{F}}(x-y) \tag{3.237}$$

因此有如下的写成矩阵形式的关系式

$$\Delta_{\mathrm{F}}A = I - \Delta_{\mathrm{F}}\mathscr{L}''_{\mathrm{int}}(\phi_0) \tag{3.238}$$

其中,$\mathscr{L}''_{\mathrm{int}}(\phi_0)$为对角矩阵。由上式得到

$$\mathrm{Det}(\Delta_{\mathrm{F}}A) = \exp\{\mathrm{Tr}\ \ln(\Delta_{\mathrm{F}}A)\} = \exp\{\mathrm{Tr}\ \ln(I - \Delta_{\mathrm{F}}\mathscr{L}''_{\mathrm{int}}(\phi_0))\} \tag{3.239}$$

将式(3.239)代入式(3.234)再代入式(3.232)就得到

$$Z[J] = S[\phi_0, J] + \frac{\mathrm{i}}{2}\hbar\mathrm{Tr}\ \ln[1 - \Delta_{\mathrm{F}}\mathscr{L}''_{\mathrm{int}}(\phi_0)] + O(\hbar^2) \tag{3.240}$$

上式中省略了一个来自归一化的常数项。要由 $Z[J]$求出 $\Gamma[\phi_c]$,一般需要由关系式

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \phi_c(x) \tag{3.241}$$

解出由 $\phi_c(x)$表示的$J(x)$。但是在 $\hbar$ 一次项近似下可以不解泛函方程(3.241)而求出 $\Gamma[\phi_c]$,现在我们来证明这一点。由式(3.231)及(3.230)可得

$$\frac{\delta S[\phi_0, J]}{\delta J(x)} = \left.\frac{\delta S[\phi_0, J]}{\delta J(x)}\right|_{\phi_0} = \phi_0(x)$$

由上式及式(3.240)和(3.241)知道

$$\phi_c(x) = \phi_0(x) + O(\hbar) \tag{3.242}$$

由上式及式(3.230)我们有

$$S[\phi_c, J] = S[\phi_0, J] + \int \left.\frac{\delta S[\phi, J]}{\delta\phi(x)}\right|_{\phi=\phi_0}(\phi_c - \phi_0)(x)\mathrm{d}^4 x$$

$$+(\phi_c-\phi_0)\text{ 的二次项 }=S[\phi_0,J]+O(\hbar^2) \tag{3.243}$$

记住 $S[\phi_c,J]=S[\phi_c]+\int J\phi_c \mathrm{d}^4x$，由式(3.240)、(3.242) 和(3.243) 得到

$$\Gamma[\phi_c]=S[\phi_c]+\frac{\mathrm{i}}{2}\hbar \mathrm{Tr}\ \ln(1-\Delta_F\mathscr{L}''_{\mathrm{int}}(\phi_c))+O(\hbar^2) \tag{3.244}$$

把上式中的对数展开为 $\mathscr{L}''_{\mathrm{int}}(\phi_c)$的幂级数

$$-\mathrm{i}\hbar\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\mathrm{Tr}(\Delta_{\mathrm{F}}\mathscr{L}''_{\mathrm{int}}(\phi_c))^n$$

并利用式(3.237)把它写成积分形式就得到

$$\begin{aligned}\Gamma[\phi_c]=S[\phi_c]-\mathrm{i}\hbar\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\int &\mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n\Delta_{\mathrm{F}}(x_1\\ &-x_2)\mathscr{L}''_{\mathrm{int}}(\phi_c(x_2))\cdot\Delta_{\mathrm{F}}(x_2-x_3)\mathscr{L}''_{\mathrm{int}}(\phi_c(x_3))\\ &\cdots\Delta_{\mathrm{F}}(x_n-x_1)\mathscr{L}''_{\mathrm{int}}(\phi_c(x_1))\end{aligned} \tag{3.245}$$

由上式可以看到，$\Gamma[\phi_c]$的 $\hbar^0$ 阶项是经典作用量，这是树图。还可以看到 $\Gamma[\phi_c]$的 $\hbar$ 一阶项是无穷多个单圈图之和，每个图由一些代表标量场传播子 $-\mathrm{i}\Delta_{\mathrm{F}}$ 的内线和相应于因子 $\mathrm{i}\mathscr{L}''_{\mathrm{int}}(\phi_c)$的顶点组成。它们正是原来的理论中全部的单圈图顶角在外线因子 $\phi(x)=\phi_c(x)$时的值。因子$\frac{1}{2n}$恰好是$n$ 阶单圈图顶角的对称性因子，由于轮换 $n$ 个顶点及改变它们的转向不构成新图形，Dyson 公式中的因子$\frac{1}{n!}$未完全消去。式(3.245)是 $\Gamma[\phi_c]$按圈数展开的前两项，依次考虑式(3.233)中 $k>3$的项可以得到多圈图。

对拉氏函数

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi-\frac{1}{2}m_0^2\phi^2-\frac{1}{4!}g_0\phi^4 \tag{3.246}$$

的情况，$\mathscr{L}''_{\mathrm{int}}(\phi_c)=-\frac{1}{2}g_0\phi_c^2$，这时 $n=1,2,3$ 的三个单圈图如图 3.1 所示。超势 $\mathscr{V}(\varphi)$可以由式(3.245)及(3.217)得到

$$\mathscr{V}(\varphi)=\frac{1}{2}m_0^2\varphi^2+\frac{1}{4!}g_0\varphi^4+\mathrm{i}\hbar\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\left(\frac{\frac{1}{2}g_0\varphi^2}{k^2+m_0^2-\mathrm{i}\varepsilon}\right)^n \tag{3.247}$$

其中，$\varphi$ 与 $x$ 无关。上式右方第一和第二项就是拉氏函数中的位势项(不含场的导数的项)，积分项是一些在顶点处传递动量为零的单圈图之和。每个顶点的因子$\frac{1}{2}$

是由于交换这个顶点的两条外线不构成新图形，$\phi^4$ 耦合项的系数$\frac{1}{4!}$未完全消去。

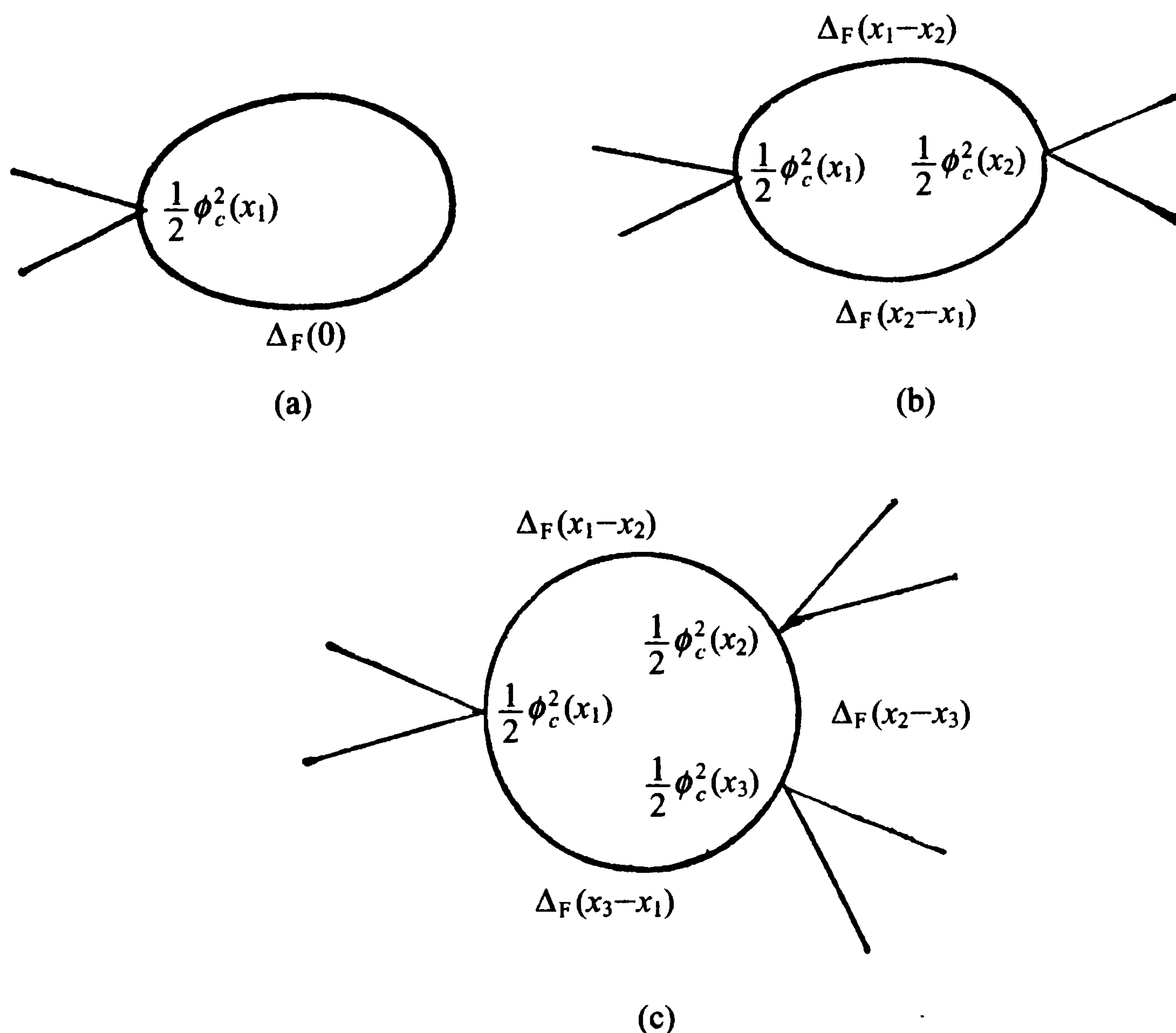



图 3.1

式(3.247)右方 $n=1,2$ 两项是发散的，它们就是 $\widetilde{\Gamma}^{(2)}(0)$和 $\widetilde{\Gamma}^{(4)}(0,0,0,0)$的发散项，可以按照通常的重整化手续消除。令

$$\varphi = Z^{\frac{1}{2}}\varphi_R, \qquad g_0 = (g+\delta g)Z^{-2}, \qquad m_0^2 = Z(m^2+\delta m^2) \tag{3.248}$$

用重整化的参数 $m^2$ 和 $g$ 及重整化场$\phi_R$ 表示，式(3.246)可写为

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &-\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_R\partial_\mu\varphi_R - \frac{1}{2}m^2\varphi_R^2 - \frac{1}{4!}g\varphi_R^4 \\ &-\frac{1}{2}(Z-1)\partial_\mu\varphi_R\partial_\mu\varphi_R - \frac{1}{2}\delta m^2\varphi_R^2 - \frac{1}{4!}\delta g\varphi_R^4\end{aligned} \tag{3.249}$$

选择 $\delta m^2$，$Z$ 及 $\delta g$ 抵消 $\widetilde{\Gamma}^{(2)}(p)$和 $\widetilde{\Gamma}^{(4)}(p_1,\cdots,p_4)$中的发散。在单圈近似下只需考虑图 3.1(a)和 3.1(b)。由通常的微扰论计算不难验证，由于图 3.1(a)与外线动量 $p$ 无关，$Z=1$。而且，如果选

$$\frac{1}{2}\delta m^2 = -\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\frac{1}{2}g}{k^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}$$

$$\frac{1}{4!}\delta g = -\frac{\mathrm{i}\hbar}{4}\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}\left(\frac{\frac{1}{2}g}{k^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}\right)^2 \tag{3.250}$$

则 $\widetilde{\Gamma}^{(2)}(p)$和 $\widetilde{\Gamma}^{(2)}(p_1,\cdots,p_4)$中的发散完全抵消。由于 $\delta m^2$ 和 $\delta g$ 都是 $\hbar^1$ 阶,在式(3.247)中的积分项内可以把 $g_0$ 和 $m_0$ 换成 $g$ 和 $m$。这样,由式(3.248)和(3.249)就得到

$$\mathscr{V}(\varphi_R) = \frac{1}{2}m^2\varphi_R^2 + \frac{1}{4!}g\varphi_R^4 + \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}\sum_{n=3}^{\infty}\times\frac{1}{n}\left(\frac{\frac{1}{2}g\varphi_R^2}{k^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}\right) \tag{3.251}$$

上式右方对 $n$ 的求和限于$n\geqslant3$。由式(3.218)和(3.221)可以看到,式(3.251)中所取的重整化条件为

$$\widetilde{\Delta}'_{\mathrm{F}}(0) = \frac{1}{m^2}$$

$$\widetilde{\Gamma}^{(4)}(0,0,0,0) = g \tag{3.252}$$

条件式(3.252)与通常用的在质壳上重整化的条件差一个有限的重整化。在 $m\neq0$ 时这里的 $m$ 不是传播子的极点,所以它不是粒子的物理质量,$g$ 也不是物理粒子的零动量散射振幅。但是物理质量和耦合常数可以用 $m,g$ 表示。如果选取不同于式(3.252)的重整化条件则式(3.251)中应附加有限项 $\hbar A\varphi_R^2+\hbar B\varphi_R^2$,其中 $A,B$ 为由重整化条件决定的常数。关于重整化的一般讨论可参看 5.1 节。式(3.251)中最后一项在作 Wick 转动后可以写为

$$\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}\left[\ln\left(1+\frac{\frac{1}{2}g\varphi_R^2}{k^2+m^2}\right)-\frac{\frac{1}{2}g\varphi_R^2}{k^2+m^2}-\frac{\left(\frac{1}{2}g\varphi_R^2\right)^2}{2(k^2+m^2)^2}\right]$$

$$= -\frac{\hbar}{32\pi^2}\lim_{\Lambda\to\infty}\int_0^{\Lambda^2} x\,\mathrm{d}x\left[\ln\left(1+\frac{\frac{1}{2}g\varphi_R^2}{x+m^2}\right)-\frac{\frac{1}{2}g\varphi_R^2}{x+m^2}-\frac{\frac{1}{2}(g\varphi_R)^2}{2(x+m^2)^2}\right]$$

上式可以算出,得到

$$\mathscr{V}(\varphi_R) = \frac{1}{2}m^2\varphi_R^2 + \frac{g}{4!}\varphi_R^4 + \frac{\hbar}{64\pi^2}\left[\left(m^2+\frac{g}{2}\varphi_R^2\right)^2 \cdot\ln\left(\frac{m^2+\frac{g}{2}\varphi_n^2}{m^2}\right)-\frac{g}{2}m^2\varphi_R^2-\frac{3g^2}{8}\varphi_R^4\right] \tag{3.253}$$

上面对 $\mathscr{V}(\varphi_R)$的单圈图的计算可以推广到 $m^2\leqslant0$ 的情况,为了避免传播子中

非物理的极点或避免 $k \simeq 0$ 处的红外发散,我们引入一个任意参数 $M^2>0$ 把势 $V(\phi)$写为

$$V(\phi) = \frac{1}{2}M^2\phi^2 - \frac{1}{2}(M^2 - m^2)\phi^2 + \frac{g}{4!}\phi^4$$

并把上式中最后两项看作相互作用项,这时传播子是$\frac{1}{k^2+M^2}$,有效势可写为

$$\mathscr{V}(\varphi_R) = \frac{1}{2}m\varphi_R^2 + \frac{g}{4!}\varphi_R^4 + \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\sum_n\frac{1}{n}\times\left[\frac{m^2 - M^2 + \frac{g}{2}\varphi_R^2}{k^2 + M^2}\right]^n + \text{抵消项} \tag{3.254}$$

由上式可以得到

$$\mathscr{V}(\varphi_R) = \frac{1}{2}m^2\varphi_R^2 + \frac{g}{4!}\varphi_R^4 + \frac{\hbar}{64\pi^2}\left(m^2 + \frac{g}{2}\varphi_R^2\right)^2 \times \ln\left[\frac{m^2 + \frac{g}{2}\varphi_R^2}{M^2}\right] + A\hbar\varphi_R^2 + B\hbar\varphi_R^4 \tag{3.255}$$

其中,$A$,$B$ 由重整化条件决定。重新定义 $M$ 可以把$A$,$B$ 项吸收到对数项中去。

以上计算还可进一步推广到包含规范作用的情况。以复标量场与电磁场的作用为例,这时拉氏量密度为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - (\partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu)\varphi^*(\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu)\varphi - m^2\varphi^*\varphi - g(\varphi^*\varphi)^2 + \text{抵消项} \tag{3.256}$$

这里我们略去指标 $R$,用 $\varphi$,$F_{\mu\nu}$ 表示重整化场。复标量场 $\varphi$ 可以写为

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + \mathrm{i}\varphi_2) \tag{3.257}$$

在计算有效势时用 Landau 规范较为方便,在这个规范中传播子

$$\Delta_{\mu\nu} = \frac{\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu/k^2}{k^2}$$

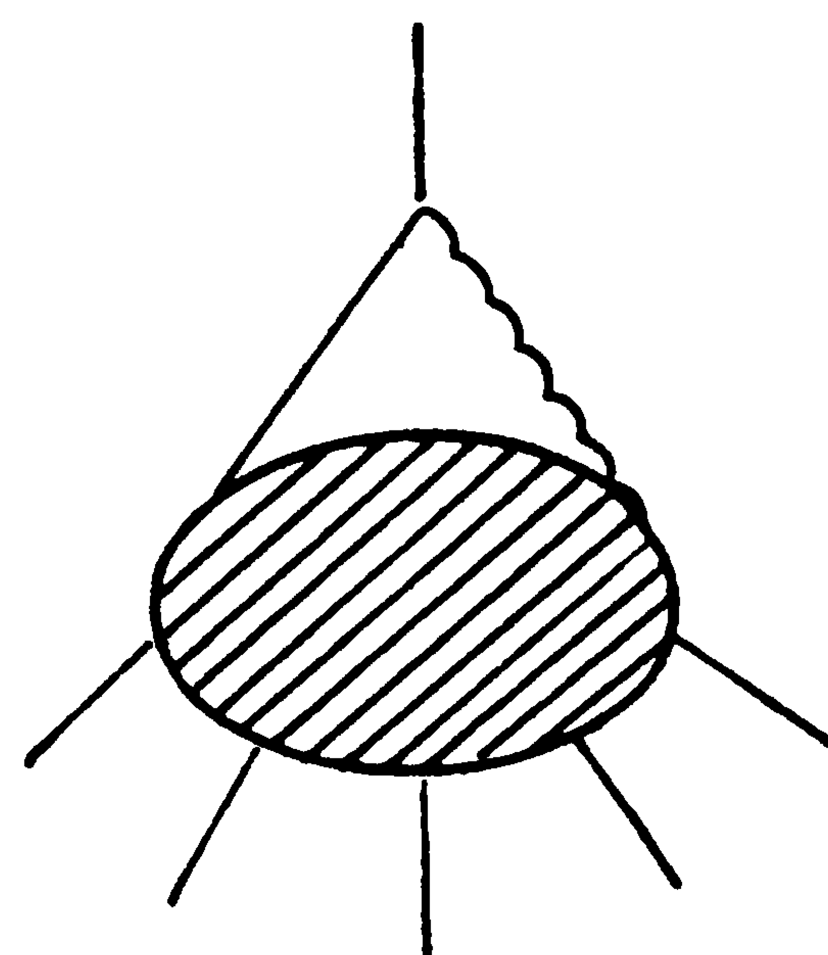


图 3.2

满足方程 $k_\mu\Delta_{\mu\nu}=0$。由于两条动量为 $k_1$ 和 $k_2$ 的标量场线与一条电磁场线的作用顶点正比于 $k_1-k_2$,考虑到在表示 $\mathscr{V}(\varphi)$的 Feynman 图中外线动量为零可以知道在 Landau 规范中不存在如图 3.2 所示的 $\mathscr{V}(\varphi)$的 Feyn-

man 图。另外，由整体规范不变性知道 $\mathscr{V}(\varphi)$ 只是 $\varphi^*\varphi=\frac{1}{2}(\varphi_1^2+\varphi_2^2)$ 的函数，因此只需考虑外线仅有 $\varphi_1$ 的图形就可以定出 $\mathscr{V}(\varphi)$。对这种图形，单圈图只有内线都是 $\varphi_1$ 或都是 $\varphi_2$ 或都是规范场三种。$\varphi_2$ 单圈图及规范场单圈图的计算与只有一种实标量场 $\varphi_1$ 的单圈图计算相似。其差别是由于标量场耦合项是 $g(\varphi^*\varphi)^2=\frac{1}{4}(\varphi_1^4+2\varphi_1^2\varphi_2^2+\varphi_2^4)$，$\varphi_1$ 圈图每个顶点的系数是 $\frac{1}{2}\frac{4!}{4}g=3g$，$\varphi_2$ 圈图的每个顶点的系数是 $\frac{1}{2}\frac{2^3}{4}g=g$。对于规范场的圈图要考虑传播子的分子。由于

$$\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\left(\delta_{\nu\rho}-\frac{k_\nu k_\rho}{k^2}\right)=\delta_{\mu\rho}-k_\mu k_\rho/k^2$$

$$\delta_{\mu\mu}-k_\mu k_\mu/k^2=3$$

规范场圈图比 $\varphi_1$ 圈图多一个因子 3。此外，规范场没有质量，规范场耦合 $e^2\varphi^*\varphi A_\mu^2=\frac{1}{2}e^2(\varphi_1^2+\varphi_2^2)A_\mu^2$，顶点因子为 $\frac{1}{2}\times\frac{2^2}{2}e^2=e^2$。因此得到

$$\begin{aligned}\mathscr{V}(\varphi)=&\ m^2\varphi^*\varphi+g(\varphi^*\varphi)^2+\frac{\hbar}{64\pi^2}\Big\{(m^2+2g\varphi^*\varphi)^2\\&\times\ln\frac{m^2+2g\varphi^*\varphi}{M^2}+(m^2+6g\varphi^*\varphi)^2\\&\times\ln\frac{m^2+6g\varphi^*\varphi}{M^2}+3e^4(2\varphi^*\varphi)^2\ln\frac{2e^2\varphi^*\varphi}{M^2}\Big\}\end{aligned}\tag{3.258}$$

本节内容可参阅评述文章文献[4]，[11]～[13]。

## 参 考 文 献


1 P A M Dirac. Physikalische Zeitschrift Sowjetunion, Band 3, Heft,1933,**1**:64

2 R P Feynman. Rev Mod Phys. 1948,**20**:267;Phys Rev. 1950,**80**:440

3 R P Feynman and A R Hibbs. Quantum Mechanics and Path Integral. New York:McGraw-Hill, 1965

4 E S Abers and B W Lee. Phys Reports. 1973,**9C**,No. 1

5 L D Fadeev. in Methods in Field Theory p. 1,eds. R. Balian and J. ZinnJustin. North-Holland Publishing Co

6 李政道. 粒子物理和场论简引（第十九章）. 科学出版社,1984

7 T D Lee and C N Yang. Phys Rev. 1962,**128**:885

8 J Schwinger. Proc Nat Acad Sci. 1951,**37**:452

9 F A Berezin. Method of the Second Quantization. NY-London:Academic Press, 1966

10 G Jona-Lasinio. Nuovo Cimento. 1964,**34**:1790

11 B Zumino. in Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory, eds. S Deser and H Pendleton. Cambridge: M I T Press, 1970, **2**:439

12 H M Fried. Functional Methods and Models in Quantum Field Theory. Cambridge: MIT Press, 1972

13 R Jackiw. Phys Rev. 1974, **D9**:1686; S Coleman and E Weinberg. Phys Rev. 1973, **D7**:1888

# 第四章　非 Abel 规范场的量子化

## 4.1　电磁场的量子化

规范场的量子化有它特殊的问题。这一点在电磁场的情况已经表现出来。为了说明这些问题,我们首先回忆电磁场的量子化理论。量子电动力学的拉氏量为

$$L = \int \mathrm{d}^3 x \Big[ -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$$

$$+ e_0 j_\mu A_\mu - \bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi \Big] \tag{4.1}$$

拉氏运动方程为

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = - e_0 j_\nu \tag{4.2}$$

通常的正则量子化手续要求先把理论写成哈密顿形式,然后使场的广义坐标 $\varphi_\alpha(x)$和其正则共轭场量 $\pi_\sigma(x) = \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}_\sigma(x)}$满足正则对易关系。但是在电磁场理论中我们不能把所有的 $A_\mu(x)$都看作场的独立的正则坐标。这是因为 $\dot{A}_0(x)$不出现在拉氏量式(4.1)中,如果把 $A_0$ 看作正则坐标则相应的正则动量将恒等于零,这与正则对易关系矛盾。另一方面拉氏方程组(4.2)中,$\nu = 4$ 的一个为 Gauss 定律

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = e_0 \rho(x) \tag{4.3}$$

如果我们把 $A_i(x)(i = 1,2,3)$看作独立的正则坐标,则其共轭场量为

$$\pi_i = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_i} = - E_i$$

方程(4.3)不含共轭场量 $E$ 对时间的微商,因此它不能写成哈密顿运动方程的形式。从哈密顿形式的观点,这个方程应看作附加于运动方程的约束条件。Gauss 约束条件式(4.3)意味着 $E_i$ 不是完全独立的。因此不能把所有的 $A_i$ 都看作独立的正则坐标。

理论中包含非独立的多余变量,这是与规范自由度相联系的。规范自由度不是物理的自由度。因此在进行正则量子化时应当选取规范条件,使得非独立的量从哈密顿形式中消去。对电磁场理论一个常用的规范条件是库仑规范条件

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{4.4}$$

在电磁场理论中如果要求势 $A_\mu(x)$在$|\boldsymbol{x}|\to\infty$时趋于零,对任意给定的势总存在唯一的规范变换使变换后的势满足库仑规范条件[1]。场强 $\boldsymbol{E}$ 和势 $\boldsymbol{A}$ 都可以分解为横向和纵向的两个部分

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_\perp + \boldsymbol{E}_{/\!/}, \qquad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_\perp + \boldsymbol{A}_{/\!/}$$

$$\boldsymbol{E}_\perp = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}_\perp, \qquad \boldsymbol{E}_{/\!/} = -\nabla A_0 - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}_{/\!/}$$

横向部分满足

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}_\perp = 0,\ \nabla\cdot\boldsymbol{A}_\perp = 0$$

纵向部分是一个标量函数的梯度。约束条件式(4.3)表示纵场

$$\boldsymbol{E}_{/\!/} = e_0\,\nabla\nabla^{-2}\rho$$

不是独立的力学变量。因此,要求纵向势 $\boldsymbol{A}_{/\!/}$为零的库仑规范条件式(4.4)是一个很方便的条件。在条件式(4.4)下由式(4.3)可以解出

$$A_0(x) = \frac{e_0}{4\pi}\int\frac{\mathrm{d}^3y\rho(\boldsymbol{y},\ x_0)}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|} \tag{4.5}$$

其中

$$\rho(x) = \psi^*(x)\psi(x)$$

把拉氏量式(4.1)中含$\partial_i A_0$ 的项进行分部积分,丢掉面积分项并利用式(4.5)及(4.4)可将式(4.1)写为

$$L = \int\mathrm{d}^3x\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_0}\boldsymbol{A}_\perp\right)^2 - \frac{1}{2}(\nabla\times\boldsymbol{A}_\perp)^2 - \bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu + m)\psi + e_0\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}_\perp\right] - \frac{e_0^2}{8\pi}\int\frac{\rho(\boldsymbol{x},\ x_0)\rho(\boldsymbol{y},\ x_0)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\mathrm{d}^3y \tag{4.6}$$

由此得到哈密顿量

$$H = \int\mathrm{d}^3x\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}_\perp)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\times\boldsymbol{A}_\perp)^2 - e_0\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}_\perp + \bar{\psi}(\gamma_i\partial_i + m)\psi\right] + \frac{e_0^2}{8\pi}\int\frac{\rho(\boldsymbol{x},\ x_0)\rho(\boldsymbol{y},\ x_0)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\mathrm{d}^3\boldsymbol{y} \tag{4.7}$$

现在可以进行正则量子化了。为了分离出独立的动力学变量我们把 $\boldsymbol{A}_\perp(x)$分解为傅氏级数

$$\boldsymbol{A}_\perp(x) = \sqrt{\frac{2}{V}}\sum_{k_1>0}(a_\sigma^1(\boldsymbol{k},\ x_0)\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}) + a_\sigma^2(\boldsymbol{k},\ x_0)\sin\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}^\sigma(k) \tag{4.8}$$

其中，$\boldsymbol{e}^{\sigma}(\boldsymbol{k})$为实的横向极化矢量，满足 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{e}^{\sigma}(\boldsymbol{k})=0$。拉氏量中含$\frac{\partial}{\partial x_0}\boldsymbol{A}_{\perp}$的项可写为

$$\frac{1}{2}\int \boldsymbol{E}_{\perp}^2\, \mathrm{d}^3 x = \frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial}{\partial x_0}\boldsymbol{A}_{\perp}\right)^2 \mathrm{d}^3 x = \frac{1}{2}\sum_{\substack{\sigma=1,2\\ l=1,2}}\sum_{k_1>0}(\dot{a}_{\sigma}^{l}(\boldsymbol{k},\ x_0))^2 \tag{4.9}$$

取 $a_{\sigma}^{l}(\boldsymbol{k},\ x_0)$为独立的正则坐标，则正则对易关系为

$$[a_{\sigma}^{l}(\boldsymbol{k},\ x_0),\ \dot{a}_{\sigma'}^{m}(\boldsymbol{k}' x_0)] = \mathrm{i}\delta_{lm}\delta_{\sigma\sigma'}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} \tag{4.10}$$

由上式及公式

$$\sum_{\sigma} e_i^{\sigma} e_j^{\sigma} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\boldsymbol{k}|^2} \tag{4.11}$$

得到 $\boldsymbol{A}_{\perp}$和 $\boldsymbol{E}_{\perp}$的正则对关系

$$[\boldsymbol{A}_{\perp i}(x),\ \boldsymbol{E}_{\perp j}(y)]_{x_0=y_0} = -\mathrm{i}\left(\delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\nabla^{-2}\right)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{4.12}$$

由以上的讨论得到的教训是：在规范理论中进行正则量子化必须取定规范，以便解出约束条件消去非独立的动力学变量。

电磁场的量子化的另一个方案是用时性规范条件

$$A_0(x) = 0 \tag{4.13}$$

由于在理论的哈密顿形式中，$A_0(x)$不能用作独立的正则坐标，这个条件也是很方便的条件。我们留待 4.2 节讨论非 Abel 规范理论时来证明条件式(4.13)总可以满足。但是这个条件没有完全消去规范自由度。从满足条件式(4.13)的规范势出发，以任意不含时间的函数 $\alpha(\boldsymbol{x})$做规范变换

$$A_{\mu}(x) \to A_{\mu}(x) - \frac{1}{e_0}\partial_{\mu}\alpha(x)$$

得到的新规范势显然也满足式(4.13)。在式(4.1)中取时性规范条件式(4.13)可将拉氏量写为

$$L = \int \mathrm{d}^3 x\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_0}\boldsymbol{A}\right)^2 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})^2 + e_0\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A} - \bar{\psi}(\gamma_{\mu}\partial_{\mu} + m)\psi\right] \tag{4.14}$$

在式(4.14)的形式中没有什么因素妨碍我们按通常的手续过渡到哈密顿形式。由拉氏量式(4.14)出发，Gauss 约束条件不出现在拉氏方程中。因此我们可以把 $A_i(x)(i=1,2,3)$看作独立的正则坐标，相应的正则共轭场量为

$$\pi_i = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_i} = \dot{A}_i = -E_i \tag{4.15}$$

哈密顿量为

$$H = \int \mathrm{d}^3 x \left[ \frac{1}{2} \boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})^2 - e_0 \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{A} + \bar{\psi} (r_i \partial_i + m) \psi \right] \tag{4.16}$$

量子化后 $A_i$ 和 $\pi_i$ 满足如下的正则对易关系

$$[A_i(x), \pi_j(y)]_{x_0 = y_0} = \mathrm{i} \delta_{ij} \delta^3 (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \tag{4.17}$$

由式(4.16)及(4.17)可以写出 Heisenberg 运动方程

$$\dot{A}_i = \mathrm{i}[H, A_i] = \pi_i = - E_i \tag{4.18}$$

$$- \dot{E}_i = \dot{\pi}_i = \mathrm{i}[H, \pi_i] = \partial_j F_{ji} + e_0 j_i \tag{4.19}$$

方程组式(4.18)和(4.19)给出拉氏方程(4.2)的前三个。现在我们要问:剩下的一个方程即 Gauss 约束条件到哪里去了?

为此我们计算$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}$ 与场量的对易子。由式(4.17)得

$$[\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}(x), A_i(y)]_{x_0 = y_0} = \mathrm{i} \nabla_i^x \ \delta^3 (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \tag{4.20}$$

$$[\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}(x), E_i(y)]_{x_0 = y_0} = 0 \tag{4.21}$$

由式(4.20)及(4.21)可得

$$[\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}(x), H] = e_0 \mathrm{i} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}(x) \tag{4.22}$$

另一方面有

$$[\rho(x), H] = \left[ \rho(x), \int \mathrm{d}^3 x \bar{\psi} (\gamma_i \partial_i + m) \psi \right] = - \partial_i \bar{\psi} \gamma_i \psi = \mathrm{i} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} \tag{4.23}$$

因此

$$[\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} - e_0 \rho, H] = 0 \tag{4.24}$$

我们来说明这些公式的意义。由式(4.20)知

$$\frac{1}{e_0} \left[ \int \mathrm{d}^3 x \alpha(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}(x), A_i(y) \right]_{x_0 = y_0} = - \mathrm{i} \frac{1}{e_0} \partial_i \alpha(\boldsymbol{y}) \tag{4.25}$$

记住

$$\left[ \int \mathrm{d}^3 x \rho(x) \alpha(x), \psi(y) \right] = - \alpha(y) \psi(y) \tag{4.26}$$

式(4.25)及(4.26)说明$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}(x) - e_0 \rho(x)$是与时间无关的规范变换

$$A_i(x) \to A_i(x) - \frac{1}{e_0} \partial_i \alpha(x), \ \psi(x) \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha(x)} \psi(x) \tag{4.27}$$

[$\alpha(\boldsymbol{x})$与时间无关]的生成元。因此式(4.24)表示 $H$ 在与时间无关的规范变换下不变。这个剩余的规范不变性自然也可以由式(4.27)和(4.16)直接验证。

式(4.22)表示$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}$ 可以和$H$ 同时对角化。为了与通常的 Gauss 定律对应,我们取一个加在物理态上的附加条件

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(x)|\rangle = e_0\rho(x)|\rangle \tag{4.28}$$

式(4.28)不是算符方程,而是对物理态的一个限制,因此不影响上面把算符 $A_i$ 和 $E_i$ 看作独立的力学量的讨论。由于$\nabla \cdot \boldsymbol{E} - e_0\rho$ 是与时间无关的规范变换的生成元。式(4.28)表示物理态必须在与时间无关的规范变换下不变。

我们来证明这里讨论的时性规范下的量子化方案与前面讨论的库仑规范下的量子化方案是等价的。这里所用的方法参考了黄克逊(Kerson Huang)书第八章[12]。在库仑规范下只有横场被看作动力学变量。因此我们把 $\boldsymbol{A}(x)$分解为

$$\boldsymbol{A}(x) = \boldsymbol{A}_\perp(x) + \boldsymbol{A}_{/\!/}(x) \tag{4.29}$$

其中,$\boldsymbol{A}_\perp$ 和 $\boldsymbol{A}_{/\!/}$分别满足

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{A}_\perp(x) &= 0\\ \boldsymbol{A}_{/\!/}(x) &= \nabla f(x)\end{aligned} \tag{4.30}$$

式(4.16)中的 $H$ 可写为

$$\begin{aligned}H = \int \mathrm{d}^3 x\Big[&\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}_\perp)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\times\boldsymbol{A}_\perp)^2\\ &+\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_{/\!/}^2 - e_0\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A} + \bar{\psi}(\gamma_i\partial_i + m)\psi\Big]\end{aligned} \tag{4.31}$$

引入投影算符

$$P_{ij}^\perp = \delta_{ij} - \nabla_i\nabla_j/\nabla^2,\ P_{ij}^{/\!/} = \nabla_i\nabla_j/\nabla^2 \tag{4.32}$$

它们满足

$$P_{ij}^\perp P_{jk}^\perp = P_{ik}^\perp,\qquad P_{ij}^{/\!/}P_{jk}^{/\!/} = P_{ik}^{/\!/},\qquad P_{ij}^\perp + P_{ij}^{/\!/} = \delta_{ij} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}P_{ij}^\perp A_j &= A_{\perp i},\qquad P_{ij}^\perp E_j = E_{\perp i}\\ P_{ij}^{/\!/}A_j &= A_{/\!/ i},\qquad P_{ij}^{/\!/}E_j = E_{/\!/ i}\end{aligned} \tag{4.34}$$

将投影算符作用在式(4.17)上得到

$$[E_{\perp i}(x),\ A_{\perp j}(y)]_{x_0=y_0} = \mathrm{i}(\delta_{ij} - \nabla_i^x\nabla_j^x/\nabla^2)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{4.35}$$

$$[E_{/\!/ i}(x),\ A_{/\!/ j}(y)]_{x_0=y_0} = \mathrm{i}\nabla_i^x\nabla_j^x/\nabla^2\,\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{4.36}$$

$$[E_{/\!/ i}(x),\ A_{\perp j}(y)]_{x_0=y_0} = [E_{\perp i}(x),\ A_{/\!/ j}(y)]_{x_0=y_0} = 0 \tag{4.37}$$

由式(4.36)和(4.37)得到

$$\begin{aligned}[E_{/\!/ i}(x),\ f(y)]_{x_0=y_0} &= -\mathrm{i}\nabla_i^x/\nabla^2\,\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\ [E_{\perp i}(x),\ f(y)]_{x_0=y_0} &= 0\end{aligned} \tag{4.38}$$

我们采用量子力学的坐标表象,这时态矢泛函为

$$\langle \boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\Psi}\rangle = \boldsymbol{\Psi}[\boldsymbol{A}] = \boldsymbol{\Psi}[\boldsymbol{A}_\perp, f]$$

在这个表象中，$\boldsymbol{A}(x)$可以看作普通的数，而场强算符为

$$E_i(x) = \mathrm{i}\frac{\delta}{\delta A_i(x)} \tag{4.39}$$

由式(4.38)得

$$E_{/\!/ i}(x) = -\mathrm{i}\nabla_i^x/\nabla^2\frac{\partial}{\partial f(x)} \tag{4.40}$$

对纯规范场的情况 $\rho(x)=0$，利用式(4.40)可将附加条件式(4.28)写为

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(x)\Psi[\boldsymbol{A}] = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}_{/\!/}(x)\Psi[\boldsymbol{A}] = -\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta f(x)}\Psi[\boldsymbol{A}_\perp, f] = 0 \tag{4.28$'$}$$

上式表示 $\rho(x)=0$ 时物理的态矢泛函只与横场有关。这时哈密顿量中的场强算符 $\boldsymbol{E}_{/\!/}$可以换为零。比较式(4.31)及(4.7)知道，对纯规范场的情况，时性规范与库仑规范是等价的。

在有带电粒子场与规范场耦合的情况下，为了由物理态矢泛函中消去纵场，我们作如下的幺正变换

$$|\Psi\rangle \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}|\Psi\rangle \tag{4.41}$$

其中

$$\Phi = -\int \mathrm{d}^3 x e_0\rho(x)f(x) \tag{4.42}$$

利用附加条件式(4.28)及(4.39)可将态矢泛函的幺正变换写为

$$\begin{aligned}\Psi[\boldsymbol{A}] \to \Psi^c[\boldsymbol{A}] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}\Psi[\boldsymbol{A}] &= \exp\left(-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3 x f(x)\,\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(x)\right)\cdot\Psi[\boldsymbol{A}] \\ &= \exp\left(-\int \mathrm{d}^3 x\,\nabla_i f(x)\frac{\delta}{\delta A_i(x)}\right)\Psi[\boldsymbol{A}] \\ &= \Psi[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\nabla}f]\end{aligned} \tag{4.43}$$

由上式得到

$$\Psi^c[\boldsymbol{A}] = \Psi^c[\boldsymbol{A}_\perp] = \Psi[\boldsymbol{A}_\perp] \tag{4.44}$$

只是横场的泛函。因此用幺正变换式(4.41)达到了在态矢泛函中消去纵场 $\boldsymbol{A}_{/\!/}$的目的。

我们来计算幺正变换以后的哈密顿量。由式(4.38)得到幺正变换后的场强 $E^c$ 为

$$\boldsymbol{E}_\perp^c = \boldsymbol{E}_\perp \tag{4.45}$$

$$\boldsymbol{E}_{/\!/ i}^c = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi}E_{/\!/ i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi} = E_{/\!/ i} - e_0\nabla_i\nabla^{-2}\rho \tag{4.46}$$

另一方面由式(4.26)容易看出，幺正变换式(4.41)的一个作用是重新定义 $\psi$ 场的位相而把纵向势 $\boldsymbol{A}_{/\!/}$吸收进去。我们由式(4.26)得到

$$e^{i\Phi}H_\psi e^{-i\Phi} = e^{i\Phi}\int d^3x\bar{\psi}(\gamma_i\partial_i + m)\psi e^{-i\Phi}$$

$$= H_\psi + e_0\int d^3x\boldsymbol{j}\cdot\nabla f = H_\psi + e_0\int d^3x\boldsymbol{A}_{/\!/}\cdot\boldsymbol{j} \tag{4.47}$$

由式(4.45)～(4.47)得到对式(4.31)做幺正变换后的哈密顿量

$$H^c = e^{i\Phi}He^{-i\Phi} = \int d^3x\Big[\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_\perp^2 + \frac{1}{2}(\nabla\times\boldsymbol{A}_\perp)^2$$

$$+ \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}_{/\!/} - e_0\nabla\nabla^{-2}\rho)^2 - e_0\boldsymbol{j}_\perp\cdot\boldsymbol{A}_\perp + \bar{\psi}(\gamma_i\partial_i + m)\psi\Big] \tag{4.48}$$

由于式(4.44)中的态矢泛函不依赖于纵场 $\boldsymbol{A}_{/\!/}(x)$

$$\boldsymbol{E}_{/\!/}\boldsymbol{\Psi}^c = 0 \tag{4.49}$$

因此我们可将式(4.48)写为

$$H^c = \int d^3x\Big[\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_\perp^2 + \frac{1}{2}(\nabla\times\boldsymbol{A}_\perp)^2 - e_0\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}_\perp$$

$$+ \bar{\psi}(\gamma_i\partial_i + m)\psi\Big] + \frac{e_0^2}{8\pi}\int d^3x d^3y\frac{\rho(x)\rho(y)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\bigg|_{x_0=y_0} \tag{4.50}$$

这样纵场也从哈密顿量中消失了,式(4.35)和(4.50)与库仑规范方案中的式(4.7)和(4.12)完全一样。原来的附加条件式(4.28)的作用是限制态矢对纵场的关系。幺正变换后纵场已从理论形式中完全消去,因此不再有附加条件。这样就证明了时性规范量子化方案与库仑规范量子化方案的等价性。

库仑规范和时性规范下的量子化方案虽然都是在通常正则量子化的原则下完成的,但是由于这些规范条件不是 Lorentz 不变的,这些量子化方案都不具有明显的 Lorentz 协变性。在量子电动力学中最常用的是 Lorentz 规范条件

$$\partial_\mu A_\mu(x) = 0 \tag{4.51}$$

下的量子化方案。条件式(4.51)是 Lorentz 不变的,在这种方案中把拉氏量取为

$$\mathscr{L}' = \mathscr{L} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\mu)^2 \tag{4.52}$$

其中,$\mathscr{L}$ 为式(4.1)。为了与原来的理论一致,对物理态取附加条件

$$\partial_\mu A_\mu^{(+)}(x)|\rangle = 0 \tag{4.53}$$

其中,(+)号表示正频部分。式(4.52)中的纯规范场部分为

$$-\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\mu A_\nu) \tag{4.54}$$

拉氏运动方程为

$$\Box A_\mu = -e_0 j_\mu \tag{4.55}$$

由于流守恒,由式(4.55)知

$$\Box\partial_\mu A_\mu = 0 \tag{4.56}$$

上式表示$\partial_\mu A_\mu$ 是一个自由场。因此附加条件式(4.53)如果在初始时刻满足,在以后的时刻也满足,并且正、负频的分离是有意义的。这里所用的基本方程都是相对论协变的。由于式(4.54)中包含 $\dot{A}_0$,所以 $A_0$ 可以看作独立的正则坐标,只是由于 $\dot{A}_0^2$ 项前面的符号是负的,导致在理论中引入不定度规[2]。可以证明这种量子化方案与库仑规范的量子化方案是等价的[3]。

## 4.2　非 Abel 规范场的量子化

由于规范场理论的量子化的困难完全来自规范场的部分。为了书写的简单我们先不考虑与规范场作用的物质场而讨论纯非 Abel 规范场的量子化,这时拉氏量为

$$L = -\frac{1}{4}\int d^3 x F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu} \tag{4.57}$$

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f_{abc} A^b_\mu A^c_\nu \tag{4.58}$$

(在本章中我们改用英文字母 $a,b,c$ 代表群的伴随表示的指标),拉氏运动方程为

$$D^{ab}_\mu F^b_{\mu\nu} = 0 \tag{4.59}$$

和电磁场的情况一样,在对非 Abel 规范场理论做正则量子化时一个困难来自 $\dot{A}^a_0$ 不出现在拉氏量中,因而不能定义相应的正则动量,所以 $A^a_0$ 不能作为独立的正则坐标。另一方面,拉氏方程组(4.59)中 $\nu=4$ 的一个是

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}^a = - g f_{abc} \boldsymbol{A}^b \cdot \boldsymbol{E}^c \tag{4.60}$$

其中

$$\boldsymbol{E}^a = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}^a - \nabla A^a_0 - g f_{abc} \boldsymbol{A}^b A^c_0 = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}^a - \boldsymbol{D} A^a_0 \tag{4.61}$$

式(4.60)是 Gauss 定律在非 Abel 情况下的推广,它是一个约束条件。由式(4.60)知道 $\boldsymbol{E}^i(x)$不是完全独立的,由于 $-\boldsymbol{E}^i$ 是与 $\boldsymbol{A}^i$ 共轭的正则变量,因此 $\boldsymbol{A}^i(x)$不能都取作独立的正则坐标。

与电磁规范理论不同的是,在非 Abel 规范理论中 Gauss 约束条件式(4.60)是非线性的。如果我们尝试选取规范条件然后由式(4.60)及(4.61)解出非独立的变量,则得到的表示式通常很复杂。与电磁场不同,纵场 $\boldsymbol{E}_{/\!/}$ 不能简单地用约束条件式(4.60)消去。因此库仑规范条件

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}^a = 0 \tag{4.62}$$

没有特别方便之处。事实上,在库仑规范下由方程(4.60)及式(4.61)得到($\boldsymbol{E}^a_{/\!/} \equiv \nabla F^a$)

$$\boldsymbol{D}^{ab}\cdot\nabla F^{b}=-gf_{abc}\boldsymbol{A}^{b}\cdot\boldsymbol{E}_{\perp}^{c},\qquad \boldsymbol{D}^{ab}\cdot\nabla A_{0}^{b}=-\nabla^{2}F^{a}\tag{4.63}$$

上式作为决定 $\boldsymbol{E}_{/\!/}^{a}$ 和 $A_0^a$ 的方程是很复杂的,在库仑规范下非 Abel 规范理论的哈密顿算符 $H$ 可以沿着 4.1 节中讨论量子电动力学时所用的同样程序写出来,其中只含横向势 $\boldsymbol{A}_{\perp}$ 及其共轭变量 $\boldsymbol{E}_{\perp}$。所不同的是由式(4.63)知道在非 Abel 情况下 $A_0^a$ 是横场的非线性非定域函数。因此 $H$ 中 $\boldsymbol{E}_{\perp}^{a}$ 的二次项有复杂的与 $\boldsymbol{A}^{a}$ 有关的系数。由这种形式的哈密顿量写出的微扰论 Feynman 规则相当复杂。

另外,在文献[4]中证明了在非 Abel 规范场论中库仑规范条件一般不能唯一地确定规范势。如$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$,方程

$$\nabla\cdot\left(U\boldsymbol{A}U^{-1}-\frac{\mathrm{i}}{g}\nabla U\cdot U^{-1}\right)=0$$

在 $\boldsymbol{A}$ 足够大时可以有 $U\neq I$ 的解。这个现象称为 Gribov 不唯一性。

这里的困难来自复杂的约束条件。有约束条件的系统的正则量子化虽然由 Dirac 等给出过一般的讨论[5],但是把他们的方法用于规范场论时仍然遇到复杂的计算问题。

时性规范 $A_0^a=0$ 下的量子化不需要解复杂的约束条件,可以比较简单地用于非 Abel 规范场的量子化。我们将在下面讨论它。但是这个方案不具有明显的 Lorentz 协变性。

人们也考虑用 Lorentz 规范条件

$$\partial_{\mu}A_{\mu}^{a}=0\tag{4.64}$$

并用不定度规的方法对非 Abel 规范场进行量子化。但是如果我们试图简单地仿照量子电动力学的做法把拉氏量取为

$$\mathscr{L}'=\mathscr{L}-\frac{1}{2}(\partial_{\mu}A_{\nu}^{a})(\partial_{\mu}A_{\nu}^{a})\tag{4.65}$$

则必须对态矢量取附加条件

$$\partial_{\mu}A_{\mu}^{a(+)}|\rangle=0\tag{4.66}$$

与量子电动力学不同,现在$\partial_{\mu}A_{\mu}^{a}$ 不是自由场,因此式(4.66)不能对所有的时间都成立。从另一个角度看,由式(4.65)得到的 Feynman 规则不满足 $S$ 矩阵的幺正性(参看 4.5 节)。虽然不定度规的量子化后来也有许多人做过研究,但是所用的方法颇为复杂。

上面概述了把正则量子化用于非 Abel 量子场论所遇到的困难。对非 Abel 规范场的量子化最先是由 Fadeev 和 Popov 用路径积分方法做出来的,这种方法是非 Abel 规范场量子化的最简单的方法。用路径积分方法做规范场的量子化不能照搬第三章中对不含非独立的正则变量的系统导出的公式。这一点在电磁场的情况已经可以看出来。如果把第三章中的公式(3.165)用于自由电磁场,则有

$$
\begin{aligned}
W[J] &= \int[\mathscr{D}A_\mu]\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\mathscr{L}+J_\mu A_\mu)\right\} \\
&= \int[\mathscr{D}A_\mu]\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\left[\frac{1}{2}A_\mu(\delta_{\mu\nu}\partial^2-\partial_\mu\partial_\nu)A_\nu+J_\mu A_\mu\right]\right\}
\end{aligned} \tag{4.67}
$$

由上式得

$$
W[J]=\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4xJ_\mu\Delta_{\mu\nu}J_\nu\right\} \tag{4.68}
$$

其中，$\Delta_{\mu\nu}$满足方程

$$
-(\delta_{\mu\nu}\partial^2-\partial_\mu\partial_\nu)\Delta_{\nu\mu'}(x-y)=\delta_{\mu\mu'}\delta^4(x-y) \tag{4.69}
$$

$\Delta_{\mu\nu}(x)$的傅氏变换$\tilde{\Delta}_{\mu\nu}(k)$满足方程

$$
M_{\mu\nu}(k)\tilde{\Delta}_{\nu\mu'}(k)=(k^2\delta_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu)\tilde{\Delta}_{\nu\mu'}(k)=\delta_{\mu\mu'} \tag{4.70}
$$

因此矩阵$(\tilde{\Delta}_{\mu\nu}(k))$是矩阵$(M_{\mu\nu}(k))$的逆矩阵，但是由于

$$
M_{\mu\nu}(k)k_\nu=0 \tag{4.71}
$$

矩阵$(M_{\mu\nu}(k))$有零本征值，相应的本征矢量为纵场，因此逆矩阵$(\widetilde{M}_{\mu\nu}^{-1}(k))$不存在，式(4.68)发散。由于非 Abel 规范场的拉氏量中场的二次项与电磁场相似，对非 Abel 规范场也有同样的问题。

为了得到正确的路径积分量子化方案，我们由时性规范条件下的正则量子化出发，写出哈密顿量和对易关系，然后按照第三章中所叙述的标准方法过渡到路径积分形式。我们将看到在路径积分形式下能够相当简洁地由时性规范条件过渡到其他规范条件并写出相当的微扰论 Feynman 规则。

现在我们来讨论时性规范条件

$$
A_0^a(x)=-\mathrm{i}A_4^a(x)=0 \tag{4.72}
$$

下的非 Abel 规范场的正则量子化。我们首先证明总可以通过规范变换使条件式(4.72)得到满足。设原来的规范势为$A_\mu(x)=A_\mu^aT_a$，选取规范变换函数

$$
U^{-1}(\boldsymbol{x},x_0)=T\exp\left\{-\mathrm{i}\int_0^{x_0}gA_0(\boldsymbol{x},x'_0)\mathrm{d}x'_0\right\} \tag{4.73}
$$

其中，$T$ 为编时算符。$U^{-1}$满足方程

$$
\frac{\partial U^{-1}}{\partial x_0}=-\mathrm{i}gA_0(\boldsymbol{x},x_0)U^{-1} \tag{4.74}
$$

由上式知，用 $U$ 作规范变换得到的新规范势的时间分量为

$$
\begin{aligned}
A'_0(x) &= U(x)A_0(x)U^{-1}(x)-\frac{\mathrm{i}}{g}U(x)\frac{\partial}{\partial x_0}U^{-1}(x) \\
&= UA_0U^{-1}-UA_0U^{-1}=0
\end{aligned} \tag{4.75}
$$

满足式(4.72)。然而式(4.72)并未完全固定规范自由度,如果 $A_\mu(x)$满足式(4.72),则对任意与时间无关的规范变换函数 $U_0(\boldsymbol{x})$,规范势

$$U_0 A_\mu U_0^{-1} - \frac{\mathrm{i}}{g}\partial_\mu U_0 \cdot U_0^{-1}$$

也满足式(4.72)。

如前面已说明的,$A_0^a$ 不能看作独立的正则坐标,在其他规范条件下做正则量子化都需要把 $A_0^a(x)$用其他的独立变量表示出来,因此得到的哈密顿量的表示式相当复杂。时性规范避免了这个麻烦。

在条件式(4.72)下

$$E_j^a = F_{0j}^a = -\dot{A}_j^a$$

因此拉氏量密度可写为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2}\left(\dot{A}_j^a \dot{A}_j^a - \frac{1}{2}F_{jk}^a F_{jk}^a\right) \tag{4.76}$$

由拉氏量密度式(4.76)得到的拉氏运动方程为

$$D_i^{ab}F_{ij}^b = 0 \tag{4.77}$$

由于 Gauss 约束条件

$$D_i^{ab}E_i^b = 0 \tag{4.78}$$

不在拉氏方程中出现,$A_j^a$ 可以看作独立的动力学变量。与它共轭的场量为

$$\pi_j^a = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_j^a} = \dot{A}_j^a = -E_j^a \tag{4.79}$$

哈密顿量密度为

$$\mathscr{H} = \pi_j^a \dot{A}_j^a - \mathscr{L} = \frac{1}{2}(\pi_j^a \pi_j^a + B_j^a B_j^a) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^a \cdot \boldsymbol{E}^a + \boldsymbol{B}^a \cdot \boldsymbol{B}^a) \tag{4.80}$$

对由式(4.80)描述的体系进行量子化时,把 $\boldsymbol{\pi}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 看作算符并要求它们满足正则对易关系

$$[A_i^a(x), \pi_j^b(y)]_{x_0=y_0} = \mathrm{i}\delta_{ab}\delta_{ij}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{4.81}$$

$$[A_i^a(x), A_j^b(y)]_{x_0=y_0} = [\pi_i^a(x), \pi_j^b(y)]_{x_0=y_0} = 0 \tag{4.82}$$

由式(4.80)~(4.82)可以得 Heisenberg 运动方程

$$\dot{A}_j^a = \mathrm{i}[H, A_j^a] = \pi_j^a \tag{4.83}$$

$$\dot{\pi}_j^a = \mathrm{i}[H, \pi_j^a] = \partial_k F_{kj}^a + g f_{abc} A_k^b F_{kj}^c = D_k^{ac} F_{kj}^c \tag{4.84}$$

这个方程组与拉氏方程组(4.77)一致。

Gauss 定律式(4.78)不能以算符方程的形式由这个理论体系中得出来,但是

由式(4.84)可得

$$\frac{\partial}{\partial t}(D_j^{ab}E_j^b)=\frac{\partial}{\partial t}(\partial_j E_j^a+gf_{abc}A_j^b E_j^c)=D_j^{ac}\dot{E}_j^c$$

$$=D_j^{ab}D_k^{bc}F_{jk}^c=\frac{1}{2}(D_j^{ab}D_k^{bc}-D_k^{ab}D_j^{bc})F_{jk}^c=\frac{g}{2}f_{abc}F_{jk}^b F_{jk}^c=0$$

上式表示

$$[H,(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})^a]=0 \tag{4.85}$$

因此$(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})^a$ 可以和$H$ 同时对角化。还可以验证

$$[(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})^a(x),\ (\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})^b(y)]_{x_0=y_0}=g^2 f_{abc}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})^c(x)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{4.86}$$

为了与高斯定律一致,我们对物理态取附加条件

$$(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})^a(x)|\rangle=0,\qquad a=1,2,\cdots,r_G \tag{4.87}$$

由式(4.85),如附加条件式(4.87)在初始时刻满足,则它在任意时刻都满足。式(4.86)表示$(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})^a(a=1,2,\cdots,r_G)$在物理态子空间中可以同时对角化,因此附加条件式(4.87)是自洽的。

哈密顿量密度式(4.80)在与时间无关的规范变换

$$A_i(x)\to {}^{\alpha}A_i(x)=U_0(\boldsymbol{x})A_i(x)U_0^{-1}(\boldsymbol{x})-\frac{\mathrm{i}}{g}\partial_i U_0(\boldsymbol{x})\cdot U_0^{-1}(\boldsymbol{x})$$

$$\pi_i(x)\to {}^{\alpha}\pi_i(x)=U_0(\boldsymbol{x})\pi_i(x)U_0^{-1}(\boldsymbol{x}) \tag{4.88}$$

下是不变的,上式中

$$U_0(\boldsymbol{x})=\exp(-\mathrm{i}\alpha^a(\boldsymbol{x})T_a)\equiv\exp(-\mathrm{i}\alpha(\boldsymbol{x})) \tag{4.89}$$

相应的无穷小变换为

$$\delta A_i(x)=-\mathrm{i}[\delta\alpha(\boldsymbol{x}),\ A_i(x)]-\frac{1}{g}\partial_i\delta\alpha(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{g}D_i\delta\alpha(\boldsymbol{x})$$

$$\delta\pi_i(x)=-\mathrm{i}[\delta\alpha(x),\ \pi_i(x)] \tag{4.90}$$

由正则对易关系式(4.81)和(4.82)可得

$$\left[\frac{\mathrm{i}}{g}\int\mathrm{d}^3x(E_j^c(x)D_j^{ca}(x))\delta\alpha^a(\boldsymbol{x}),\ A_k^b(y)\right]_{x_0=y_0}=-\frac{1}{g}D_i\delta\alpha(\boldsymbol{y})$$

$$\left[\frac{\mathrm{i}}{g}\int\mathrm{d}^3x(E_j^c(x)D_j^{ca}(x))\delta\alpha^a(\boldsymbol{x}),\ \pi_k^b(y)\right]_{x_0=y_0}=-f_{abc}\pi_k^c(y)\delta\alpha^a(\boldsymbol{y}) \tag{4.91}$$

比较式(4.90)和(4.91)知道,与时间无关的规范变换可以由如下的幺正变换实现

$$A_i\to\hat{U}A_i\hat{U}^{-1}$$

$$\pi_i\to\hat{U}\pi_i\hat{U}^{-1}$$

$$\hat{U}(\boldsymbol{x}) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{g}\int \mathrm{d}^3 x \boldsymbol{E}^a \cdot (\boldsymbol{D}\alpha)^a(\boldsymbol{x})\right) \tag{4.92}$$

如$|\boldsymbol{x}|\to\infty$时 $\alpha(\boldsymbol{x})\to 0$,上式可以分部积分,这时

$$\hat{U}(\boldsymbol{x}) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{g}\int \mathrm{d}^3 x (\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})^a(\boldsymbol{x})\alpha^a(\boldsymbol{x})\right) \tag{4.92'}$$

上式表示$\frac{1}{g}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})^a$ 是这个规范变换的生成元,因此,附加条件式(4.87)的意义是,物理态在$|\boldsymbol{x}|\to\infty$时 $\alpha(\boldsymbol{x})\to 0$ 的与时间无关的规范变换下不变。式(4.80)~(4.82)和(4.87)给出了在时性规范下正则量子化的基本公式。

由于在时性规范正则量子化方案中 $\boldsymbol{A}^a(x)$和 $\boldsymbol{\pi}^a(x)$看作独立的正则变量,跃迁振幅的路径积分表示可以直接利用式(4.80)及第三章的式(3.155)写为

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{A}_f(\boldsymbol{x}'),\ t'|\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{x}),t\rangle &= \int_{\boldsymbol{A}_i(x)}^{\boldsymbol{A}_f(x')}[\mathscr{D}\boldsymbol{A}][\mathscr{D}\boldsymbol{\pi}]\exp \\ &\times\left\{\mathrm{i}\int_t^{t'}\mathrm{d}y_0\cdot\int \mathrm{d}^3 y\left(\boldsymbol{\pi}^a\cdot\dot{\boldsymbol{A}}^a - \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}^a\cdot\boldsymbol{\pi}^a - \frac{1}{2}\boldsymbol{B}^a\cdot\boldsymbol{B}^a\right)\right\} \\ &= N\int_{\boldsymbol{A}_i(x)}^{\boldsymbol{A}_f(x')}[\mathscr{D}\boldsymbol{A}]\exp\left\{\mathrm{i}\int_t^{t'}\mathrm{d}y_0\int \mathrm{d}^2 y\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^a\cdot\dot{\boldsymbol{A}}^a - \frac{1}{4}F_{jk}^a F_{jk}^a\right)\right\}\end{aligned} \tag{4.93}$$

附加条件式(4.87)是加在物理态之上的,在写出上面的路径积分公式时不需要考虑它,如第三章中所讨论的,由式(4.93)可以得到 Green 函数的生成泛函

$$W[\boldsymbol{J}] = N\int[\mathscr{D}\boldsymbol{A}]\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x\left(\frac{1}{2}\dot{A}_i^a\dot{A}_i^a - \frac{1}{4}F_{ij}^a F_{ij}^a + J_i^a A_a^i\right)\right\} \tag{4.94}$$

其中,$J_i^a$ 为规范势$A_i^a$ 的外源,我们可以形式地引入变量 $A_0^a(x)$把式(4.94)写为

$$W[J] = N\int[\mathscr{D}A_\mu]\prod_{y,\,b}\delta(A_0^b(y))\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x\left(-\frac{1}{4}\times F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + J_\mu^a A_\mu^a\right)\right\} \tag{4.95}$$

现在可以由时性规范下的路径积分公式过渡到其他规范。设取新的规范条件

$$f^a(A(x)) - C^a(x) = 0 \tag{4.96}$$

其中,$C^a(x)$为给定的函数。按照 Fadeev 和 Popov 的方法[6]引入如下的 Jacobi 行列式

$$\Delta_f^{-1}(A) \equiv \int[\mathscr{D}g]\prod_{x,a}\delta(f^a({}^gA(x)) - C^a(x)) \tag{4.97}$$

上式中

$${}^gA_\mu(x) = U(g(x))A_\mu(x)U^{-1}(g(x)) - \frac{\mathrm{i}}{g}\partial_\mu U(g(x))\cdot U^{-1}(g(x)) \tag{4.98}$$

$$[\mathscr{D}g] = \prod_x Dg(x)$$

其中，$Dg$ 为紧致群的不变测度，具有左移(及右移)不变性

$$Dg = D(g'g) = D(gg') \tag{4.99}$$

因此我们有

$$\Delta_f({}^{g'}A) = \Delta_f(A) \tag{4.100}$$

即 $\Delta_f(A)$是规范不变的。

由于规范变换式(4.98)中最后一项与 $A_\mu$ 无关，而变换

$$A_\mu(x) \to U(g)A_\mu(x)U^{-1}(g)$$

为群的伴随表示变换，相应的 Jacobi 行列式为 1。因此我们有

$$[\mathscr{D}^{g'}A_\mu] = [\mathscr{D}A_\mu] \tag{4.101}$$

即规范势的泛函测度是规范不变的。

按照文献[6]中的方法，在式(4.95)中插入一个恒等于 1 的因子

$$\Delta_f(A)\int[\mathscr{D}g]\prod_{x,a}\delta(f^a({}^gA(x)) - C^a(x)) = 1$$

并交换积分顺序得到

$$W[J] = N\int[\mathscr{D}g]\int[\mathscr{D}A_\mu]\prod_{y,b}\delta(A_0^b(y))\Delta_f(A)$$
$$\times \prod_{z,c}\delta(f^c({}^gA(z)) - C^c(z))\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\mathscr{L} + J_\mu^a A_\mu^a)\right\}$$

利用式(4.100)、(4.101)和 $\mathscr{L}$的规范不变性可将上式写为

$$W[J] = N\int[\mathscr{D}g]\int[\mathscr{D}A_\mu]\Delta_f(A)\prod_y\delta(f(A(y)) - C(y))$$
$$\times \exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\mathscr{L} + J\,{}^{g^{-1}}A)\right\}\prod_z\delta({}^{g^{-1}}A_0(z)) \tag{4.102}$$

设由给定的满足规范条件式(4.96)的 $A_\mu$ 变到满足时性规范条件的 $A'_\mu$ 的规范变换为$g_0(A)$。$g_0(A)$与 $A$ 有关。虽然一般来说 $g_0(A)$可包含任意与时间无关的规范变换因子，但是，由第三章的讨论知道，$W[J]$与路径积分的初始值无关，因此我们可以适当选取 $A_\mu$(以及 $C^a(x)$)的初始值，使得它们同时满足这两个规范条件，这时 $g_0(A)$是唯一的。由于式(4.102)中的两个 $\delta$ 函数因子，在这个公式中对 $g(x)$的泛函积分有贡献的区域为 $g_0^{-1}(A)$的邻域，因此得到

$$W[J] = N\int[\mathscr{D}A_\mu]\Delta_f(A)\prod_y\delta(f(A(y)) - C(y))$$
$$\times \exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\mathscr{L} + J\,{}^{g_0}A)\right\}\int[\mathscr{D}g]\prod_z\delta({}^{g^{-1}}A_0(z)) \tag{4.102'}$$

在 5.9 节中我们将证明 $W[J]$ 中外源项的改变

$$J^a_\mu A^a_\mu \to J^a_\mu F^a_\mu(A) = J^a_\mu A^a_\mu + O(A^2)\text{ 项} \tag{4.103}$$

不改变重整化 $S$ 矩阵。由式(4.73)知道 $g_0(A) = I + O(A_0)$项，因此我们可以丢掉式(4.102′)中 $J\,{}^{g^0}A$ 的非线性项并通过重新定义外源将其线性项写为 $JA$。由 $[\mathscr{D}g]$ 的左移不变性可得

$$\begin{aligned}\int[\mathscr{D}g]\prod_z \delta({}^{g^{-1}}A_0(z)) &= \int[\mathscr{D}g]\prod_z \delta({}^{g'}A'_0(z)) \\ &= \int[\mathscr{D}g'^{-1}]\prod_z \delta({}^{g'}A'_0(z))\end{aligned} \tag{4.104}$$

其中

$$g' = g^{-1}g_0^{-1}$$

$$A'_0(z) = {}^{g_0}A_0(z)$$

但是，作为积分变量的 $g'$ 与 $A$ 无关。由式(4.102′)中的因子 $\delta(f(A) - C)$ 及 $g_0$ 的定义知道，在这个公式中 $A'_0$ 必须为零，因此

$$\begin{aligned}\int[\mathscr{D}g'^{-1}]\prod_z \delta({}^{g'}A'_0) &= \int[\mathscr{D}g'^{-1}]\prod_z \delta\left(\frac{\mathrm{i}}{g}\partial_0 U(g')\cdot U(g')^{-1}\right) \\ &= \int[\mathscr{D}\varepsilon]\prod_z\left(\frac{1}{g}\partial_0\varepsilon(z)\right)\end{aligned}$$

由上式知道，在式(4.102′)中的因子式(4.104)与规范势无关，可以吸收到归一化因子中去。这样就得到

$$\begin{aligned}W[J] = N\int[\mathscr{D}A_\mu]\Delta_f(A)\prod_{y,b}\delta(f^b(A(y)) - C^b(y)) \\ \times\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x[\mathscr{L}(x) + J^a_\mu(x)A^a_\mu(x)]\right\}\end{aligned} \tag{4.105}$$

上式就是规范条件式(4.96)下的 Green 函数生成泛函。

Fadeev 和 Popov 原来的出发点[6]不是正则量子化形式，而是考虑按通常规则写出的无外源的真空跃迁振幅

$$W'[0] = \int[\mathscr{D}A_\mu]\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathscr{L}(x)\right\}$$

这个表示式不能严格定义。他们在其中插入一个恒等于 1 的因子

$$\int[\mathscr{D}g']\Delta_f(A)\prod_{x,a}\delta(f^a({}^gA) - C^a)$$

由于 $[\mathscr{D}A_\mu]$，$\mathscr{L}(x)$ 和 $\Delta_f(A)$ 都是规范不变的，可以得到

$$W'[0] = N\int[\mathscr{D}g]\int[\mathscr{D}A_\mu]\Delta_f(A)\prod_{x,a}\delta(f^a(A) - C^a)$$

$$\times \exp\left\{ \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x \mathscr{L} \right\} = W[0] \cdot \int [\mathscr{D}g]$$

上式右方有一个无限大的规范群体积因子。如果除掉这个由于规范不变性而产生的因子并加上外源项，就得到式(4.105)中的 $W[J]$。这就是文献[6]所用的直观推导。

现在我们来计算 $\Delta_f(A)$。由于式(4.105)中有因子 $\delta(f^a(A) - C^a)$，如果规范条件 $f^a(A) - C^a = 0$ 唯一确定规范势，则在式(4.97)的群上积分中只有单位元素附近的区域有贡献。设 $\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \varepsilon^a(x) T_a$ 为无穷小的群参数。在单位元附近 $[\mathscr{D}g] = [\mathscr{D}\boldsymbol{\varepsilon}]$。因此我们有

$$\Delta_f^{-1}(A) = \int [\mathscr{D}g] \prod_{x,a} \delta(f^a({}^g A(x)) - C^a(x))$$

$$= \int [\mathscr{D}\boldsymbol{\varepsilon}] \prod_{x,a} \delta(f^a(A_\mu - \mathrm{i}[\boldsymbol{\varepsilon}(x), A_\mu(x)] - \frac{1}{g}\partial_\mu \boldsymbol{\varepsilon}(x)) - C^a(x))$$

上式可写为

$$\Delta_f^{-1}(A) = \det{}^{-1} M_f \tag{4.106}$$

除一个没有关系的常数外

$$M_{fab}(x,y) = g \frac{\delta}{\delta \varepsilon^b(y)} f^a({}^g A_\mu(x)) = -\frac{\delta}{\delta \varepsilon^b(y)} \left[ \frac{\delta f^a}{\delta A_\mu^c(x)} D_\mu^{cd} \varepsilon^d(x) \right]$$

$$= -\frac{\delta f^a}{\delta A_\mu^c(x)} D_\mu^{cb} \delta^4(x-y) \tag{4.107}$$

为了便于导出 Feynman 规则，我们把 $W[J]$ 的形式做些改变。注意，式(4.107)中的 $\det M_f$ 与函数 $C^a(x)$ 无关，因此我们把式(4.105)乘以一个 $C$ 的 Gauss 因子并对 $C$ 做泛函积分。利用公式

$$\int [\mathscr{D}C] \exp\left\{ -\frac{\mathrm{i}}{2\alpha} \int \mathrm{d}^4 x C^a C^a \right\} \prod_{y,b} \delta(f^b(A(y)) - C^b(y)) = \exp\left\{ -\frac{\mathrm{i}}{2\alpha} \int \mathrm{d}^4 x f^a f^a \right\}$$

可将式(4.105)写为

$$W[J] = N \int [\mathscr{D}A_\mu] \det M_f \exp\left\{ \mathrm{i} \int \mathrm{d}^4 x \left( \mathscr{L} - \frac{1}{2\alpha} f^a f^a + J_\mu^a A_\mu^a \right) \right\} \tag{4.108}$$

由式(4.107)知 $\det M_f$ 是规范势的非定域函数。为了写出 Feynman 规则，可以引入辅助场 $\eta(x)$ 和 $\bar{\eta}(x)$，它们是 Grassmann 数。利用第三章中 Grassmann 数的 Gauss 积分公式(4.141′)可将 $\det M_f$ 写为

$$\det(\mathrm{i} M_f) = \int [\mathscr{D}\bar{\eta}][\mathscr{D}\eta] \exp\left\{ -\mathrm{i} \int \mathrm{d}^4 x \bar{\eta}^a M_{ab} \eta^b \right\} \tag{4.109}$$

由式(4.108)和(4.109)得到

$$W[J] = N\int[\mathscr{D}A_\mu][\mathscr{D}\eta][\mathscr{D}\bar{\eta}]\cdot\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\left(\mathscr{L}-\frac{1}{2\alpha}f^af^a+\bar{\eta}M_f\eta+J_\mu^aA_\mu^a\right)\right\}$$
(4.110)

由式(4.107)知

$$\int \mathrm{d}^4x\bar{\eta}M_f\eta = \int \mathrm{d}^4x\bar{\eta}^a\frac{\partial f^a}{\partial A_\mu^b}D_\mu^{bc}\eta^c \tag{4.111}$$

式(4.110)可写为

$$W[J] = N\int[\mathscr{D}A][\mathscr{D}\eta][\mathscr{D}\bar{\eta}]\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}+J_\mu^aA_\mu^a)\right\} \tag{4.110$'$}$$

其中,有效拉氏量密度为

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}} = \mathscr{L}-\frac{1}{2\alpha}f^af^a+\bar{\eta}M_f\eta \tag{4.112}$$

在上面导出的路径积分量子化公式中引入了 Grassmann 场 $\eta(x)$和 $\bar{\eta}(x)$。我们知道,在量子场论的路径积分公式中,Grassmann 场通常来自 Fermi 场的量子化,而这里的场 $\eta(x)$和 $\bar{\eta}(x)$是 Lorentz 标量。由于自旋和统计的反常关系,这种虚拟的场常称为 Fadeev-Popov 鬼场。它们只是辅助工具,不表现为物理粒子。在群的整体变换下,它们按伴随表示变换。总结以上结果,在作规范场的量子化时,必须在拉氏量中附加一个规范固定项 $-\frac{1}{2\alpha}f^af^a$,同时在路径积分中加入一个 Fadeev-Popov行列式因子 $\Delta_f(A)$,$\Delta_f(A)$的贡献可以用拉氏量中附加一个虚拟场项 $\bar{\eta}M_f\eta$ 表示。由于加入了这些项,有效拉氏量不再有规范不变性。但是如果 $f^a$ 按伴随表示变换,有效拉氏量还保留了群的整体不变性。

如果用类似的方法做电磁场的量子化,则由于 Abel 群的结构常数为零,如果规范函数 $f$ 为 $A_\mu$ 的线性函数,则 $\det M_f$ 与 $A_\mu$ 无关,这时 $\det M_f$ 可以吸收到式(4.108)的归一化因子 $N$ 中,不需要引入鬼场。

上面在得到式(4.107)时,假设了规范条件式(4.96)唯一确定规范势。我们已经知道对库仑规范条件存在 Gribov 不定性。有些别的规范条件也存在这个问题。但是这种情况都发生在 $A_\mu$ 足够大时,微扰论展开实质上只用于小的 $A_\mu$。所以 Gribov 不定性不影响微扰论。对于微扰论来说,式(4.110)对这些规范条件也是正确的。

本节的推导以时性规范正则形式作为出发点。从有约束系统的路径积分一般形式出发的推导可参看文献[9]。

## 4.3 线性协变规范的微扰论 Feynman 规则

把有效拉氏量密度写为

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = \mathscr{L}_0(A_\mu, \eta, \bar{\eta}) + \mathscr{L}_{\text{int}}(A_\mu, \eta, \bar{\eta}) \tag{4.113}$$

其中,$\mathscr{L}_0$ 只含场的二次项,$\mathscr{L}_{\text{int}}$为场的相互作用项。引入虚拟标量场 $\eta$ 和 $\bar{\eta}$ 的外源项 $\bar{\eta}^a\beta^a + \bar{\beta}^a\eta^a$,其中 $\beta^a(x)$和 $\bar{\beta}^a(x)$为 Grassmann 数,有这些外源项的生成泛函为

$$W[J,\beta,\bar{\beta}] = N\int[\mathscr{D}A][\mathscr{D}\eta][\mathscr{D}\bar{\eta}]\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\mathscr{L}_{\text{eff}} + \bar{\eta}^a\beta^a + \bar{\beta}^a\eta^a + J_\mu^a A_\mu^a)\right\} \tag{4.114}$$

上式可以写为

$$\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathscr{L}_{\text{int}}\left(-\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta J_\mu^a}, -\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta\bar{\beta}^a}, \mathrm{i}\frac{\delta}{\delta\beta^a}\right)\right\}W_0[J,\beta,\bar{\beta}] \tag{4.115}$$

其中

$$W_0[J,\beta,\bar{\beta}] = N\int[\mathscr{D}A][\mathscr{D}\eta][\mathscr{D}\bar{\eta}]\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x(\mathscr{L}_0 + \bar{\eta}^a\beta^a + \bar{\beta}^a\eta^a + J_\mu^a A_\mu^a)\right\} \tag{4.116}$$

场的传播子由 $W_0[J]$决定。最简单的 Lorentz 协变的规范固定函数为

$$f^a(A) = \partial_\mu A_\mu^a \tag{4.117}$$

这里,$f$ 为$A$ 的线性函数。当选取上式中的 $f$ 时,由式(4.111)知

$$\int \mathrm{d}^4x\bar{\eta}M\eta = -\int \mathrm{d}^4x\partial_\mu\bar{\eta}D_\mu\eta \tag{4.118}$$

这时式(4.112)中的有效拉氏量密度可写为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\mu^a)(\partial_\nu A_\nu^a) - \partial_\mu\bar{\eta}^a D_\mu^{ab}\eta^b \tag{4.119}$$

其中

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c$$

$$D_\mu^{ab}\eta^b = \partial_\mu\eta^a + gf_{abc}A_\mu^b\eta^c$$

式(4.119)中场的二次项为

$$\mathscr{L}_0 = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu A_\nu^a\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\mu A_\nu^a\partial_\nu A_\mu^a + \frac{1}{\alpha}\partial_\mu A_\mu^a\partial_\nu A_\nu^a\right) + \partial_\mu\bar{\eta}^a\partial_\mu\eta^a \tag{4.120}$$

因此式(4.116)中的 $W_0[J]$可写为如下的形式

$$W_0[J] = \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{2}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4x'[J_\mu^a(x)\Delta_{F_{\mu\nu}}^{ab}(x-x')J_\nu^b(x') + \bar{\beta}^a(x)\Delta_F^{ab}(x-x')\beta^b(x')]\right\} \tag{4.121}$$

其中,$\Delta_{F_{\mu\nu}}^{ab}$ 满足方程

$$-\left[\delta_{\mu\nu}\partial^2-\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\partial_\mu\partial_\nu\right]\Delta^{ab}_{F_{\nu\mu'}}(x)=\delta_{ab}\delta^4(x)\delta_{\mu\mu'} \tag{4.122}$$

$\Delta^{ab}_F(x)$满足方程

$$-\partial^2\Delta^{ab}_F(x)=\delta_{ab}\delta^4(x) \tag{4.123}$$

由式(4.122)知道 $\Delta_{F_{\mu\nu}}(x)$的傅氏变换$\tilde{\Delta}_{F_{\mu\nu}}(k)$满足方程

$$\left[k^2\delta_{\mu\nu}-\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)k_\mu k_\nu\right]\tilde{\Delta}^{ab}_{F_{\nu\mu'}}(k)=\delta_{\mu\mu'}\delta_{ab} \tag{4.124}$$

引入横向和纵向投影矩阵 $P_\perp(k)$和 $P_{/\!/}(k)$,其矩阵元为

$$P_\perp(k)_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$$

$$P_{/\!/}(k)_{\mu\nu}=\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$$

它们满足

$$P^2_\perp(k)=P_\perp(k),\qquad P^2_{/\!/}(k)=P_{/\!/}(k)$$

$$P_\perp(k)+P_{/\!/}(k)=I$$

式(4.124)可写为

$$k^2\left(P_\perp(k)+\frac{1}{\alpha}P_{/\!/}(k)\right)_{\mu\nu}\tilde{\Delta}^{ab}_{F_{\mu\mu'}}(k)=\delta_{ab}\delta_{\mu\mu'}$$

由此易得

$$\tilde{\Delta}^{ab}_{F_{\mu\nu}}(k)=\frac{1}{k^2}(P_\perp(k)+\alpha P_{/\!/}(k))_{\mu\nu}\delta_{ab}$$

由上式得规范场的传播子为

$$-\mathrm{i}\,\tilde{\Delta}^{ab}_{F_{\mu\nu}}(k)=\frac{-\mathrm{i}}{k^2-\mathrm{i}\varepsilon}\left[\delta_{\mu\nu}-(1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2-\mathrm{i}\varepsilon}\right]\delta_{ab} \tag{4.125}$$

在图 4.1 中波纹线表示规范场传播子。由式(4.123)得 Fadeev-Popov 虚拟场的传播子的傅氏变换为

$$-\mathrm{i}\,\tilde{\Delta}^{ab}_F(k)=\frac{-\mathrm{i}}{k^2-\mathrm{i}\varepsilon}\delta_{ab} \tag{4.126}$$

图 4.2 中虚线表示虚拟场传播子。式(4.126)是零质量标量场传播子的形式。

如选取规范固定项的参数 $\alpha\to0$,由式(4.110)知 $W[J]$的路径积分集中于 $f(A)=0$,即

$$\partial_\mu A^a_\mu=0 \tag{4.127}$$

处。这时式(4.125)变为

$$-\mathrm{i}\,\widetilde{\Delta}_{F_{\mu\nu}}^{ab}(k)=\frac{-\mathrm{i}}{k^2-\mathrm{i}\varepsilon}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\delta_{ab} \tag{4.128}$$

这个规范称为 Landau 规范。传播子式(4.128)满足条件

$$k_\mu\,\widetilde{\Delta}_{F_{\mu\nu}}^{ab}(k)=0 \tag{4.129}$$

上式表示在 Landau 规范中只有横场进入传播子。如选取 $\alpha=1$,则式(4.125)变为

$$-\mathrm{i}\,\widetilde{\Delta}_{F_{\mu\nu}}^{ab}(k)=\frac{-\mathrm{i}}{k^2-\mathrm{i}\varepsilon}\delta_{\mu\nu}\delta_{ab} \tag{4.130}$$

这个规范称为 Feynman 规范。




图 4.1




图 4.2

相互作用顶点的 Feynman 规则可以由式(4.119)读出。这里有三种顶点:三规范场顶点,四规范场顶点,以及虚拟场与规范场作用顶点。这些顶点都是电磁场理论所没有的。注意,在虚拟场与规范场的相互作用项 $\mathrm{i}g\partial_\mu\bar{\eta}A_\mu\eta$ 中微分号只作用在 $\bar{\eta}$ 上。将相互作用顶点 $\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\mathscr{L}_{\mathrm{int}}$ 中的因子 i 包含在内,用希腊字母 $\lambda,\mu,\nu,\zeta$ 代表规范场的 Lorentz 指标,$p,q,r,s$ 代表规范场的动量,我们得到如下的相互作用顶点 Feynman 规则

$$-gf_{abc}[\delta_{\lambda\mu}(p-q)_\nu+\delta_{\mu\nu}(q-r)_\lambda+\delta_{\nu\lambda}(r-p)_\mu] \tag{4.131}$$

$$\begin{aligned}&-\mathrm{i}g^2f_{abe}f_{cde}(\delta_{\lambda\nu}\delta_{\mu\zeta}-\delta_{\lambda\zeta}\delta_{\mu\nu})-\mathrm{i}g^2f_{ace}f_{bde}(\delta_{\lambda\mu}\delta_{\nu\zeta}-\delta_{\lambda\zeta}\delta_{\nu\mu})\\&-\mathrm{i}g^2f_{ade}f_{cbe}(\delta_{\lambda\nu}\delta_{\zeta\mu}-\delta_{\lambda\mu}\delta_{\zeta\nu})\end{aligned} \tag{4.132}$$

$$gf_{abc}k_\mu \tag{4.133}$$

式(4.131)~(4.133)分别与图 4.3~4.5 对应。注意,式(4.133)中 $k_\mu$ 为带点·的虚拟场线的动量。由于 $\eta(x)$和 $\bar{\eta}(x)$是反对易数,像通常 Fermi 场的情况一样,每个虚拟标量场闭合圈有一个因子 −1。由于虚拟标量场不表现为物理粒子,$S$ 矩阵的 Feynman 图中不含 $\eta$ 和 $\bar{\eta}$ 外线,虚拟场在这些 Feynman 图中只能构成闭合圈。

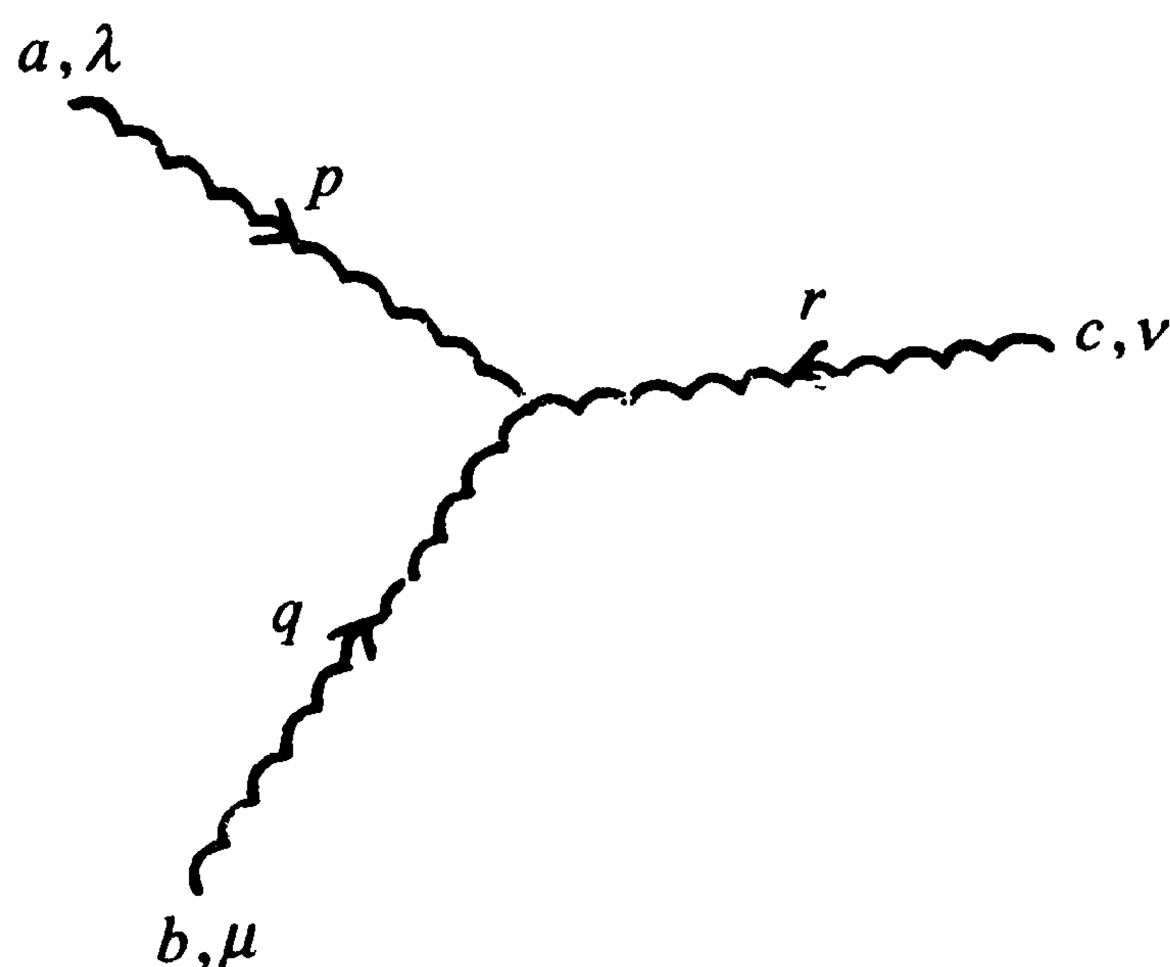



图 4.3

如同通常的情况一样,每条内线有一个积分因子 $\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}$,每个顶点有一个代表能量动量守恒的因子 $(2\pi)^4\delta(\sum p_i)$。

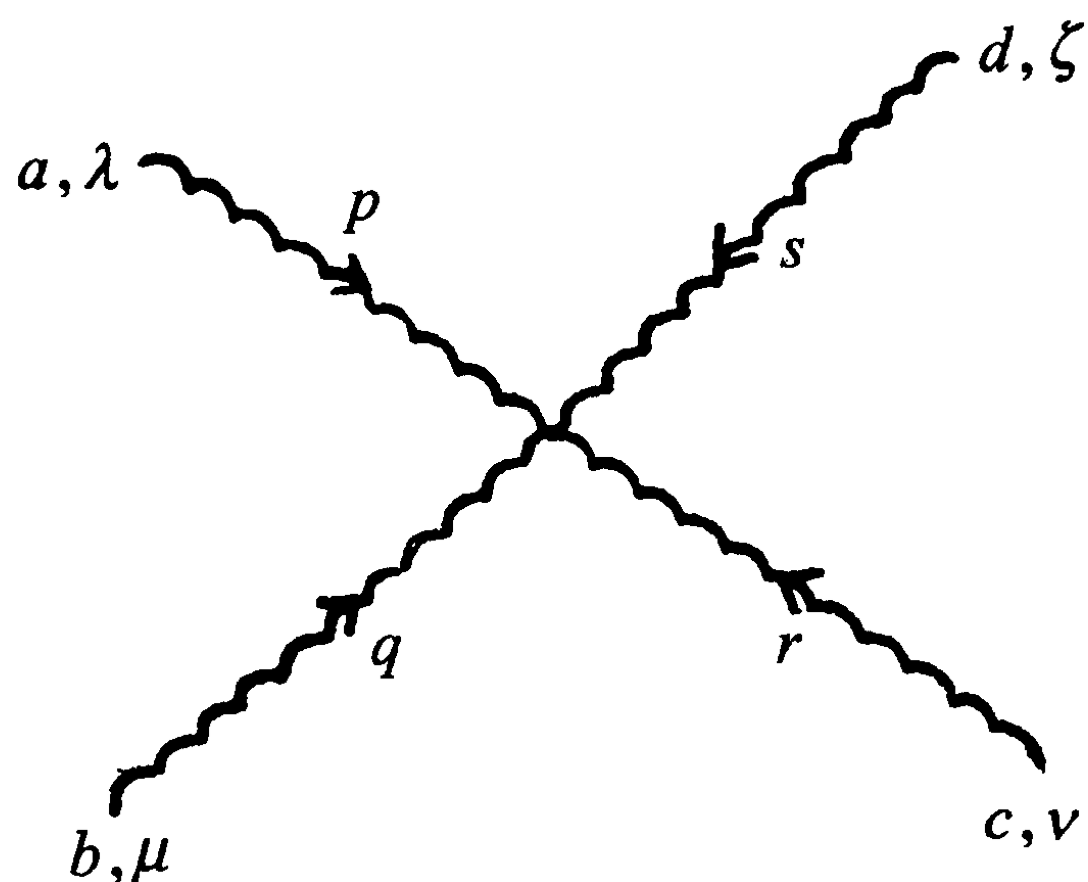



图 4.4

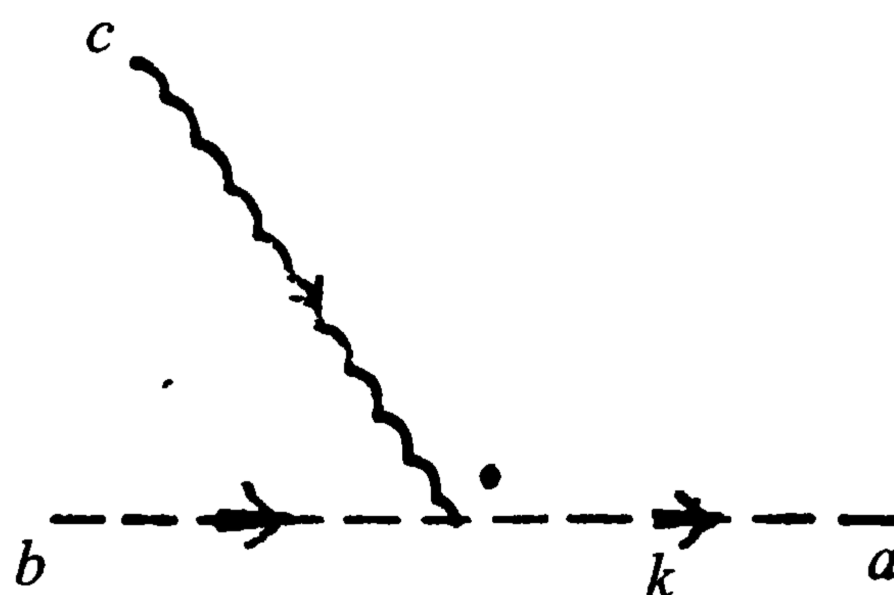



图 4.5

为了完整起见,我们在这里也写出规范场与标量场及 Dirac 场的相互作用项。有关的拉氏量密度为

$$\mathscr{L}_{\psi} = -\bar{\psi}(\gamma_{\mu}D_{\mu} + m)\psi \tag{4.134}$$

$$\mathscr{L}_{\varphi} = -(D_{\mu}\varphi)^{\dagger}(D_{\mu}\varphi) - V(\varphi^{\dagger}\varphi) \tag{4.135}$$

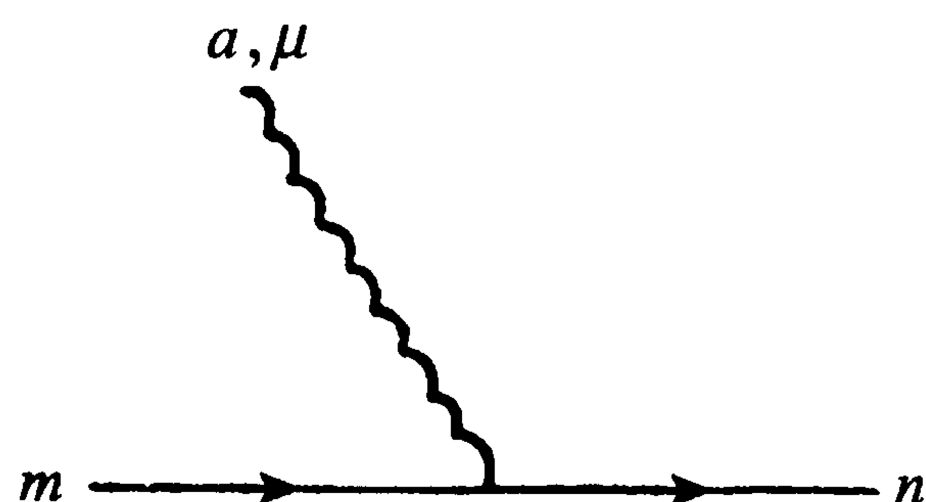



图 4.6

令 $m, n$ 为 Dirac 场或标量场的群指标,$T_a$, $t_a$ 分别为生成元在 Dirac 场和标量场所属表示中的矩阵,Dirac 场与规范场作用顶点为(见图 4.6)

$$-g\gamma_{\mu}(T_a)_{nm} \tag{4.136}$$

标量场与规范场作用顶点为[见图 4.7 和 4.8]

$$\mathrm{i}g(t_a)_{nm}(p_{\mu} + p'_{\mu}) \tag{4.137}$$

$$-\mathrm{i}\delta_{\mu\nu}g^2(t_at_b + t_bt_a)_{nm} \tag{4.138}$$

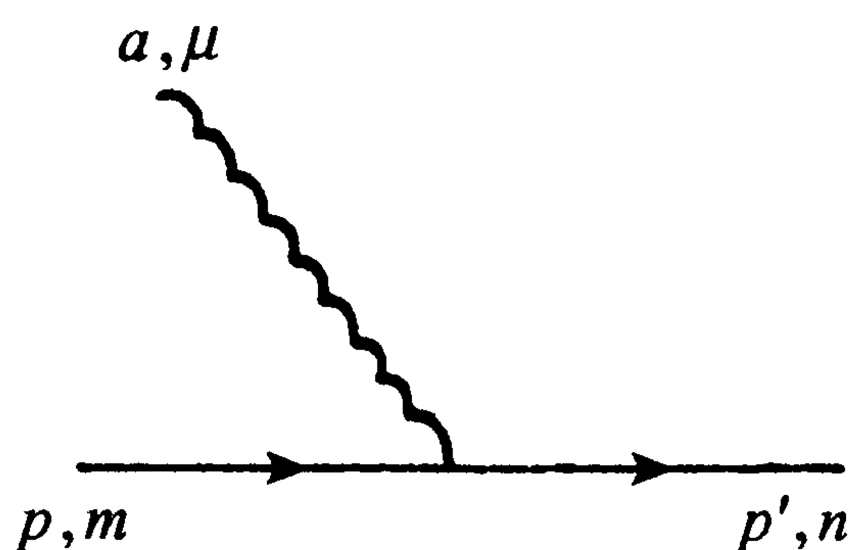



图 4.7

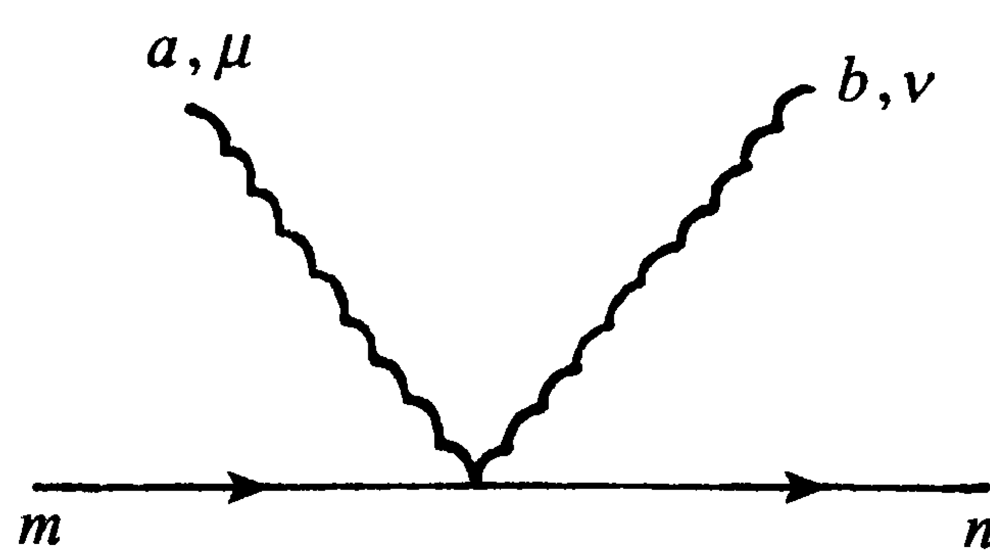



图 4.8

## 4.4 几种非协变的线性规范

我们先研究库仑规范,这时规范固定函数为

$$f^a = \nabla \cdot \mathbf{A}^a \tag{4.139}$$

有效拉氏量密度 $\mathscr{L}_{\text{eff}}$中的二次项为

$$\mathscr{L}_0 = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu^a \cdot \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\mu A_\nu^a \cdot \partial_\nu A_\mu^a) - \frac{1}{2\alpha}(\partial_i A_i^a)(\partial_j A_j^a) - \partial_\mu \bar{\eta}^a \partial_\mu \eta^a \tag{4.140}$$

因此传播子 $-\mathrm{i}\,\tilde{\Delta}_{F_{\mu\nu}}^{ab}(k)$满足方程

$$\left[\delta_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu + \frac{1}{\alpha}\hat{k}_\mu \hat{k}_\nu\right]\tilde{\Delta}_{F_{\nu\mu'}}^{ab}(k) = \delta_{\mu\mu'}\delta_{ab} \tag{4.141}$$

其中

$$\hat{k} = (\boldsymbol{k}, 0) \tag{4.142}$$

将$\tilde{\Delta}_{F_{\mu\nu}}^{ab}(k)$写成最一般的形式

$$\tilde{\Delta}_{F_{\mu\nu}}^{ab}(k) = (a_1\delta_{\mu\nu} + a_2 k_\mu \hat{k}_\nu + a_3 \hat{k}_\mu k_\nu + a_4 k_\mu k_\nu + a_5 \hat{k}_\mu \hat{k}_\nu)\delta_{ab} \tag{4.143}$$

将式(4.143)代入式(4.141)并比较两边的系数，得到

$$-\mathrm{i}\,\tilde{\Delta}_{F_{\mu\nu}}^{ab}(k) = \frac{-\mathrm{i}}{k^2 - \mathrm{i}\varepsilon}\left[\delta_{\mu\nu} + \left(1 + \frac{\alpha k^2}{|\boldsymbol{k}|^2}\right)\frac{k_\mu k_\nu}{|\boldsymbol{k}|^2} - \frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2}(k_\mu \hat{k}_\nu + \hat{k}_\mu k_\nu)\right]\delta_{ab} \tag{4.144}$$

如取规范固定项的系数 $\alpha \to 0$，则 $W[J]$中的路径积分集中在

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}^a = 0 \tag{4.145}$$

处，此时

$$-\mathrm{i}\,\tilde{\Delta}_{ij}^{ab}(k) = \frac{-\mathrm{i}}{k^2 - \mathrm{i}\varepsilon}\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\boldsymbol{k}|^2}\right)\delta_{ab} \tag{4.146}$$

$$-\mathrm{i}\,\tilde{\Delta}_{i0}^{ab}(k) = 0 \tag{4.147}$$

$$-\mathrm{i}\,\tilde{\Delta}_{00}^{ab}(k) = \mathrm{i}\,\tilde{\Delta}_{44}^{ab}(k) = \frac{\mathrm{i}}{|\boldsymbol{k}|^2}\delta_{ab} \tag{4.148}$$

式(4.146)～(4.148)为库仑规范条件式(4.145)下的传播子，其形式与电磁场情况相似。由式(4.148)知道，$\Delta_{00}^{ab}(x)$为瞬时库仑势。由式(4.146)和(4.147)得到

$$k_i\,\tilde{\Delta}_{i\nu}^{ab}(k) = 0$$

这表示只有横场进入传播子。因此，$W[J]$中 $\boldsymbol{J}$ 的纵向部分不起作用，可以限制 $\boldsymbol{J}$ 满足

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$$

由于规范固定项中不含场的二次以上的项，库仑规范下的三个规范粒子和四

个规范粒子的顶点与协变规范下的式(4.131)和(4.132)是相同的,规范场与标量场及 Dirac 场作用的顶点也与协变规范相同。由式(4.107)和(4.139)得到 $\mathscr{L}_{\text{eff}}$ 中的虚拟标量场项为



图 4.9

$$-\nabla\bar{\eta}\cdot\boldsymbol{D}\eta$$

因此虚拟标量场的传播子为

$$-\mathrm{i}\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2}\delta_{ab} \tag{4.149}$$

由图 4.9 表示。虚拟标量场只与规范势的空间分量起作用,作用顶点为(见图 4.10)

$$gf_{abc}k_i \tag{4.150}$$



图 4.10

从路径积分形式说,一个最简单的规范条件是所谓轴规范条件

$$n_\mu A_\mu^a(x)=0 \tag{4.151}$$

其中,$n$ 为固定的类空矢量,$n^2=1$。用类似于前面对时性规范条件用的方法可以证明,轴规范条件式(4.151)总可以通过规范变换得到满足。为此,我们将坐标矢量写为

$$x=\lambda(x)n+x_\perp \tag{4.152}$$

其中,$x_\perp$ 满足

$$n_\mu x_{\perp\mu}=0 \tag{4.153}$$

$\lambda(x)$为一标量函数。由给定的规范势 $A_\mu$ 出发用规范函数

$$U^{-1}(x)=P\exp\left\{\mathrm{i}g\int_0^{\lambda(x)}n_\mu A_\mu(\lambda'n+x_\perp)\mathrm{d}\lambda'\right\} \tag{5.154}$$

作规范变换,其中 $P$ 表示按$\lambda'$的大小排列。$U^{-1}$满足方程

$$\frac{\partial U^{-1}}{\partial\lambda(x)}=\mathrm{i}gn\cdot AU^{-1} \tag{4.155}$$

因此对变换后得到的规范势 $A'$有

$$n\cdot A'=Un\cdot AU^{-1}+\frac{\mathrm{i}}{g}U\frac{\partial}{\partial\lambda}U^{-1}=0 \tag{4.156}$$

即 $A'$满足轴规范条件。由式(4.156)知道保持轴规范条件不变的规范变换必须与 $\lambda$ 无关。如果我们取边界条件

$$A_\mu(x)\to 0,\quad 当\ \lambda(x)\to\infty$$

则在 $\lambda\to\infty$时 $U(x_\perp,\lambda)\to I$,因此 $U$ 必须恒等于$I$。这意味着轴规范条件唯一确定规范势。轴规范条件与时性规范条件的这种区别是由于时间与空间在物理意义

上的不对称。一般不能要求时间趋于∞时场趋于零。

我们选取

$$f^a = n_\mu A_\mu^a \tag{4.157}$$

由式(4.106)及(4.107)得到

$$-M_{fab} = n_\mu D_\mu^{ab}\delta^4(x-y) = n_\mu \partial_\mu \delta^4(x-y)\delta_{ab} \tag{4.158}$$

因此在轴规范下 Fadeev-Popov 行列式 $\Delta_f(A)$与 $A$ 无关,可以吸收到归一化因子中去。或则由式(4.112)看,此时 $\eta(x)$成为自由场与规范场 $A_\mu$ 不耦合,因而不必考虑。所以生成泛函 $W[J]$可写为

$$W[J] = N\int[\mathscr{D}A_\mu]\exp\left\{i\int d^4x\left[\mathscr{L} - \frac{1}{2\alpha}(n_\mu A_\mu^a)(n_\nu A_\nu^a) + J_\mu^a A_\mu^a\right]\right\} \tag{4.159}$$

相应的自由场部分为

$$W_0[J] = N\int[\mathscr{D}A_\mu]\exp\left\{i\int d^4x\left[-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 - \frac{1}{2\alpha}(n_\mu A_\mu^a)^2 + J_\mu^a A_\mu^a\right]\right\}$$

由上式得到

$$W_0[J] = \exp\left\{\frac{i}{2}\iint d^4x d^4x' J_\mu^a(x)\Delta_{F_{\mu\nu}}^{ab}(x-x')J_\nu^b(x')\right\} \tag{4.160}$$

其中,$\Delta_{F_{\mu\nu}}^{ab}(x)$满足方程

$$-\left(\delta_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu - \frac{1}{\alpha}n_\mu n_\nu\right)\tilde{\Delta}_{F_{\nu\mu'}}^{ab}(x) = \delta_{\mu\mu'}\delta_{ab}\delta^4(x) \tag{4.161}$$

由上式得到 $\Delta_{F\mu\nu}(x)$的傅氏变换$\tilde{\Delta}_{F_{\mu\nu}}(k)$满足的方程

$$\left(k^2\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu + \frac{1}{\alpha}n_\mu n_\nu\right)\tilde{\Delta}_{F_{\nu\mu'}}^{ab}(k) = \delta_{\mu\mu'}\delta_{ab} \tag{4.162}$$

由上式可解出传播子,为

$$-i\tilde{\Delta}_{F_{\mu\nu}}^{ab}(k) = \delta_{ab}\frac{-i}{k^2 - i\varepsilon}\left\{\delta_{\mu\nu} + \frac{1}{(n\cdot k)^2}[(1+\alpha)k_\mu k_\nu - n\cdot k(k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu)]\right\} \tag{4.163}$$

如取规范固定项的参数 $\alpha\to 0$,由式(4.159)知 $W[J]$中的路径积分集中在满足轴规范条件 $n\cdot A=0$ 的区域,此时传播子式(4.163)变为

$$-i\tilde{\Delta}_{F_{\mu\nu}}^{ab}(k) = \delta_{ab}\frac{-i}{k^2 - i\varepsilon}\left\{\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu n_\nu + n_\mu k_\nu}{n\cdot k} + \frac{k_\mu k_\nu}{(n\cdot k)^2}\right\} \tag{4.164}$$

上式为轴规范条件下的规范场传播子。它满足条件

$$n_\mu\tilde{\Delta}_{F_{\mu\nu}}^{ab}(k) = 0 \tag{4.165}$$

因此，$W[J]$在 $n$ 方向的外源不起作用，可限制外源满足条件

$$n \cdot J = 0 \tag{4.166}$$

由于轴规范下有效拉氏量中场幂次高于 2 的项与协变规范的一样，因此规范场自作用顶点及其与其他场相互作用顶点都与协变规范的一样，而轴规范下 Feynman 规则中不出现非物理虚拟粒子。

传播子式(4.164)的分子在 $k^2=0$ 处满足

$$k_\mu \left\{ \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu n_\nu + n_\mu k_\nu}{n \cdot k} + \frac{k_\mu k_\nu}{(n \cdot k)^2} \right\} = 0 \tag{4.167}$$

我们期待，在质壳 $k^2=0$ 附近传播子有下面形式

$$-\mathrm{i}\frac{1}{k^2}\sum_\sigma e_\mu^\sigma(k)e_\nu^\sigma(k)\delta_{ab}$$

其中，$\sigma$ 为极化。因此式(4.165)和(4.167)意味着 $e(k)$满足

$$k \cdot e(k) = 0 \tag{4.168}$$

$$n \cdot e(k) = 0 \tag{4.169}$$

上两式表示在质壳上轴规范的传播子只有两个独立的极化的贡献。事实上轴规范传播子的分子满足

$$\sum_{\mu,\nu}\delta_{\mu\nu}\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{n_\mu k_\nu + k_\mu n_\nu}{n \cdot k} + \frac{k_\mu k_\nu}{(n \cdot k)^2}\right) = 2$$

在 Landau 规范中，相应的量为

$$\sum_{\mu,\nu}\delta_{\nu\mu}\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) = 3$$

在 Feynman 规范中则为 4。记住在轴规范下没有 Fadeev-Popov 虚拟粒子。由于轴规范有上述这些性质，它有时被称为物理规范。在轴规范的 Feynman 规则中 $S$ 矩阵的各个 Feynman 图都不含相应于非物理粒子的多余极点。轴规范虽然有这些优点，但它不具有明显的 Lorentz 协变性，而且传播子式(4.164)的形式使得 Feynman 积分的计算相当麻烦。因此在具体的计算中通常还是用协变规范较为方便。但轴规范在有些物理分析中是方便的。

时性规范条件下的 Feynman 规则可由原来的路径积分表示式(4.95)得出，也可仿照上面对轴规范的做法取规范固定项为

$$-\frac{1}{2\alpha}f^a f^a = -\frac{1}{2\alpha}A_0^a A_0^a$$

然后令 $\alpha \to 0$ 而得到。时性规范的传播子为

$$\tilde{\Delta}_{F_{ij}}^{ab}(k) = \frac{-\mathrm{i}}{k^2 - \mathrm{i}\varepsilon}\left(\delta_{ij} + \frac{k_i k_j}{-k_0^2}\right)\delta_{ab} \tag{4.170}$$

$$\widetilde{\Delta}^{ab}_{F_{\mu 0}}(k) = \widetilde{\Delta}^{ab}_{F_{0\mu}}(k) = 0 \tag{4.171}$$

$J_0$ 可取为零。时性规范下也不须引入虚拟标量场。在质壳上传播子的分子满足

$$\lim_{k^2 \to 0} k^2 k_\mu \widetilde{\Delta}^{ab}_{F_{\mu\nu}} = \lim k^2 k_i \widetilde{\Delta}^{ab}_{F_{i\nu}} = 0 \tag{4.172}$$

因此只有两个横向的极化矢量的贡献。

如前所述,在用时性规范计算物理过程的 $S$ 矩阵元时,需要考虑对物理态的附加条件。如果像通常微扰论中一样对散射过程用耦合常数 $g$ 在 $t \to \pm\infty$ 时逐渐地趋于零的假设,对渐近态可以用 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ 的条件。这只要把初、末态的规范粒子的极化取为横向的就可以了。式(4.170)中有 $k_0^{-2}$ 奇异性,关于它的处理,文献上有不同的意见[11]。

在上面推导各种规范下 Feynman 规则的过程中,没有从作为路径积分确切定义的离散形式的极限出发,因此不是十分严格的。有一些人用不同的方法(包括正则量子化方法)也讨论过这些规则。对于线性协变规范,所有的结果都是一致的。对库仑规范(和轴规范),李政道等的工作[10]给出与上述推导不同的结果。他们的工作是由库仑规范下的量子化哈密顿算符出发的。由于 $\pi_i^2$ 项的系数与规范势有关,对库仑规范,哈密顿算符要注意第三章中提到的算符顺序问题。他们得到的 Feynman 规则与上述结果比较多了一些附加项,这些项只对双圈以上的图有贡献。

## 4.5　虚拟标量场与 $S$ 矩阵的幺正性

从物理上说,在非 Abel 规范场论的 Feynman 规则中虚拟标量场的引入是与 $S$ 矩阵的幺正性相联系的。事实上 Feynman[7] 正是根据这种观点首先发现需要引入虚拟标量场的闭合圈。物理过程的 $S$ 矩阵的幺正性意味着

$$S^\dagger S = (I - \mathrm{i}T^\dagger)(I + \mathrm{i}T) = I \tag{4.173}$$

令

$$\langle f | T | \mathrm{i} \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) M_{fi} \tag{4.174}$$

则幺正条件式(4.173)意味着

$$M_{fi} - M_{fi}^* = \mathrm{i}(2\pi)^4 \sum_n \delta^4(P_n - P_i) M_{nf}^* M_{ni} \tag{4.175}$$

其中,$\sum\limits_n$ 表示对所有物理的中间态求和,$P_n$ 为中间态的总动量。考虑正反 Dirac 粒子对的散射过程。两个规范粒子的中间态对幺正条件式(4.175)的贡献可写为

$$\mathrm{i}(2\pi)^4 \sum_{\sigma_1,\sigma_2=1,2} \int \prod_{j=1,2} \left[ \frac{\mathrm{d}^4 k_j}{(2\pi)^4} 2\pi\delta(k_j^2)\theta(\omega_j) \right] \delta^4(k_1 + k_2 - P_i)$$

$$\times M^*_{n_f\nu_1\nu_2} M_{n_i\mu_1\mu_2} e^{\sigma_1}_{\mu_1} e^{\sigma_2}_{\mu_2} \bar{e}^{\sigma_1}_{\nu_1} \bar{e}^{\sigma_2}_{\nu_2} \tag{4.176}$$

其中，$k_1$ 和 $k_2$ 为两个中间态规范粒子的动量，$e^{\sigma_1}$ 和 $e^{\sigma_2}$ 为它们的极化矢量。只有两个物理的极化进入幺正条件之中。

在微扰论最低阶包含两个规范粒子中间态的 $M_{fi}$ 的 Feynman 图有如图 4.11 几个。而中间过程振幅 $M_{ni}$ 与 $M_{fn}$ 的有关 Feynman 图有如图 4.12 几个。

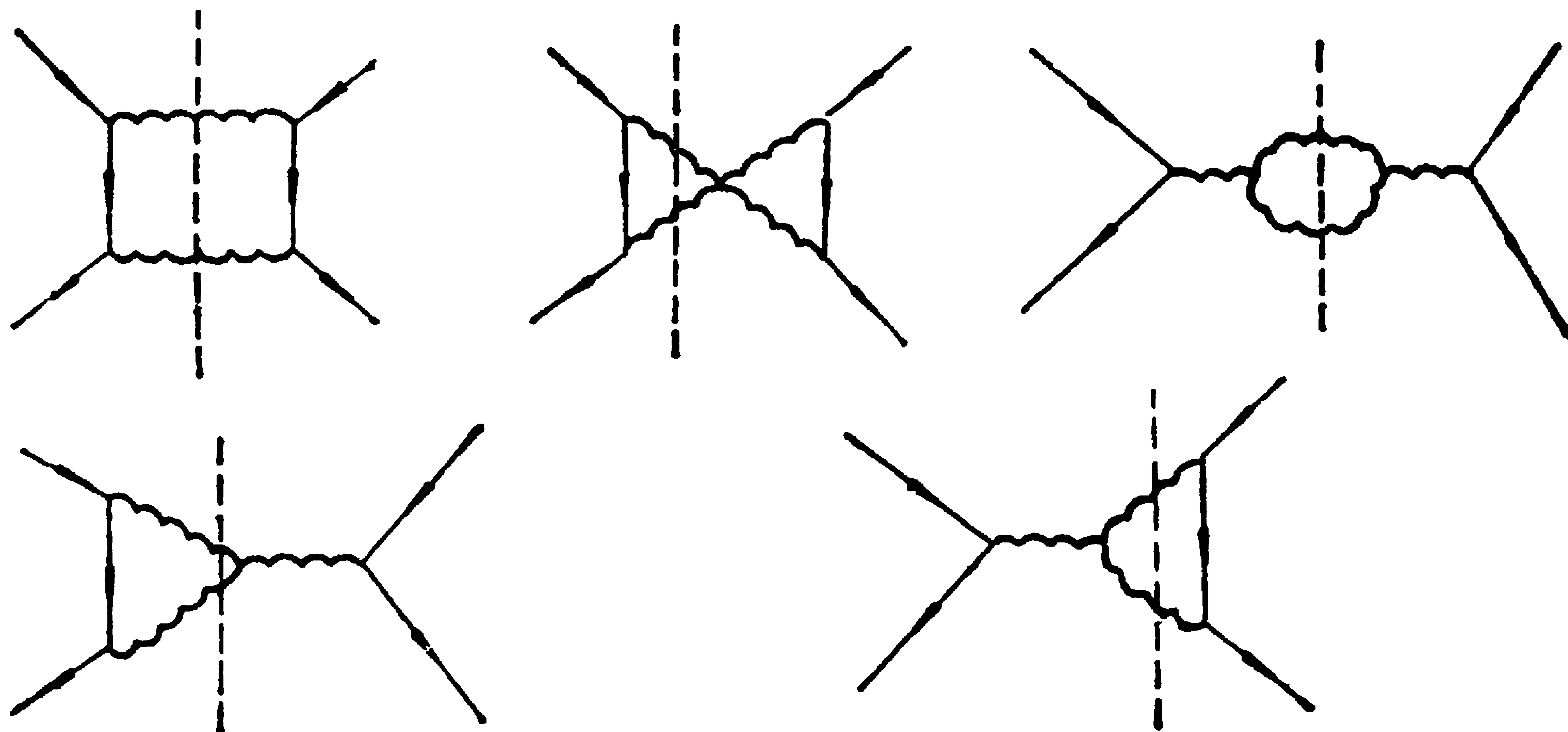


图 4.11

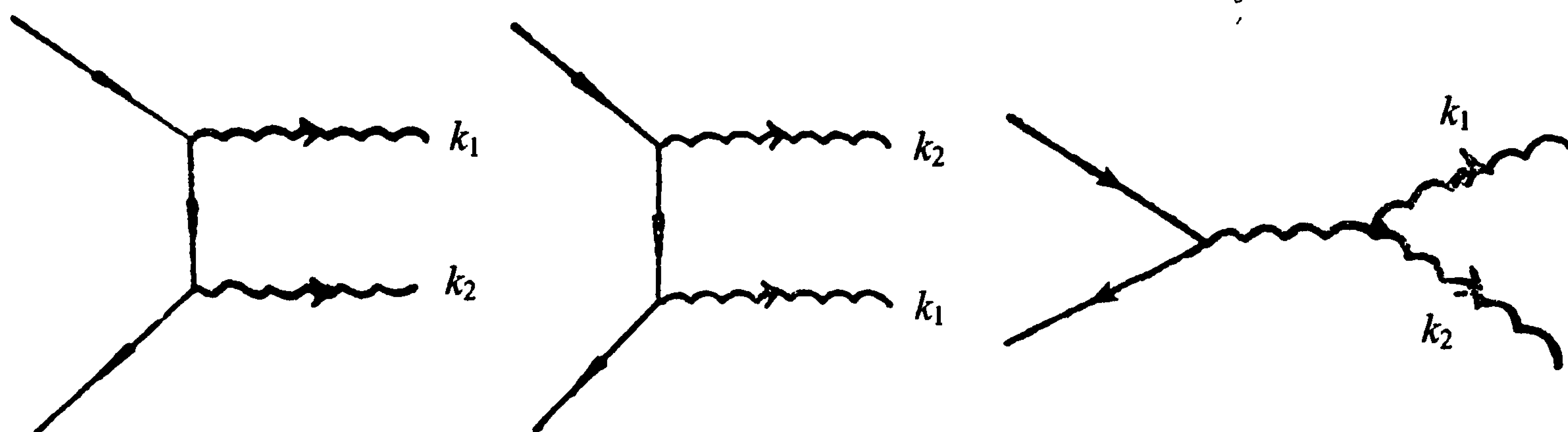



图 4.12

如果用 Feynman 规范，图 4.11 中两个被切割的规范场传播子为

$$-\mathrm{i}\frac{\delta_{\mu\nu}}{k_j^2-\mathrm{i}\varepsilon}, \qquad j=1,2$$

按照 Cutkosky 规则[8]，为求两规范粒子中间态对 $M_{fi}-M^*_{if}$ 的贡献应把图 4.11 中被虚线切割的传播子换为

$$\delta_{\mu\nu} 2\pi\delta(k_j^2)\theta(\omega_j) \tag{4.177}$$

并把切开的线右边的振幅取复共轭。式(4.177)中的因子 $\delta_{\mu\nu}$ 可写为

$$\delta_{\mu\nu} = \sum_{\sigma=1}^{4} e^{\sigma}_{\mu}\bar{e}^{\sigma}_{\nu} \tag{4.178}$$

它包含四个极化矢量的贡献。但是式(4.176)中只含两个物理的横向极化,因此如果有关的 Feynman 图只有图 4.11 中的几个,则幺正条件式(4.175)不能满足。

量子电动力学没有这个困难,因为横向极化矢量 $e^{\sigma}(\sigma=1,2)$满足

$$k\cdot e^{\sigma}=k^{*}\cdot e^{\sigma}=0$$

我们可以把中间态的因子 $\delta_{\mu\nu}$写为

$$\delta_{\mu\nu}=\sum_{\sigma=1,2}e_{\mu}^{\sigma}(k)\bar{e}_{\nu}^{\sigma}(k)+\frac{k_{\mu}k_{\nu}^{*}+k_{\mu}^{*}k_{\nu}}{2\omega^{2}} \tag{4.179}$$

在量子电动力学中,如 Dirac 粒子在质壳上,则振幅 $M_{\mu_1,\mu_2\cdots}$满足 Ward 恒等式

$$k_{\mu_i}M_{\mu_1\cdots\mu_i\cdots}=0 \tag{4.180}$$

上式是第一章式(1.33)中 Ward-Takahashi 恒等式的推论,它对非物理极化(甚至不在质壳上)的光子也成立。因此式(4.179)中非物理极化的项不起作用。但是在非 Abel 规范场论中,由于 $A_{\mu}^{a}(x)$场本身带规范群的量子数

$$[J_0^a(x),\ A_{\mu}^{b}(y)]_{x_0=y_0}=\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})f_{abc}A_{\mu}^{c}(x)\neq 0$$

不像电磁势可与电荷密度对易,因此得到第一章式(1.33)的推导不适用于非 Abel 规范场,这个公式不再成立。其结果是,如果除第 $i$ 个规范粒子以外的其他规范粒子不都具有物理的极化,则简单的 Ward 恒等式(4.180)不成立。而在这里讨论的幺正性条件中有两个规范粒子有非物理的极化。实际上,如果用 4.3 节中给出的 Feynman 规则直接计算可以验证,式(4.179)中的非物理极化项对图 4.11 的幺正条件的贡献不等于零,而它们的贡献正好被虚拟标量粒子中间态对图 4.13 的贡献所抵消。因此虚拟标量粒子的引入保证了幺正性。

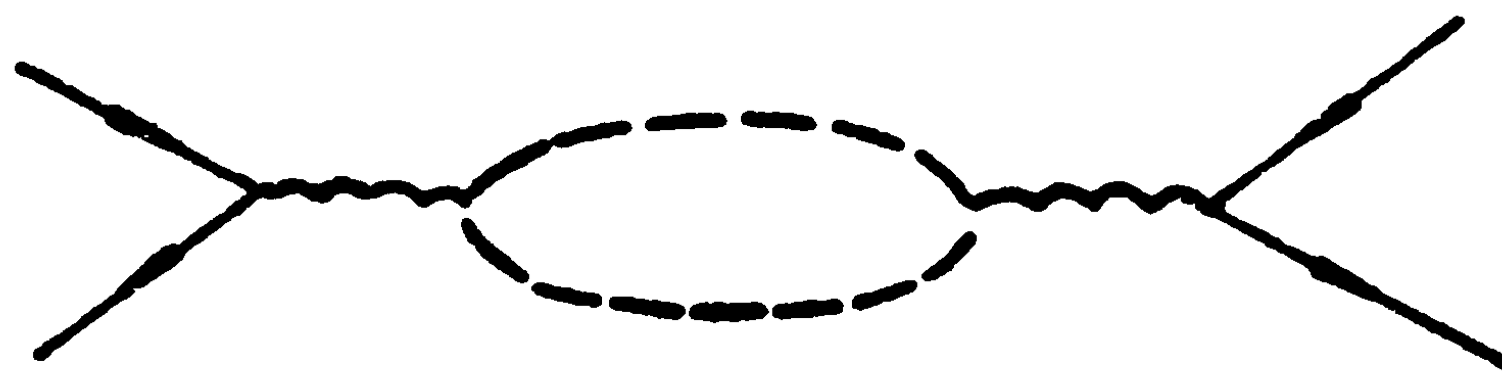


图 4.13

以上的讨论说明,对规范场论这样的其理论形式中出现不相应于物理粒子的场的情况,$S$ 矩阵的幺正性是否满足是需要特别考察的问题;对于幺正性的证明,起源于原始理论的规范不变性的 Ward-Takahashi 恒等式是关键的。在第五章中将给出按 4.3 节中的 Feynman 规则写出的 Green 函数所满足的 Ward-Takahashi 恒等式并给出重整化 $S$ 矩阵的幺正性的完整证明。

# 参 考 文 献


1 J B Bjorken and S D Drell. Relativistic Quantum Fields(Chapter **14**). Mc-Graw-Hill, 1965

2 K Bleuler. Helv Phys Acta. 1950, **23**: 567; S N Gupta. Proc Phys Soc. 1950, **A63**: 81; D Lurié. Particles and Fields(Chapter 4). Interscience Publishers, 1968

3 微扰论的证明可参看文献[1], chapter 17

4 V N Gribov. Nucl Phys. 1978, **B139**: 1

5 P A M Dirac, Cand J Phys. 1950, **2**: 129; 1951, **3**: 1; A Hanson, T Regge and C Teitelboim. Constrained Hamiltonian system. Rome: Academia Nazionale dei Lincei, 1976

6 L Fadeev and V N Popov. Phys Letters. 1967, **25B**: 29

7 R P Feynman. Acta Phys. Polonica, 1963, **24**: 697

8 R E Cutkosky. Jour Math Phys. 1960, **1**: 429; C Itzykson and J-B Zuber. Quantum Field Theory (Chapter 7). Mc Graw-Hill, 1980

9 L D Fadeev. Theoretical and Mathematical Physics. 1969, **1**: 1; C Itzykson and J B. Zuber. 文献[8], Chapter 12

10 N H Christ and T D Lee. Phys Rev. 1980, **D22**: 939

11 W Konetschny and W Kummer. Nud Phys. 1975, **B100**: 106; J Frenkel. Phys Rev. 1976, D**13**: 2325; Phys Lett. 1979, **85B**: 63; S Caracciolo, G Curci and P Menotti. Phys Lett. 1982, **113B**: 311

12 Kerson Huang. Quarks, Leptons and Gauge Fields. World Scientific Publishing Company 1982

# 第五章　规范场理论的重整化

## 5.1　重整化一般理论概述

通常在利用微扰论 Feynman 规则计算量子场论中的 Green 函数时，会遇到由对内部动量积分引起的发散。发散困难反映点粒子量子场论基本理论结构的不完整性。重整化手续是绕过这个困难由量子场论中分离出有意义的物理结果的方法。最早的系统研究重整化理论的工作是 Dyson 的文章[1]。构造重整化 Green 函数的一般减除手续是 Bogoliubov 和 Parasiuk[2,3]最先给出的。重整化 Green 函数的有限性的严格证明由他们和 Hepp[4]完成。其后 Zimmerman[5]的工作对重整化理论的结构做了进一步的阐明。在本节中我们将综述重整化理论的主要概念和内容而不做证明。文献[6]也可作为参考。

### 5.1.1　数幂律

为了确定 Green 函数的微扰论表示式中哪些积分包含发散，引入表面发散度的概念。考虑联通的正规(即单粒子不可约)顶角图 $\Gamma$。在包含标量粒子、矢量粒子和 Dirac 粒子的理论中相应于图 $\Gamma$ 的顶角函数可以表示为如下形式的积分

$$J_\Gamma = \int I_\Gamma \prod_{i=1}^{L} \frac{\mathrm{d}l_i}{(2\pi)^4} = \int \prod_{i=1}^{L} \frac{\mathrm{d}l_i}{(2\pi)^4} P \prod_{j=1}^{I_B} (k_j^2 + m_j^2 - \mathrm{i}\varepsilon)^{-2} \cdot \prod_{j'=1}^{I_F} (\mathrm{i}\hat{k}_{j'} + m_{j'} - \mathrm{i}\varepsilon)^{-1} \tag{5.1}$$

其中，$k_j$ 是内线 $j$ 的动量，$I_B$ 和 $I_F$ 分别是 Bose 子和 Fermi 子内线数。$k_j$ 可以表示为外线动量 $p_i$ 和独立的回路动量 $l_i$ 的线性组合。$L$ 是独立回路动量的总数。$P$ 是由 $k_j$ 的分量组成的多项式，来自顶点上相应于带微商耦合的动量因子及矢量场传播子的分子。

在某些质量 $m_i=0$ 时，$J_\Gamma$ 可能有红外发散。这里不讨论这种发散。为了进行红外发散的正规化，可以人为地在相应的传播子分母中引入小的质量 $m_j$。在外动量的非欧氏区[即某些 $p_i^2 \leqslant 0$ 或 $(p_{i_1}+p_{i_2}+\cdots)^2 \leqslant 0$ 时]内当 $\varepsilon \to 0$ 时 $J_\Gamma$ 有一些极点和支点[7]。这些奇点发生在一些内线在质壳上时，与紫外发散无关。

对于紫外发散的讨论，质量 $m_j$ 是不重要的。注意，正规顶角图形每条线的动量都参加积分。做变换 $k_j \to \lambda k_j$，如果在 $\lambda \to \infty$ 时 $J_\Gamma \to \lambda^{\omega(\Gamma)} J_\Gamma$ 则 $\omega(\Gamma)$ 称为

Feynman图 $\Gamma$ 的表面发散度。由 $\Gamma$ 的一部分顶点及两端与这些顶点相联的内线组成的图形称为 $\Gamma$ 的子图形。表面发散度的概念也可以用于 $\Gamma$ 的子图形。可以严格证明[4,6]如下的数幂定理:如 $\omega(\Gamma)<0$,且对 $\Gamma$ 的任何联通正规子顶角图 $\Gamma'$ 有 $\omega(\Gamma')<0$,则在外动量的欧氏区[即 $p_i^2>0,(p_{i_1}+p_{i_2}+\cdots)^2>0$ 的区域] $J_\Gamma$ 收敛。如果对所有联通正规顶角子图形 $\Gamma'$ 有 $\omega(\Gamma')<0$,但 $\omega(\Gamma)\geqslant 0$,则积分

$$\int \frac{\partial^n}{\partial p_{i_1\mu_1}\cdots\partial p_{i_n\mu_n}} I_\Gamma \prod_{j=1}^{L} \frac{\mathrm{d}l_j}{(2\pi)^4}, \qquad n \geqslant \omega(\Gamma)+1$$

收敛,这意味着 $J_\Gamma$ 可分出一个有限的部分,其余部分为有发散系数的外动量的多项式,这个多项式的阶数 $\leqslant\omega(\Gamma)$。

注意,表面发散度 $\omega(\Gamma)<0$ 的顶角可能由于包含表面发散度 $\omega(\Gamma')\geqslant 0$ 的子顶角图 $\Gamma'$ 而发散。$\omega(\Gamma)\geqslant 0$ 的顶角函数包含发散阶数为 $\omega(\Gamma)$ 的积分。但是在一些情况下,由于对称性的原因 $J_\Gamma$ 中各个发散部分互相抵消,使得真正的发散度低于 $\omega(\Gamma)$。例如,在量子电动力学中电子自能的单圈图表面发散度是 1。但是,由于发散阶数为 1 的项中被积函数是 $l$ 的奇函数,真正的发散度只是对数性的。光子自能图的表面发散度是 2。但是由于理论的规范不变性或电流守恒,真空极化张量 $\Pi_{\mu\nu}(q)$ 满足 $q_\mu\Pi_{\mu\nu}(q)=0$,因此它有 $(q_\mu q_\nu-\delta_{\mu\nu}q^2)\Pi(q^2)$ 的形式。$\Pi(q^2)$ 的发散也只是对数性的。

暂时限制于标量粒子、Dirac 粒子和零质量矢量粒子。在变换 $k\to\lambda k$ 条件下,当 $\lambda\to\infty$ 时标量粒子和零质量矢量粒子的传播子 $\sim\lambda^{-2}$,Dirac 粒子传播子 $\sim\lambda^{-1}$。设顶点 $v$ 上的耦合带有场的 $\delta_v$ 次微商,则顶点上的因子 $\sim\lambda^{\delta_v}$。每个回路动量的积分 $\mathrm{d}^4 l\sim\lambda^4$。因此

$$\omega(\Gamma)=4L-I_F-2I_B+\sum_{v=1}^{V}\delta_v \tag{5.2}$$

其中,$V$ 为图 $\Gamma$ 中顶点的总数。利用关系式

$$L=I_B+I_F-V+1 \tag{5.3}$$

可以把式(5.2)化为

$$\omega(\Gamma)=2I_B+3I_F+\sum_{v=1}^{V}\delta_v-4V+4 \tag{5.4}$$

设 $E_B$ 和 $E_F$ 分别为顶角 $\Gamma$ 的 Bose 子和 Fermi 子外线数,$b_v,f_v$ 为与顶点 $v$ 相联的 Bose 子和 Fermi 子线数(包括内线与外线),考虑到每条内线与两个顶点联接,我们有

$$\begin{aligned} E_B+2I_B &= \sum_v b_v \\ E_F+2I_F &= \sum_v f_v \end{aligned} \tag{5.5}$$

将式(5.5)代入式(5.4)得到

$$\omega(\Gamma) = 4 - E_B - \frac{3}{2}E_F + \sum_{v=1}^{V}(d_v - 4) \tag{5.6}$$

其中

$$d_v = b_v + \frac{3}{2}f_v + \delta_v \tag{5.7}$$

以质量为标度,Bose 子场的量纲为 1,Fermi 子场的量纲为 3/2,拉氏函数密度的量纲为 4,因此 $d_v$ 是相应于顶点 $v$ 的相互作用拉氏函数密度 $\mathscr{L}_I$ 中的场算符乘积的量纲,而 $-d_v+4$ 正好是相应的耦合常数 $g_v$ 的量纲。

由式(5.6)知道,可以把这里讨论的量子场论分为两类:第一类,$d_v \leqslant 4$。对这一类场论只有外线数满足条件

$$E_{\mathrm{B}} + \frac{3}{2}E_{\mathrm{F}} \leqslant 4$$

的有限几种顶角的表面发散度$\geqslant 0$。这类场论称为可重整的。下面将说明这种理论的发散可以通过在拉氏函数中引入有限几个抵消项来消去。如果存在 $d_v=4$ 的耦合,则在满足条件

$$E_{\mathrm{B}} + \frac{3}{2}E_{\mathrm{F}} \leqslant 4$$

的顶角函数中不论独立的回路数多大,都存在 $\omega(\Gamma)\geqslant 0$ 的图形。因此包含发散的 Feynman 图有无穷多个。属于这一类的有标量场 $\varphi^4$ 自耦合理论及量子电动力学。一个特殊的情况是所有的顶点都有 $d_v<4$。唯一满足这个条件的包含相互作用的理论是标量场 $\varphi^3$ 自耦合理论。这时 $d_v=3$。在这个理论中只有单圈自能图有 $\omega(\Gamma)=4-2-2=0$,单圈和双圈蝌蚪图(一条外线)有 $\omega(\Gamma)=2$ 和 0,其余的顶角图形都有 $\omega(\Gamma)<0$。发散的图形只有有限几个。这种理论称为超可重整的。但是 $\phi^3$ 理论的能量谱没有下界,在物理上是不能接受的。

第二类,理论中存在 $d_v>4$ 的顶点。这时不论外线数 $E_{\mathrm{B}}$ 和 $E_{\mathrm{F}}$ 如何,只要微扰论的阶数足够高,图形中包含足够多的顶点,总可以使 $\omega(\Gamma)\geqslant 0$,因此这类理论中所有顶角函数都有 $\omega(\Gamma)\geqslant 0$ 的图形,而且 $\omega(\Gamma)$ 可以随微扰论的阶数增高而趋于无穷。这类理论的发散不能用在拉氏函数中引入有限几个抵消项来消去。它们称为不可重整的。属于这一类的有 $\bar{\psi}\Gamma\psi\bar{\psi}\Gamma\psi$ Fermi 耦合理论。

发散图形种数与耦合常数 $g_v$ 的量纲 $-d_v+4$ 有关,这是容易理解的。微扰论的阶数愈高,顶角表示式中 $g_v$ 的幂次也愈高。如果 $g_v$ 有负的量纲,由简单的量纲分析知道顶角表示式中的积分必然有更高的量纲,因而导致阶数更高的发散。

对于有质量的矢量粒子,传播子有

$$\left(\delta_{\mu\nu}+\frac{k_{\mu}k_{\nu}}{m^{2}}\right)\Big/(k^{2}+m^{2})$$

的形式，$\frac{1}{m^2}k_{\mu}k_{\nu}$ 项的存在使得微扰论高阶有愈来愈高的表面发散度。要使理论成为可重整的，这样的项必须在微扰论各阶中消去。有质量光子的电动力学就是这种情形，这时中性矢量粒子与守恒流耦合，因此传播子中的 $k_{\mu}k_{\nu}$ 项不作贡献。以后我们将看到自发破缺的非交换群规范场理论也是这种情形。

### 5.1.2 正规化，抵消项及归一化条件

在构造拉氏函数中抵消发散的抵消项之前，为了使得所进行的数学处理有意义，不致得到含混的结果，必须先把微扰论表示式正规化，即修改 Feynman 规则使顶角的表示式成为有限的。一个最简单的保持 Lorentz 协变性的正规化方案，是把传播子的分母做如下的修改。

$$\frac{1}{k^{2}+m^{2}-\mathrm{i}\varepsilon}\rightarrow\frac{1}{k^{2}+m^{2}-\mathrm{i}\varepsilon}-\frac{1}{k^{2}+\Lambda^{2}-\mathrm{i}\varepsilon}\tag{5.8}$$

在 $k^2\to\infty$ 时它 $\sim(k^2)^{-2}$，可以保证对回路动量积分的收敛性。在引入抵消项完成重整化手续后再使 $\Lambda^2\to\infty$。显然，原来收敛的积分在 $\Lambda^2\to\infty$ 时仍回到原来的表示式。

在量子电动力学中，如果对光子自能的电子圈图也用式(5.8)中的正规化方案修改电子传播子分母，则正规化的真空极化张量 $\Pi_{\mu\nu}^{\mathrm{reg}}(q)$ 不能满足条件 $q_{\mu}\Pi_{\mu\nu}^{\mathrm{reg}}(q)=0$。因此量子电动力学通常采用 Pauli-Villars[8] 正规化方案。在这种方案中只有光子传播子采用式(5.8)中的正规化，而对电子则只是把闭合的电子圈图修改为

$$-(-e)^{n}\sum_{i=0}^{K}c_{i}\int\frac{\mathrm{d}l}{(2\pi)^{4}}\mathrm{Tr}\left(\frac{-\mathrm{i}}{\mathrm{i}\hat{k}_{1}+M_{i}}\gamma_{\mu_{1}}\frac{-\mathrm{i}}{\mathrm{i}\hat{k}_{2}+M_{i}}\gamma_{\mu_{2}}\cdots\frac{-\mathrm{i}}{\mathrm{i}\hat{k}_{n}+M_{i}}\gamma_{\mu_{n}}\right)\tag{5.9}$$

其中，$M_0=m$ 为电子的质量，$c_0=1$。选择 $c_i$ 和 $M_i$ 使

$$\sum_{i=0}^{K}c_{i}=0,\qquad\sum_{i=0}^{K}c_{i}M_{i}^{2}=0\tag{5.10}$$

可以使式(5.9)中的积分收敛。在引入拉氏函数中的抵消项完成重整化手续后再令 $M_i\to\infty(i\neq0)$。由于式(5.9)中 $i\neq0$ 的项与原来的电子圈图有相同的形式，不难验证正规化的真空极化张量满足横向条件(例如，可参看文献[9]中的证明)。

正规化的方案带有很大的任意性，最后的物理上有意义的结果必须是与正规化的方案及切断常数 $\Lambda$ 或 $M_i$ 无关的。

拉氏函数中的抵消项是用归纳法在微扰论中逐阶定出的。首先考虑单圈图，它们是 $\hbar$ 的一阶项。由 5.1.1 小节中的讨论知道只有有限几种顶角包含发散，并

且其发散部分最多是外线动量的 $\omega(\Gamma)$ 阶多项式。对于含 $E_B$ 条 Bose 子外线和 $E_F$ 条 Fermi 子外线的顶角的发散，可以用拉氏函数中包含 $E_B$ 个 Bose 场算符，$E_F$ 个 Fermi 场算符及它们的导数(阶数小于 $\omega(\Gamma)+1$)的乘积的一项来抵消。这个抵消项也是 $\hbar$ 的一阶项。

以拉氏函数密度为

$$\mathscr{L}^{[0]} = -\frac{1}{2}[(\partial_\mu\varphi)^2 + m^2\varphi^2] - \frac{g}{4!}\varphi^4 \tag{5.11}$$

的标量场自耦合理论为例。按照式(5.6)，在这个理论中只有 $E_B=2,4$ 的顶角图 $\Gamma^2$ 和 $\Gamma^4$ 有发散，相应的表面发散度为 $\omega(\Gamma^2)=2$ 及 $\omega(\Gamma^4)=0$。理论有 $\varphi\to-\varphi$ 变换的不变性，如 $m^2>0$，无对称性自发破缺，$E_B=1,3$ 的顶角函数为零。在单圈图一级把 $\Gamma^2$ 和 $\Gamma^4$ 写成如下的泰勒展开形式

$$\Gamma_1^{[0]2}(p^2,\Lambda) = \Gamma_1^{[0]2}(p^2,\Lambda)\Big|_{p^2=\mu^2} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p^2}\Gamma_1^{[0]2}(p^2,\Lambda)\Big|_{p^2=\mu^2} \times(p^2-\mu^2) + \Gamma_{1F}^{[0]2}(p^2) \tag{5.12a}$$

$$\Gamma_1^{[0]4}(p_i,\Lambda) = \Gamma_1^{[0]4}(p_i,\Lambda)\Big|_{p_i^2=\mu^2,\ s=t=u=\frac{-4}{3}\mu^2} + \Gamma_{1F}^{[0]4}(p_i) \tag{5.12b}$$

其中，$\mu^2$ 为任意实常数，$s=-(p_1+p_2)^2$，$t=-(p_1+p_3)^2$，$u=-(p_1+p_4)^2$，下标 1 表示单圈图，上标[0]表示未考虑抵消项。式(5.12a)中 $\Gamma_{1F}^{[0]2}$ 在 $\Lambda\to\infty$ 时是有限的。此式右方其余两项是发散项，它们可以用拉氏函数密度中如下形式的项抵消

$$-a^{[1]}\frac{1}{2}[(\partial_\mu\varphi)^2 + m^2\varphi^2] - b^{[1]}\frac{1}{2}m^2\varphi^2 \tag{5.13}$$

式(5.12b)中 $\Gamma_{1F}^{[0]4}$ 在 $\Lambda\to\infty$ 时是有限的。此式右方第一项是发散项。它可以用如下形式的项抵消

$$-\frac{1}{4!}c^{[1]}\cdot\varphi^4 \tag{5.14}$$

包含所有 $\hbar$ 一次项的顶角函数记为 $\Gamma_1^{[1]n}$，它是 $\Gamma_1^{[0]n}$ 和 $\hbar^1$ 阶抵消项之和

$$\begin{aligned}\Gamma_1^{[1]2} &= \Gamma_1^{[0]2} - a^{[1]}(p^2+m^2) - b^{[1]}m^2 \\ \Gamma_1^{[1]4} &= \Gamma_1^{[0]4} - c^{[1]}\end{aligned} \tag{5.15}$$

显然可选取 $a^{[1]}$，$b^{[1]}$ 及 $c^{[1]}$ 使得 $\Gamma_1^{[1]n}$ 有限。

这样的引进抵消项的手续可以在微扰论中逐阶进行。令在拉氏函数中引入 $\hbar^L$ 阶抵消项后的 $\hbar^{L'}$ 阶顶角为 $\Gamma_{L'}^{[L]n}$，在 $L'\leqslant L$ 时它是有限的。$L+1$ 圈顶角 $\Gamma_{L+1}^{[L]n}$ 已不含内部子图形的发散。为了抵消它在对所有回路动量积分时总的发散，我们在拉氏函数密度中引入 $\hbar^{L+1}$ 阶抵消项

$$\mathscr{L}_{L+1} = -a^{[L+1]}\frac{1}{2}[(\partial_\mu\varphi)^2 + m^2\varphi^2] - b^{[L+1]}\frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{1}{4!}c^{[L+1]}\varphi^4 \tag{5.16}$$

注意,如果所考虑的 $L+1$ 圈图没有表面发散度$\geqslant 0$ 的子图形,则与前面对单圈图的讨论相似,由数幂定理可以证明 $L+1$ 圈图的发散可以由形如式(5.16)的抵消项抵消。但是一般的 $\hbar^{L+1}$阶顶角包含子图形的发散和相应的抵消项。前面叙述的数幂定理不能直接应用到这种情况。所以,上面还没有证明形如式(5.16)的抵消项可以使 $L+1$ 圈图顶角有限。在下一节中我们将说明这样逐阶引进抵消项的程序等价于 Bogoliubov-Parasiuk-Hepp 和 Zimmerman 的 $R$ 减除手续,这个减除手续导致有限的结果。这就是说 $\Gamma^n \equiv \sum\limits_{L=0}^{\infty} \Gamma_L^{[L]n}$ 有限。

为了完全确定抵消项,需要引入归一化条件。归一化条件有很大的任意性。例如,可以取

$$\begin{aligned}\Gamma^2(p^2)\Big|_{p^2=\mu^2} &= -(\mu^2+m^2)\\ \Gamma^4(p_i)\Big|_{p_i^2=\mu^2,\, s=t=u=\frac{-4}{3}\mu^2} &= -g\end{aligned} \tag{5.17}$$

其中,$\mu^2$ 为任意实数。微扰论零阶顶角满足这个条件。因此,由这个条件定出的 $\hbar^{L+1}$阶抵消项顶角函数正好是 $\Gamma_{L+1}^{[L]2}$在 $p^2=\mu^2$ 处的泰勒展开式的前两项和 $\Gamma_{L+1}^{[L]4}$ 的展开式的第一项。由此得到

$$\begin{aligned}a^{[L+1]}\left(g, \frac{\mu}{m}, \frac{\Lambda}{\mu}\right) &= \frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma_{L+1}^{[L]2}(p^2, m^2, g, \Lambda)\Big|_{p^2=\mu^2}\\ b^{[L+1]}\left(g, \frac{\mu}{m}, \frac{\Lambda}{\mu}\right)m^2 &+ a^{[L+1]}\left(g, \frac{\mu}{m}, \frac{\Lambda}{\mu}\right)(m^2+\mu^2)\\ &= \Gamma_{L+1}^{[L]2}(\mu^2, m^2, g, \Lambda)\\ c^{[L+1]}\left(g, \frac{\mu}{m}, \frac{\Lambda}{\mu}\right) &= \Gamma_{L+1}^{[L]4}(p_i, m^2, g, \Lambda)\Big|_{p_i^2=\mu^2,\, s=t=u=\frac{-4}{3}\mu^2}\end{aligned} \tag{5.18}$$

如果 $\mu^2=-m^2$,(5.17)中第一式就表示传播子在 $p^2=-m^2$ 处有极点,这时 $m$ 为物理质量。否则 $m$ 只是一个有质量量纲的常数,然而物理质量和散射振幅可以由 $m$ 和$g$ 表示。

在引进各阶抵消项以后拉氏函数密度为

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = \mathscr{L}^{[0]} + \sum_{L=1}^{\infty}\mathscr{L}_L &= -z\frac{1}{2}[(\partial_\mu\varphi)^2 + m^2\varphi^2]\\ &- \delta m^2\frac{1}{2}z\varphi^2 - \frac{g}{4!}z_g z^2\varphi^4\end{aligned} \tag{5.19a}$$

其中

$$z = 1 + \sum_{L=1}^{\infty} a^{[L]}, \delta m^2 z = m^2 \sum_{L=1}^{\infty} b^{[L]}$$

$$z_g z^2 = 1 + \sum_{L=1}^{\infty} c^{[L]} \tag{5.20}$$

$z, z_g$ 和 $\delta m^2$ 都是 $\hbar$ 的幂级数，在现在所讨论的例子中也就是 $g$ 的幂级数。它们与切断 $\Lambda$ 有关。令

$$\varphi_0 = z^{\frac{1}{2}} \varphi, \qquad m_0^2 = m^2 + \delta m^2$$

$$g_0 = z_g g \tag{5.21}$$

式(5.19a)可以写成如下的形式

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}[(\partial_\mu \varphi_0)^2 + m_0^2 \varphi_0^2] - \frac{g_0}{4!}\varphi_0^4 \tag{5.19b}$$

式(5.19b)与(5.11)有完全相同的形式。

在引进 $\mathscr{L}$ 中的各阶抵消项以后，Green 函数是有限的，在 Heisenberg 表象中它们由下式定义

$$G^n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \langle 0 \mid T(\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n)) \mid 0\rangle \tag{5.22a}$$

相应地可以考虑 $\varphi_0$ 场的 Green 函数

$$G_{\text{reg}}^n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \langle 0 \mid T(\varphi_0(x_1)\varphi_0(x_2)\cdots\varphi_0(x_n)) \mid 0\rangle \tag{5.22b}$$

由式(5.19b)给出的 Feynman 规则算出的 $G_{\text{reg}}^n$ 作为 $g_0$ 和 $m_0$ 的函数显然包含发散的系数，它与切断 $\Lambda$ 有关。由式(5.21)得到

$$G^n(g, m, \mu) = z^{-\frac{n}{2}}\left(g, \frac{\mu}{m}, \frac{\Lambda}{\mu}\right) G_{\text{reg}}^n(g_0, m_0, \Lambda) \tag{5.23a}$$

由于顶角函数可以由 Green 函数中移去外线传播子 $G^2$ 而得到，我们有 $\varphi$ 场顶角与 $\varphi_0$ 场顶角的关系式

$$\Gamma^n(p_i, g, m, \mu) = z^{\frac{n}{2}}\left(g, \frac{\mu}{m}, \frac{\Lambda}{\mu}\right) \Gamma_{\text{reg}}^n(p_i, g_0, m_0, \Lambda) \tag{5.23b}$$

以上的讨论使我们可以从另一个角度理解逐阶引入抵消项的程序的意义。由这个程序构造的有限的 Green 函数可以看作是由式(5.19b)描述的理论做重整化变换式(5.21)和(5.23)所得的结果。我们称 $z$ 为波函数重整化常数，$z_g$ 为耦合常数重整化常数，$\varphi_0, m_0$ 和 $g_0$ 为未重整化的量，$\varphi, m$ 和 $g$ 为重整化的量。$\Gamma^n(p_i, g, m, \mu)$ 称为重整化的顶角函数。它是有限的，不依赖于切断 $\Lambda$ 但与归一化点 $\mu$ 有关。对于物理过程的 $S$ 矩阵元，外线在质壳上。$S$ 矩阵元只包含外线传播子的一半。因此由式(5.23a)得到 $S$ 矩阵元的关系式(详细的讨论可参看文献[10])

$$S^n(p_i, m, g, \mu) = S_{\text{reg}}^n(p_i, m_0, g_0, \Lambda) \tag{5.24}$$

上式表示,对 $S$ 矩阵而言,所有的发散都可以通过重新定义质量和耦合常数来消除,波函数重整化常数没有影响。重整化的质量和耦合常数在理论中是留待实验决定的参数。

一般来说,对于可重整的理论 $d_v \leqslant 4$,按数幂律引进的抵消项所含导数的阶数 $\leqslant \omega(\Gamma)$,因此由式(5.6)知道抵消项算符的量纲

$$\leqslant \omega(\Gamma) + E_{\mathrm{B}} + \frac{3}{2}E_{\mathrm{F}} \leqslant 4$$

这样的算符乘积只有有限的几种。因此如果在 $\mathscr{L}^{[0]}$ 中已包含所有的为理论的对称性所容许的量纲不大于 4 的算符乘积,则抵消项的引入总可以归结为理论中的场算符、质量和耦合常数的重整化。在把重整化的参数用实验所要求的有限值代入后,理论中的 $S$ 矩阵元不再包含发散。

如果我们对不可重整的场论做同样的逐阶引入抵消项的手续,则随着微扰论阶数的增加抵消项中算符乘积的项数也将无限增加。这样,理论中将包含无限多个待定参数,失去了预言实验结果的能力(抵消项系数与 $\Lambda$ 有关,不能由理论确定)。但是我们以后将看到,在一定的条件下,不可重整的理论作为描述能量比 $\Lambda$ 小很多的过程的低能有效理论还是有预言能力的。

我们已看到重整化的理论与归一化点 $\mu$ 有关。相应于不同的归一化点 $\mu$ 及 $\mu'$ 的两个重整化理论的差别可以用拉氏函数中有限的抵消项来消除,也就是说它们以一个有限的重整化相互联系。两个理论的重整化顶角之间有关系式

$$\begin{aligned}\Gamma^n(p_i,\ m(\mu), g(\mu), \mu) = {} & Z^{\frac{n}{2}}\left(g(\mu'), \frac{m(\mu')}{\mu}, \frac{\mu'}{\mu}\right) \\ & \times \Gamma^n(p_i,\ m(\mu'),\ g(\mu'),\ \mu')\end{aligned} \tag{5.25}$$

### 5.1.3 R 减除程序

5.1.2 小节中叙述的逐阶引进抵消项的重整化方案等价于 Bogoliubov-Parasiuk-Hepp-Zimmerman 的 $R$ 减除程序,我们现在来说明这个程序。考虑一个 $L$ 圈正规顶角图形 $\Gamma$。令 $I_\Gamma$ 表示相应于图 $\Gamma$ 的动量空间 Feynman 积分的被积函数。$\Gamma$ 的内部包含一些正规顶角子图形 $\gamma$。如相应的表面发散度 $\omega(\gamma) \geqslant 0$,则 $\gamma$ 称为 $\Gamma$ 的一个重整化部分。在考虑相应于 $\Gamma$ 内部的重整化部分的低于 $\hbar^L$ 阶的抵消项以后顶角函数的被积函数修改为 $\bar{R}_\Gamma$。令 $R_\Gamma$ 表示相应于图 $\Gamma$ 的重整化顶角函数的被积函数。如表面发散度 $\omega(\Gamma) < 0$,则

$$R_\Gamma = \bar{R}_\Gamma \tag{5.26}$$

如 $\omega(\Gamma) > 0$ 则

$$R_\Gamma = (1 - T_\Gamma)\bar{R}_\Gamma \tag{5.27}$$

其中，$-T_\Gamma\bar{R}_\Gamma$ 为 $\hbar^L$ 阶抵消项的贡献。在 5.1.2 小节中以 $\varphi^4$ 理论为例说明的归一化规则中，它就是 $-R_\Gamma$ 在归一化点 $\mu$ 处的泰勒展开式的前 $\omega(\Gamma)+1$ 项。

$\bar{R}_\Gamma$ 是一些 Feynman 图形的贡献之和，除了原来的图形 $\Gamma$ 外，还有包含相应于抵消项的顶点的图形。先考虑抵消项顶点只出现一次的情况。这些图形可以由把 $\Gamma$ 的一个重整化部分（$\omega(\gamma)\geqslant 0$ 的正规子顶角图形 $\gamma$）$\gamma$ 缩为一点得到。这个图形可记为 $\Gamma/\gamma$，$\gamma$ 收缩所成的一点代表抵消项顶点。它对 $\bar{R}_\Gamma$ 的贡献为

$$I_{\Gamma/\gamma}(-T_\gamma\bar{R}_\gamma) \tag{5.28}$$

其中，$I_{\Gamma/\gamma}$表示在 $I_\Gamma$ 中把相应于子图形 $\gamma$ 的因子移去后所得的表示式，$-T_\gamma\bar{R}_\gamma$ 是相应于 $\gamma$ 的抵消项顶点的因子。

其次，考虑包含两个抵消项顶点的图形，这类图形可以由把 $\Gamma$ 中两个不相联的重整化部分 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 分别缩成一点得到。$\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 不相联的意义是，它们没有共同的内线或顶点，用符号表示为 $\gamma_1\cap\gamma_2=\varnothing$。这个图形对 $\bar{R}_\Gamma$ 的贡献为

$$I_{\Gamma/\{\gamma_1\gamma_2\}}(-T_{\gamma_1}\bar{R}_{\gamma_1})(-T_{\gamma_2}\bar{R}_{\gamma_2}) \tag{5.29}$$

其中，$I_{\Gamma/\{\gamma_1\gamma_2\}}$是把 $I_\Gamma$ 中相应于图形 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 的因子移去所得到的表示式。如果 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 有共同的内线或顶点，则图形 $\Gamma/\{\gamma_1\gamma_2\}$中将包含两个重叠的抵消项顶点。在逐阶引进抵消项的重整化方案中这样的项是不存在的，所以在式(5.29)中我们只考虑两个不相联的子图形。但是，作为两个相联子图形 $\gamma_1$，$\gamma_2$ 的并集的 $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2$，如果是 $\Gamma$ 的一个重整化部分，它对 $\bar{R}_\Gamma$ 仍有一项贡献式(5.28)。如此类推即可得到 $\bar{R}_\Gamma$ 的如下表示式

$$\bar{R}_\Gamma = I_\Gamma + \sum_{\substack{\{\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_s\}\\ \gamma_i\cap\gamma_j=\varnothing}} I_{\Gamma/\{\gamma_1\cdots\gamma_s\}}\prod_{i=1}^{s}(-T_{\gamma_i}\bar{R}_{\gamma_i}) \tag{5.30}$$

利用这个公式做迭代可以逐阶写出 $\bar{R}_\Gamma$，然后利用式(5.26)和(5.27)写出重整化顶角的被积函数 $R_\Gamma$。由式(5.30)及(5.26)、(5.27)得到的重整化顶角函数在外动量的欧氏区是有限的，它定义了一个由外动量组成的不变量的解析函数，当分母中 $\mathrm{i}\varepsilon\to 0$ 时它在 Minkowski 区域有一些极点和支点。这个结论的严格证明非常复杂，最后是由 Hepp 完成的[4]。这一系列的工作为重整化理论提供了坚实的基础。

在文献[5]中给出了迭代方程(5.30)的解。引进 $\Gamma$ 的重整化部分的“森林”的概念，它是 $\Gamma$ 的一族不交缠的重整化部分，记作$\cup$。所谓不交缠的含义是：如果 $\gamma_i$ 和$\gamma_j$ 都属于$\cup$则 $\gamma_i\cap\gamma_j=\varnothing$或 $\gamma_i\subset\gamma_j$ 或$\gamma_j\subset\gamma_i$，三者必居其一。一个“森林”$\cup$可以包含 $\Gamma$ 本身。$\cup$也可以是空集。式(5.30)、(5.26)和(5.27)的解是

$$R_\Gamma = \sum_{\cup}\prod_{\gamma\subset\cup}(-T_\gamma)I_\gamma \tag{5.31}$$

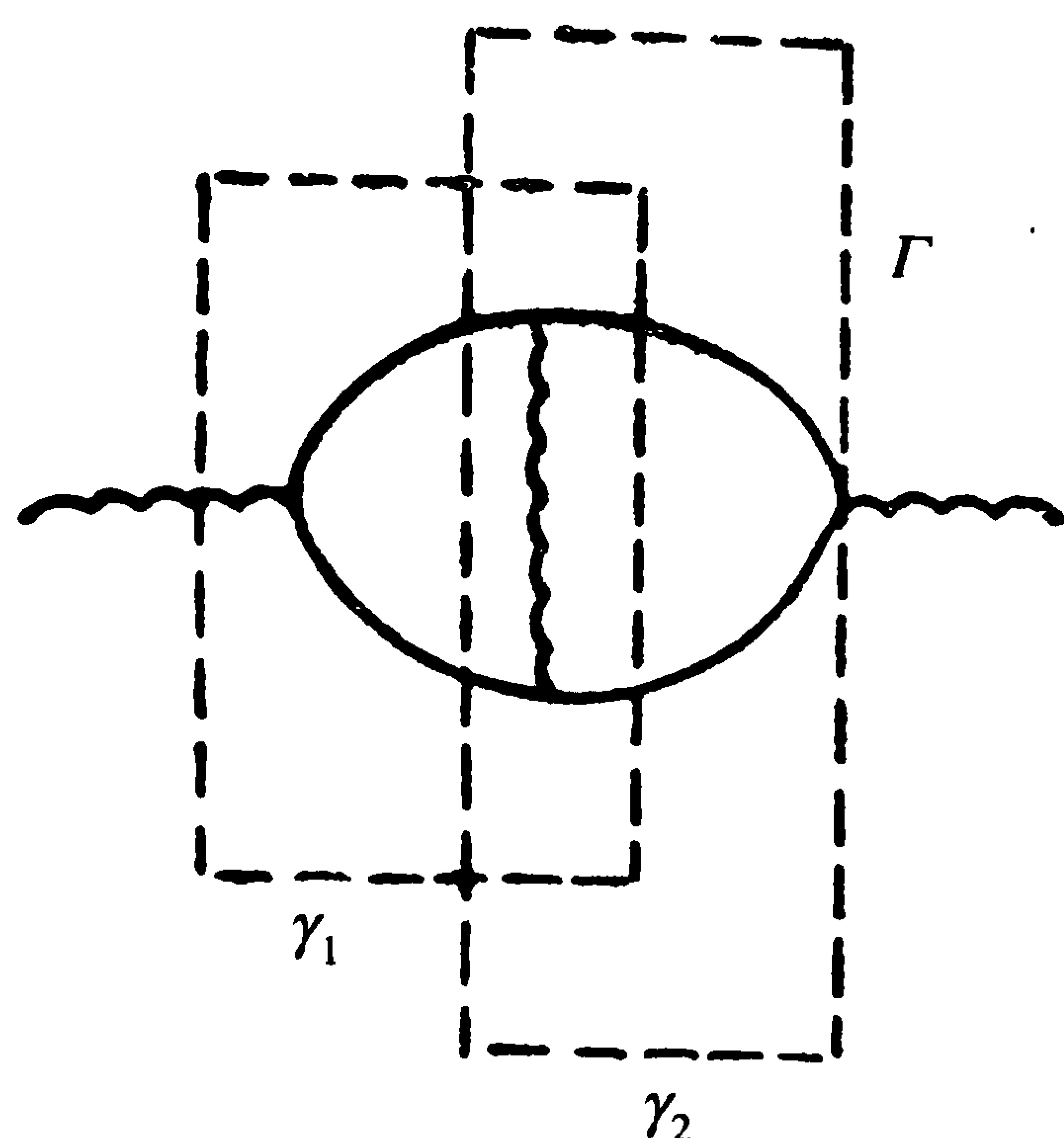



图 5.1

在上式中如果 $\gamma_i \supset \gamma_j$，则 $T_{\gamma_i}$ 在 $T_{\gamma_j}$ 的左边。这个公式的证明用的是归纳法。注意，由公式(5.30)和(5.31)表示的重整化程序是，通过在被积函数中做减除，使得积分收敛，因此可以不要正规化的中间步骤①。但是这两个公式结构比较复杂，它的性质不如正规化的顶角函数的性质容易研究。

以量子电动力学中图 5.1 所示的光子自能图形为例。它有两个交缠的重整化部分 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$，$\omega(\gamma_1)=\omega(\gamma_2)=0$。相应于 $\Gamma$ 的包含内部抵消项顶点的图形有图 5.2 中的两个。由式(5.30)得到

$$\bar{R}_\Gamma = I_\Gamma + I_{\Gamma/\gamma_1}(-T_{\gamma_1}\bar{R}_{\gamma_1}) + I_{\Gamma/\gamma_2}(-T_{\gamma_2}\bar{R}_{\gamma_2}) \tag{5.32}$$

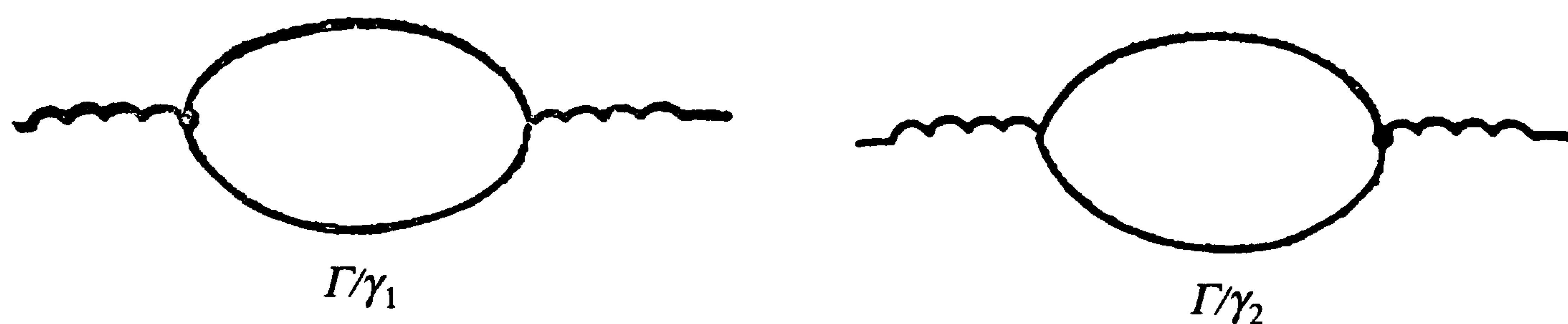



图 5.2

由于 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 不含内部发散，由式(5.26)知道

$$\bar{R}_{\gamma_1} = I_{\gamma_1}, \qquad \bar{R}_{\gamma_2} = I_{\gamma_2} \tag{5.33}$$

令

$$T_\gamma I_\Gamma \equiv I_{\Gamma/\gamma} T_\gamma I_\gamma$$

则由式(5.32)、(5.33)及(5.27)得到

$$\begin{aligned}
\bar{R}_\Gamma &= (1 - T_{\gamma_1} - T_{\gamma_2}) I_\Gamma \\
R_\Gamma &= (1 - T_\Gamma)\bar{R}_\Gamma = (1 - T_\Gamma)(1 - T_{\gamma_1} - T_{\gamma_2}) I_\Gamma \\
&= [1 + (-T_{\gamma_1}) + (-T_{\gamma_2}) + (-T_\Gamma) + (-T_\Gamma) \\
&\quad \times (-T_{\gamma_1}) + (-T_\Gamma)(-T_{\gamma_2})] I_\Gamma
\end{aligned} \tag{5.34}$$

上式正是式(5.31)的形式，记住 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 是交缠的，在式(5.34)中不出现

① Bogoliubov、Parasiuk 和 Hepp 原来的工作用了 Pauli-Villars 正规化，在积分号外作减除。这里叙述的形式是 Zimmerman 的。

$T_{\gamma_1}T_{\gamma_2}$项。

### 5.1.4　含复合算符的顶角

所谓复合算符是指同一时空点的场算符或它们的微商的乘积，例如 Fermi 子流 $\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$就是一个复合算符。在量子场论中有时需要考虑包含复合算符的 Green 函数。设 $\varphi_j(x)$为理论中的基本场。$O_i(x)$为一些复合算符。一般的包含 $\varphi_j(x)$和 $O_i(x)$的 Green 函数可以由如下的生成泛函产生

$$W[J,K]=\int[\mathrm{d}\varphi_j]\exp\left\{\mathrm{i}\int[\mathscr{L}(\varphi_j)+J_j(x)\varphi_j(x)+K_i(x)O_i(x)]d^4x\right\} \tag{5.35}$$

其中，$J_j$ 和$K_i$ 分别为$\varphi_j$ 和$O_i$ 的源。

$$\begin{aligned}&\langle 0\mid T(O_1(x_1)O_2(x_2)\cdots O_n(x_n)\varphi_1(y_1)\cdots\varphi_m(y_m))\mid 0\rangle\\&=(-\mathrm{i})^{n+m}\frac{\delta^{n+m}}{\delta J_1(y_1)\cdots\delta J_m(y_m)\delta K_1(x_1)\cdots\delta K_n(x_n)}W[J,K]|_{J=K=0}\end{aligned} \tag{5.36}$$

由式(5.35)可以看到，考虑包含复合算符的 Green 函数相当于将拉氏函数 $\mathscr{L}(\varphi_j)$换为

$$\mathscr{L}(\varphi_j)+K_i(x)O_i(x) \tag{5.37}$$

复合算符的 Green 函数或相应的顶角函数也包含发散，这些发散的抵消与重整化问题在文献[5]中有系统的讨论。对这种顶角函数的发散也同样可以用数幂律。在这些顶角中有外源 $K_i$ 产生的顶点$K_iO_i$。设 $d_i$ 为复合算符$O_i$ 的量纲。把式(5.6)应用于这里所讨论的情况可以知道，如果所讨论的正规顶角图 $\Gamma'$是由只包含基本场外线的正规顶角图$\Gamma$ 插入$n$ 个复合算符顶点$K_1O_1,K_2O_2,\cdots,K_nO_n$得到的，则 $d_v=4$ 时，它的表面发散度为

$$\omega(\Gamma')=\omega(\Gamma)+\sum_{i=1}^{n}(d_i-4)=4-E_\mathrm{B}-\frac{3}{2}E_\mathrm{F}+\sum_{i=1}^{n}(d_i-4) \tag{5.38}$$

我们可以把一些抵消项附加于式(5.37)上，以抵消图 $\Gamma'$的发散。如果在 $\Gamma'$中有 $E_\mathrm{B}$个 Bose 场外线、$E_\mathrm{F}$ 个 Fermi 场外线和 $n$ 个外场 $K_i$ 的顶点，则抵消项为 $K_1(x)\cdots K_n(x)$与 $E_\mathrm{B}$ 个 Bose 场算符、$E_\mathrm{F}$ 个 Fermi 场算符的乘积。按照数幂律，乘积中所含微商的阶数不高于 $\omega(\Gamma')$。

以 $\varphi^4$ 耦合标量场理论为例。量纲≤4 的复合算符有 $\varphi^2,(\partial_\mu\varphi)^2,\varphi\Box\varphi,\varphi^4$ 及其他一些非 Lorentz 不变的算符。$\varphi$ 的奇次幂可以不考虑。复合算符 $O_1=\varphi^2$ 的量纲为 2。由式(5.38)可以看到插入复合算符 $O_1$ 引起的新的发散顶角图只有图 5.3 和 5.4 中的三个。图中的×号代表外源。这三个图形的表面发散度分别为

$\omega_3=0$，$\omega_{4a}=2$ 和 $\omega_{4b}=0$。因此，它们的抵消项有如下的形式

$$aK_1(x)(\varphi(x))^2+bK_1^2(x)+c_1m^2K_1(x)+c_2\Box K_1(x) \tag{5.39}$$

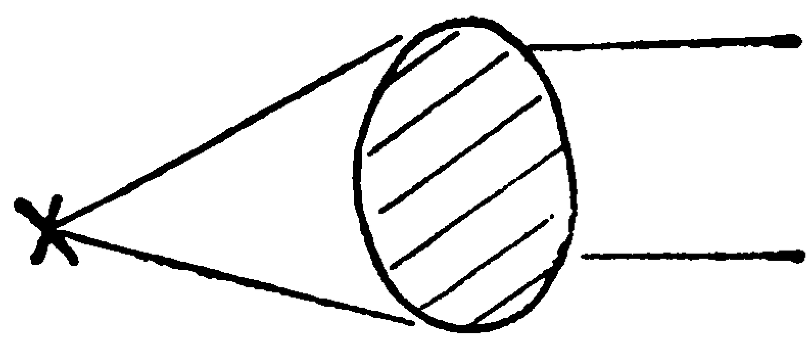
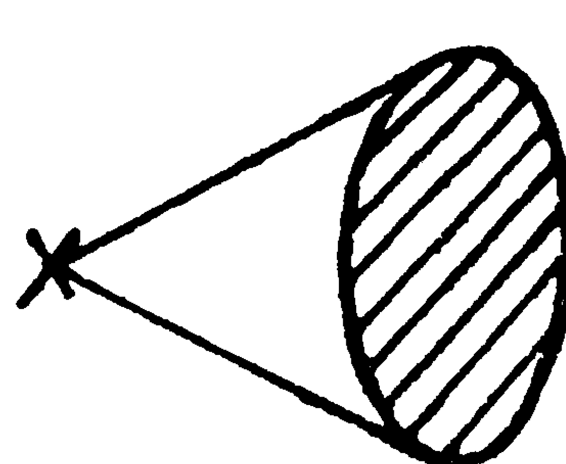
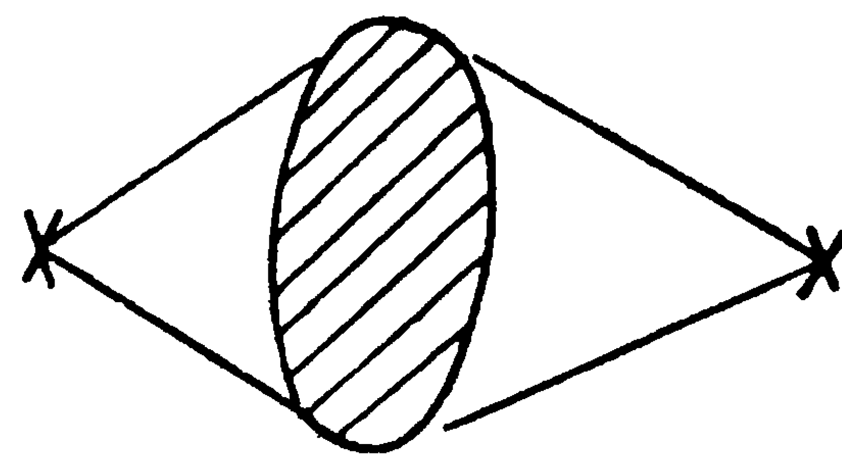


图 5.3



(a)



(b)

图 5.4

上式的后三项只对不包含 $\varphi$ 场外线的顶角有贡献。第一项与式(5.37)中的 $K_1$ 项合并后可写成

$$(1+a)K_1O_1\equiv z_{O_1}zK_1O_1 \tag{5.40}$$

$z_{O_1}$ 称为复合算符 $O_1$ 的重整化常数。令 $\Gamma^n_{O_1}(p;p_1\cdots p_n)$为有一个带抵消项的 $O_1$ 顶点及 $n$ 个 $\varphi$ 场外线的顶角函数，$p$ 为外源$K_1$ 提供的动量。$\Gamma^n_{O_1\mathrm{reg}}(p;p_1\cdots p_n)$为相应的未重整顶角函数，它有一个未重整复合算符 $\varphi_0^2$ 顶点及 $n$ 个 $\varphi_0$ 场外线。由上面的讨论可以得到 $\Gamma^n_{O_1}$ 的重整化关系式

$$\Gamma^n_{O_1}(p;p_1\cdots p_n,\ g,m,\mu)=z_{O_1}z^{\frac{n}{2}}\Gamma^n_{O_1\mathrm{reg}}(p;p_1\cdots p_n,g_0,m_0,\Lambda) \tag{5.41}$$

为完全确定抵消项也须引入 $\Gamma^n_{O_1}$ 的归一化条件，式(5.41)中的 $\mu$ 即为归一化点。

令

$$O_2=(\partial_\mu\varphi)^2,\qquad O_3=(\varphi\Box\varphi),\qquad O_4=\varphi^4$$

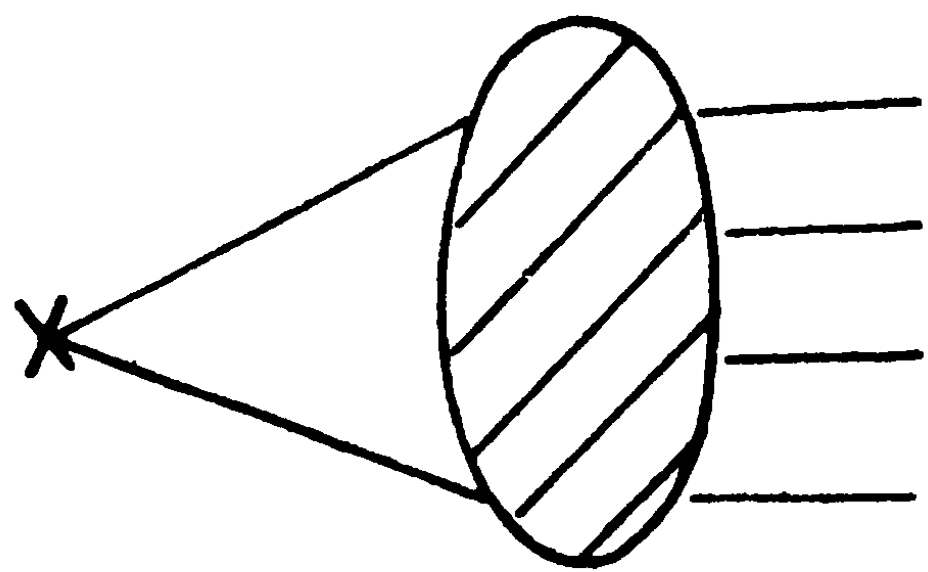


图 5.5

这些算符的量纲都等于 4。我们首先讨论它们的一次插入。除了在真空图中的插入，由插入这些算符中的一个所得到的顶角函数有图 5.3 和 5.5 引起的发散。图 5.5 的表面发散度为 $\omega_5=0$。在现在的情况下 $\omega_3=2$。相应于这个图的抵消项包含 $\varphi$ 场的二次微商。因此，无论插入 $O_2,O_3$ 和 $O_4$ 中的哪一个，抵消项中都将出现 $O_1,O_2,O_3$ 和 $O_4$。在加入这些抵消项以后拉氏函数中将包含如下的外源项

$$\sum_{i,j=1}^{4}K_iz_{ij}O_j^{(\varphi_0)} \tag{5.42}$$

其中，$O_j^{(\varphi_0)}$ 为把 $O_j$ 中的 $\varphi$ 场换为 $\varphi_0 = z^{\frac{1}{2}}\varphi$ 所得到的复合算符。由前面对 $O_1$ 插入的讨论知道

$$z_{11} = z_{O_1}, \qquad z_{1i} = 0, \qquad 当\ i \neq 1$$

由式(5.42)可以得到如下的顶角重整化关系式

$$\Gamma_{O_i}^{m}(p;p_1\cdots p_n,m,g,\mu) = z^{\frac{n}{2}} z_{ij}\Gamma_{O_j\,\mathrm{reg}}^{m}(p;p_1\cdots p_n,m_0,g_0,\Lambda) \quad (5.43)$$

上面讨论的例子可以说明如下的一般结论：量子数相同、有同样的 Lorentz 变换性质的复合算符在重整化时一般将产生混合，重整化常数 $z_{ij}$ 构成一个矩阵。由式(5.38)知道，对一次插入 $\omega(\Gamma') + E_{\mathrm{B}} + \frac{3}{2}E_{\mathrm{F}} = d_i$，因此量纲高的算符的插入将引起量纲低的重整化抵消项，而量纲低的算符的插入不会引起量纲高的抵消项。所以，如果限于复合算符的一次插入，抵消项总可以归结为类似于式(5.42)的相乘重整化。重整化常数矩阵 $z_{ij}$ 是不对称的。

对复合算符的多次插入所产生的顶角，只要插入的次数有限，不难按照式(5.6)决定的发散度写出它的有限几个抵消项。抵消项含有外源的高次幂。如果复合算符的量纲大于 4，则抵消项算符的量纲可以大于原来插入的算符的量纲。因此，一般来说抵消项的引入在这种情况下不能归结为复合算符的相乘重整化。

我们也可以用稍不同一些的语言，不把抵消项看作是加在有效拉氏函数内，而把它看作是包含在复合算符的定义中。在文献[5]中把这样定义的算符叫作正规乘积算符。例如，前面讨论的算符 $O_1$ 和 $O_4$ 可改写为

$$O_1 = N(\varphi^2) = z_{O_1} z\varphi^2, \qquad O_4 = N(\varphi^4) \quad (5.44)$$

其中，符号 $N$ 表示正规乘积。

## 5.2　维数正规化

正规化的程序虽然只是一个中间步骤，我们还是希望它能保持原有理论的内部对称性。特别是在规范理论中，我们希望保持 Ward-Takahashi 恒等式，因为这对于得到重整化的理论的规范不变性及 Ward-Takahashi 恒等式是有用的。Pauli-Villars 正规化方案在用于量子电动力学时是满意的，因为它保持了 W-T 恒等式，特别是 $\Pi_{\mu\nu}^{\mathrm{reg}}$ 的横向性。光子传播子分母修改为$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2+\Lambda^2}$相应于在理论中引入了一个负度规的有质量重光子。这一点并没有妨碍量子电动力学中 W-T 恒等式的建立，因为在量子电动力学中 W-T 恒等式可以只用 Fermi 子电流守恒导出来。但是如果把这个方案推广用于非交换群规范理论，则因为矢量粒子的质量项破坏

规范不变性,因而不能保证正规化的理论满足 W-T 恒等式。

′t Hooft 和 Veltman 提出的维数正规化方案[11,12]的优点是它自动地保持原有理论的内部对称性,包括规范对称性,因而也适合于进行非交换群规范场论的正规化。在这种正规化方案中引入了一个参数 $D$,当 $D$ 为整数时它在一定的意义上可看作是时空维数。我们想象把时空维数由 $1+3$ 扩充为 $1+(D-1)$,物理的动量在前四维内。以单圈图为例,微扰论的计算归结为如下形式的积分

$$I_\alpha^\lambda(D)=\int \mathrm{d}^D k\,(k_1^{\lambda_1}k_2^{\lambda_2}\cdots k_D^{\lambda_D})/[(k^2+2k\cdot P_1+M_1^2)^{\alpha_1}(k^2+2k\cdot P_2+M_2^2)^{\alpha_2}\cdots] \tag{5.45}$$

令

$$\lambda=\sum_{i=1}^{D}\lambda_i,\qquad \alpha=\sum\alpha_i$$

此积分在时空维数满足

$$D<2\alpha-\lambda \tag{5.46}$$

时收敛。为了把 $I_\alpha^\lambda(D)$的定义域延拓,可以在式(5.45)中插入一个因子

$$\frac{1}{D}\sum_{i=1}^{D}\frac{\mathrm{d}k_i}{\mathrm{d}k_i}=1 \tag{5.47}$$

分部积分后得到

$$I_\alpha^\lambda=-\frac{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_D}{D}I_\alpha^\lambda+\frac{2(\alpha_1+\alpha_2+\cdots)}{D}I_\alpha^\lambda-\frac{1}{D}I'$$

其中

$$\begin{aligned}I'=&\int \mathrm{d}^D k\,k k_1^{\lambda_1}k_2^{\lambda_2}\cdots k_D^{\lambda_D}\\&\times\Big[\frac{2\alpha_1(M_1^2+P_1\cdot k)}{(k^2+2k\cdot P_1+M_1^2)^{\alpha_1+1}(k^2+2k\cdot P_2+M_2^2)^{\alpha_2}\cdots}\\&+\frac{2\alpha_2(M_2^2+P_2\cdot k)}{(k^2+2k\cdot P_1+M_1^2)^{\alpha_1}(k^2+2k\cdot P_2+M_2^2)^{\alpha_2+1}\cdots+\cdots}\Big]\end{aligned} \tag{5.48}$$

由此得到

$$I_\alpha^\lambda(D)=-\frac{1}{D+\lambda-2\alpha}I' \tag{5.49}$$

$I'$是一些积分的线性组合,这些积分都属于 $I_{\alpha+1}^{\lambda}$或 $I_{\alpha+1}^{\lambda+1}$的形式。因此 $I'$的收敛范围是

$$D<2\alpha-\lambda+1$$

如此逐步进行分部积分可以把 $I_\alpha^\lambda$ 表为属于$I_{\alpha+N}^{\lambda+N}, I_{\alpha+N}^{\lambda+N-1}, I_{\alpha+N}^{\lambda+N-2},\cdots$形式的积分的

线性组合,它们的系数的分母在 $D=2\alpha-\lambda, 2\alpha-\lambda+1, \cdots$ 处有零点。我们可以选取足够大的 $N$ 使这些积分对任意给定的维数 $D$ 是收敛的。这个分析表明,如果我们把这些有限的积分积出,并把得到的解析表达式看作 $D$ 的函数,延拓到整个 $D$ 的复平面,我们就得到了原来的积分式(5.45)的解析延拓,它在整数点 $D=2\alpha-\lambda, 2\alpha-\lambda+1, 2\alpha-\lambda+2, \cdots$ 处有极点。这些极点正好是使积分式(5.45)发散的维数。离开这些极点,这样延拓的 $I_\alpha^\lambda(D)$是有限的。容易看到,对在四维时空中收敛的积分,$I_\alpha^\lambda(D=4)$与原来的积分值相等。因此这样定义的 $I_\alpha^\lambda(D)$可以看作维数正规化的 Feynman 积分。

以上的讨论不难推广到多圈图。考虑其内部一个 $L$ 回路子图形。设适当选择独立的回路动量 $k_i$ 可以使 Feynman 积分的分母为

$$\prod_{i=1}^{L}(k_i^2+2k_iP_i+M_i^2)^{\alpha_i}\prod_{i\neq j=1}^{L}(k_i^2\pm 2k_ik_j+k_j^2+2(k_i\pm k_j)\cdot P_{ij}+M_{ij}^2)^{\alpha_{ij}} \tag{5.50}$$

令 $\alpha=\sum\alpha_i+\sum\alpha_{ij}$,则积分 $I_\alpha^\lambda(D)$在 $LD<2\alpha-\lambda$ 处收敛(除了内部的发散)。在积分中插入因子

$$\frac{1}{LD}\sum_{i=1}^{L}\sum_{\mu_i=1}^{D}\frac{\mathrm{d}k_{i\mu_i}}{\mathrm{d}k_{i\mu_i}}=1$$

对 $L$ 个回路动量$k_i$ 进行分部积分,可以得到

$$I_\alpha^\lambda(D)=-\frac{1}{LD-2\alpha+\lambda}I' \tag{5.51}$$

其中,积分 $I'$在$LD<2\alpha-\lambda+1$ 处收敛。如此多次进行分部积分,可以把 $I_\alpha^\lambda(D)$表为一些积分之和,它们对任意给定的 $D$ 收敛。把这些收敛的积分的表达式延拓到 $D$ 的复平面,就得到 $I_\alpha^\lambda(D)$的解析延拓式,它在 $D=\frac{1}{L}(2\alpha-\lambda), \frac{1}{L}(2\alpha-\lambda+1), \cdots$处有极点,这些 $D$ 值包含分数。这些极点也正好相应于积分按数幂律发散。多圈图由于子图形的发散一般可有多重极点。

以上讨论主要是为了说明维数正规化的概念,特别是维数正规化的 Feynman 积分在 $D$ 的实轴上的一些极点与原来 Feynman 积分的发散之间的关系。它还对下面 5.3 节中讨论的交缠发散问题有用。在实际做 $I_\alpha^\lambda(D)$的解析延拓时,不需要用上面叙述的分部积分程序。我们只需要直接从收敛的积分 $I_\alpha^\lambda(D)$($\alpha$ 足够大)出发给出它的解析延拓规则就可以了。因为 $I_\alpha^\lambda(D)$也是 $\alpha$ 的解析函数。延拓的规则基于以下一些公式:在 $n$ 维空间中用球坐标表示的体积元为

$$\mathrm{d}^nk=\omega^{n-1}\mathrm{d}\omega\sin^{n-2}\theta_{n-1}\mathrm{d}\theta_{n-1}\sin^{n-3}\theta_{n-2}\mathrm{d}\theta_{n-2}\cdots\mathrm{d}\theta_1 \tag{5.51$'$}$$

$$0\leqslant\theta_i\leqslant\pi,\qquad i>1;\qquad 0\leqslant\theta_1\leqslant2\pi,\qquad \omega\equiv|k|$$

对 $\theta_i$ 的积分在被积函数与 $\theta_i$ 无关时,可用积分公式

$$\int_0^\pi \sin^m\theta\mathrm{d}\theta=\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}(m+1)\right)\Big/\Gamma\left(\frac{1}{2}(m+2)\right)\tag{5.52}$$

设在 $D$ 维空间积分中被积函数为 $f(k^2,k\cdot P_i)$ 的形式,$P_i$ 张成 $d$ 维子空间。例如,在 $L$ 圈图中,如 $k$ 为一个回路动量,则 $P_i$ 为外线动量及其他回路动量,此时 $d=4+(L-1)$。由式(5.51′)及(5.52)得到

$$\int\mathrm{d}^Dkf(k^2,\ k\cdot P_i)=2\pi^{\frac{1}{2}(D-d)}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(D-d)\right)}\int\omega^{D-d-1}\mathrm{d}\omega\int\mathrm{d}^d\underline{k}f(\omega,\underline{k})\tag{5.53}$$

其中,$\underline{k}$ 为 $k$ 在 $d$ 维子空间中的分量。$\omega$ 为 $k$ 在 $D-d$ 维子空间中的分量的绝对值。上式右方可以延拓到 $D$ 的复平面,它确定了左方积分的一个解析延拓。我们以它为维数正规化的 Feynman 积分。一般来说,由 $D$ 的函数在一些整数点上的值并不能唯一确定它的解析延拓。由式(5.51′)、(5.52)和(5.53)给出的延拓规则是维数正规化方案中选定的规则。注意,由于我们以 $D$ 维空间中收敛的积分作为出发点,在积分号内做变量 $k$ 的平移是允许的。它显然不会与式(5.53)矛盾。

由积分变量的平移得到

$$\int\mathrm{d}^Dk\frac{1}{(k^2+2k\cdot P+M^2)^\alpha}=\int\mathrm{d}^Dk\frac{1}{(k^2+M^2-P^2)^\alpha}\tag{5.54}$$

由式(5.53)、(5.54)及积分公式

$$\int_0^\infty\mathrm{d}x\frac{x^\beta}{(x^2+M^2)^\alpha}=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\beta+1)\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}(\beta+1)\right)}{\Gamma(\alpha)(M^2)^{\alpha-\frac{1}{2}(\beta+1)}}\tag{5.55}$$

得到

$$\int\mathrm{d}^Dk\frac{1}{(k^2+2k\cdot P+M^2)^\alpha}=\frac{\mathrm{i}\pi^{\frac{1}{2}D}}{(M^2-P^2)^{\alpha-\frac{1}{2}D}}\cdot\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}D\right)}{\Gamma(\alpha)}\tag{5.56}$$

在收敛的积分号下求对 $P$ 的微商显然也是允许的,它不与式(5.53)矛盾。因此由式(5.56)可以得到

$$\int\mathrm{d}^Dk\frac{k_\mu}{(k^2+2k\cdot P+M^2)^\alpha}$$

$$=\frac{\mathrm{i}\pi^{\frac{1}{2}D}}{(M^2-P^2)^{\alpha-\frac{1}{2}D}}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}D\right)(-P_\mu)\tag{5.57}$$

$$\int d^D k \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2+2k\cdot P+M^2)^\alpha}$$
$$=\frac{i\pi^{\frac{1}{2}D}}{(M^2-P^2)^{\alpha-\frac{1}{2}D}}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\{\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}D\right)P_\mu P_\nu\right.$$
$$\left.+\Gamma\left(\alpha-1-\frac{1}{2}D\right)\frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}(M^2-P^2)\right\} \tag{5.58}$$

$$\int d^D k \frac{k^2}{(k^2+2k\cdot P+M^2)^\alpha}$$
$$=\frac{i\pi^{\frac{1}{2}D}}{(M^2-P^2)^{\alpha-\frac{1}{2}D}}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\{\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}D\right)P^2\right.$$
$$\left.+\Gamma\left(\alpha-1-\frac{1}{2}D\right)\frac{D}{2}(M^2-P^2)\right\} \tag{5.59}$$

$$\int d^D k \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda}{(k^2+2k\cdot P+M^2)^\alpha}$$
$$=\frac{i\pi^{\frac{1}{2}D}}{(M^2-P^2)^{\alpha-\frac{1}{2}D}}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\{-\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}D\right)\right.$$
$$\left.\times P_\mu P_\nu P_\lambda-\Gamma\left(\alpha-1-\frac{1}{2}D\right)\frac{1}{2}(\delta_{\mu\nu}P_\lambda+\delta_{\mu\lambda}P_\nu+\delta_{\nu\lambda}P_\mu)(M^2-P^2)\right\}$$
$$\tag{5.60}$$

$$\int d^D k \frac{k^2 k_\mu}{(k^2+2k\cdot P+M^2)^\alpha}$$
$$=\frac{i\pi^{\frac{1}{2}D}}{(M^2-P^2)^{\alpha-\frac{1}{2}D}}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(-P_\mu)\cdot\left\{\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}D\right)P^2\right.$$
$$\left.+\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}D-1\right)\frac{1}{2}(D+2)(M^2-P^2)\right\} \tag{5.61}$$

注意,在以上公式中,$\delta_{\mu\nu}$原是$D$维空间中的张量,满足

$$\sum_\mu \delta_{\mu\mu}=D,\ \delta_{\mu\nu}P_\nu=P_\mu \tag{5.62}$$

在 Feynman 积分中,矢量指标 $\mu$ 要与其他矢量指标收缩。在维数正规化方案中,规定在矢量指标收缩后,式(5.62)对非整数 $D$ 仍成立。只有在这样的规则下式(5.58)和(5.59),(5.60)和(5.61)才是自洽的。

在单圈图的计算中,如果用 Feynman 参数把所有传播子的分母合并,一般的正规化 Feynman 积分都可以由式(5.56)~(5.61)计算。在多圈图的计算中如果用式(5.56)~(5.61)算出对其中一个回路动量 $k_1$ 的积分,则得到的表示式作为另

一个回路动量 $k_2$ 的函数仍具有

$$\frac{1}{(k_2^2+2k_2\cdot P+M^2)^\alpha}\times k_2\text{ 的多项式}$$

的形式。利用对非整数 $\alpha$ 也适用的 Feynman 参数公式

$$\frac{1}{a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\cdots a_m^{\alpha_m}}=\frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\cdots\Gamma(\alpha_m)}\int_0^1\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{m-2}}$$

$$\times\mathrm{d}x_{m-1}[x_{m-1}^{\alpha_1-1}(x_{m-2}-x_{m-1})^{\alpha_2-1}\cdots(1-x_1)^{\alpha_m-1}]/\{[a_1x_{m-1}$$

$$+a_2(x_{m-2}-x_{m-1})+\cdots+a_m(1-x_1)]^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m}\}\tag{5.63}$$

把包含 $k_2$ 的分母上的因子合并,可以再次利用式(5.56)~(5.61)算出对 $k_2$ 的积分。因此式(5.56)~(5.63)可以作为维数正规化 Feynman 积分计算的基本公式。

在维数正规化方案中含混之处是如下形式的积分

$$\int\mathrm{d}^Dk\,\frac{k_{\mu_1}^{\lambda_1}k_{\mu_2}^{\lambda_2}\cdots k_{\mu_D}^{\lambda_D}}{(k^2-\mathrm{i}\varepsilon)^\alpha}\tag{5.64}$$

在理论中包含零质量粒子时,微扰论中可能出现这种形式的积分。式(5.64)中的积分对任何维数 $D$ 不是紫外发散就是红外发散的,因此不能定义。在维数正规化方案中规定积分式(5.64)为零。对表面发散度 $-2\alpha+\lambda+4>0$ 的积分(如 $\phi^4$ 理论零质量标量粒子单圈自能图及零动量外线规范场自能图),这个规定相当于先保持 $\varepsilon\neq0$,这时可以不管红外发散,因而可以得到 $P=0$、$M^2=\mathrm{i}\varepsilon$ 时的(5.56)~(5.58)及(5.60)等式。取 $D$ 值接近于 4 然后令 $\varepsilon\to0$ 就得到所要的结果。(详细的讨论也可参看文献[13])

维数正规化也适用于包含 Fermi 子的理论。在这种情况下 Feynman 积分中包含 $\gamma$ 矩阵。对这些 $\gamma$ 矩阵,维数正规化的基本运算规则如下

$$\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\}=2\delta_{\mu\nu}I\tag{5.65}$$

$$\mathrm{Tr}(\text{奇数个 }\gamma)=0\tag{5.66}$$

其中,$I$ 是 4×4 单位矩阵,$\delta_{\mu\nu}$ 满足式(5.62)。由此可以得到

$$\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu)=4\delta_{\mu\nu}$$

$$\gamma_\mu\gamma_\mu=DI$$

$$\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu=-(D-2)\gamma_\nu\tag{5.67}$$

等公式。

通常在 Feynman 积分中验证 Ward-Takahashi 恒等式需要的是包含矢量指标收缩和 $\gamma$ 矩阵乘积的代数运算及积分变量的平移[8]。按规则式(5.62)、(5.65)和(5.66)进行的 $D$ 维空间的运算保持了与四维空间运算相同的关系式,而积分变量的平移在维数正规化方案中也是允许的。因此,不难理解按以上运算规则定义的

维数正规化可以保持 Ward 恒等式不变。下面我们将以量子电动力学中单圈光子自能图为例验证这一点。维数正规化方案中唯一成问题的是包含 $\gamma_5$ 的 Ward 恒等式。基本的困难是无法在任意维时空中定义 $\gamma_5$，因为 $\gamma_5$ 矩阵是与四阶全反对称张量 $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ 相联系的，这个张量只在四维时空中有正 Lorentz 变换下的不变性。因此无法把包含奇数个 $\gamma_5$ 矩阵的封闭 Fermi 子回路的因子在非整数 $D$ 情况下定义而不破坏某些 Ward 恒等式。这一点与第十章中讨论的轴矢流反常有关。

量子电动力学中的光子自能部分在维数正规化方案中的表示式为

$$\Pi_{\mu\nu}^{\text{reg}}(q,D) = -e^2(\mu)^{(4-D)}\int \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D} \times \frac{\mathrm{Tr}\{\gamma_\mu[-\mathrm{i}\gamma\cdot(k+q)+m]\gamma_\nu(-\mathrm{i}\gamma\cdot k+m)\}}{(k^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon)[(k+q)^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon]} \tag{5.68}$$

其中，$\mu$ 为任意量纲为 1 的量。引入 $\mu^{(4-D)}$ 因子使 $\Pi_{\mu\nu}$ 在正规化后仍保持原来的量纲。显然，在用了积分变量的平移后由形式计算可得

$$q_\mu \Pi_{\mu\nu}^{\text{reg}}(q,D) = \mathrm{i}e^2(\mu)^{(4-D)}\int \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D}\mathrm{Tr}\left\{\frac{1}{\mathrm{i}\gamma\cdot k+m}\gamma_\nu - \frac{1}{\mathrm{i}\gamma\cdot(k+q)+m}\gamma_\nu\right\} = 0$$

我们来验证，在维数正规化方案中，这个形式运算的结果是对的。利用式(5.65)及(5.67)得到

$$\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta) = 4\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - 4\delta_{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta} + 4\delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha} \tag{5.69}$$

将式(5.69)代入式(5.68)得到

$$\Pi_{\mu\nu}^{\text{reg}}(q,D) = -4e^2(\mu)^{(4-D)}\int \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D} \times \frac{m^2\delta_{\mu\nu} - (k+q)_\mu k_\nu - k_\mu(k+q)_\nu + \delta_{\mu\nu}(k^2+k\cdot q)}{(k^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon)[(k+q)^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon]} \tag{5.70}$$

利用 Feynman 参数及积分公式(5.56)～(5.58)得到

$$\Pi_{\mu\nu}^{\text{reg}}(q,D) = -\frac{4\mathrm{i}e^2(\mu)^{(4-D)}}{\Gamma(2)(4\pi)^{D/2}}\Gamma\left(\frac{4-D}{2}\right) \times \int \mathrm{d}x \frac{2x(1-x)}{[m^2+q^2x(1-x)]^{2-\frac{D}{2}}} \times (q_\mu q_\nu - q^2\delta_{\mu\nu}) \tag{5.71}$$

在式(5.70)中 $k_\mu k_\nu$ 和 $k^2\delta_{\mu\nu}$ 项的贡献按式(5.58)和(5.59)原来有包含因子 $\Gamma\left(1-\frac{D}{2}\right)$ 的项，它们各自在 $D=2$ 处有极点，相应于动量空间中的二次发散。但这些项相加后有系数 $\left(1-\frac{D}{2}\right)$，它们在 $D=2$ 处的极点由于

$$\left(1-\frac{D}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{D}{2}\right)=\Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right)$$

而被消除了。式(5.71)只在 $D=4$ 处有极点,相应于动量空间中的对数发散。式(5.71)满足

$$q_\mu \Pi^{\text{reg}}_{\mu\nu}(q,D)=0 \tag{5.72}$$

## 5.3 最小减除方案

如在 5.1 节中说明的,为了完全确定抵消项必须给出重整化顶角的归一化条件或确定的减除规则。在维数正规化方案中除了也可以用 5.1 节中所介绍的规则外还可以用所谓最小减除规则。这个规则就是逐阶引入拉氏函数中的抵消项以恰好抵消 $\omega(\Gamma)\geqslant 0$ 的维数正规化顶角中的极点项。在维数正规化方案中这是最简单的规则。我们来具体说明这个规则。

在维数正规化中把时空维数由 4 变为 $D$。令 $\varepsilon=4-D$。拉氏函数密度可写为

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}^{[0]}_\varepsilon+\delta\mathscr{L}(\varepsilon) \tag{5.73}$$

$\delta\mathscr{L}(\varepsilon)$为重整化抵消项。例如,在 $\phi^4$ 耦合的标量场理论中

$$\mathscr{L}^{[0]}_\varepsilon=-\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial_\mu\phi)-\frac{1}{2}m^2\phi^2-\frac{\mu^\varepsilon g}{4!}\phi^4 \tag{5.74}$$

其中,$\mu$ 是一个任意的有质量量纲的常数。由于在 $D$ 维时空中 $\phi$ 场满足等时对易关系

$$[\phi(\boldsymbol{x},0),\ \dot{\phi}(\boldsymbol{y},0)]=\mathrm{i}\delta^{D-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$

因而 $\phi$ 场的量纲是$d(\phi)=\dfrac{D-2}{2}$。$\mathscr{L}$的量纲是 $D$,因此在引入 $\mu^\varepsilon$ 因子后式(5.74)中的耦合常数 $g$ 在$D$ 维时空情况下仍是无量纲的。按照数幂律及理论在 $\phi\to-\phi$ 下的不变性,$\phi^4$ 理论的发散可以用如下形式的抵消项消去

$$\delta\mathscr{L}(\varepsilon)=-\frac{1}{2}(z_\phi-1)(\partial_\mu\phi)(\partial_\mu\phi)-\frac{1}{2}(z_m^2 z_\phi-1)$$
$$\times m^2\phi^2-\frac{\mu^\varepsilon g}{4!}(z_g z_\phi^2-1)\phi^4 \tag{5.75}$$

令未重整的量为

$$\phi_0=\sqrt{z_\phi}\phi,\qquad m_0^2=z_m^2 m^2,\qquad g_0=\mu^\varepsilon z_g g, \tag{5.76}$$

$z_\phi$,$z_m$ 和 $z_g$ 为重整化常数,则拉氏函数密度式(5.73)可写为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_0)(\partial_\mu \phi_0) - \frac{1}{2}m_0^2 \phi_0^2 - \frac{g_0}{4!}\phi_0^4 \tag{5.77}$$

式(5.76)与通常的重整化手续有一个不同之点,在这里质量的重整化是按相乘性定义而不是按相减性定义的。

紫外发散表现为,用 $\mathscr{L}_\varepsilon^{[0]}$ 算出的单粒子不可约 $n$ 点顶角函数 $\Gamma^{[0]n}$ 在 $\varepsilon\to 0$ 时有极点。因为对应于一个圈动量积分发散有一个一阶极点,$l$ 圈图最多有 $l$ 阶极点。理论的可重整性意味着可以选择 $z_\phi$, $z_m$ 和 $z_g$ 使得 $\delta\mathscr{L}(\varepsilon)$ 对单粒子不可约顶角的贡献抵消 $\Gamma^{[0]n}$ 在 $\varepsilon\to 0$ 时的发散。

所谓最小减除手续是如下的一个逐阶决定抵消项的方案。第一步是抵消单圈图的发散。把单圈 $n$ 点正规顶角 $\Gamma_1^{[0]n}$ 写为

$$\Gamma_1^{[0]n} = \frac{a}{\varepsilon} + \Gamma_{1F}^{[0]n}(\varepsilon) \tag{5.78}$$

其中,$\Gamma_{1F}^{[0]n}(\varepsilon)$在 $\varepsilon\to 0$ 时有限。在最小减除方案中要求引入包含 $n$ 个场算符的乘积的抵消项使它所产生的 $n$ 点顶角恰好抵消式(5.78)中的极点项 $\frac{a}{\varepsilon}$。这个抵消项与单圈图 $\Gamma_1^{[0]n}$ 一样是 $\hbar^1$ 的量级(在 $\phi^4$ 理论中也就是 $n$ 点顶角的 $g^1$ 阶修正)。因此到 $\hbar^1$ 阶重整化的 $n$ 点正规顶角 $\Gamma^n$ 为

$$\Gamma^n = \Gamma_0^{[0]n} + \Gamma_{1F}^{[0]n}(\varepsilon = 0) + O(\hbar^2) \tag{5.79}$$

上式中 $\Gamma_0^{[0]n}$ 是 $\mathscr{L}^{[0]}$ 中的 $\phi^n$ 顶角。然后考虑两圈图。令包含 $\hbar^1$ 阶抵消项 $\delta\mathscr{L}_1$ 在内的拉氏函数为 $\mathscr{L}^{[1]} = \mathscr{L}_\varepsilon^{[0]} + \delta\mathscr{L}_1(\varepsilon)$,由 $\mathscr{L}^{[1]}$ 计算出的 $n$ 点正规顶角的 $\hbar^2$ 阶部分(即两圈图和包含 $\delta\mathscr{L}_1$ 顶点的单圈图)为 $\Gamma_2^{[1]n}$。$\Gamma_2^{[1]n}$ 中的子图形的发散已经被消去了,它只含整体发散。我们写出它的展开式

$$\Gamma_2^{[1]n} = \frac{b_2}{\varepsilon^2} + \frac{b_1}{\varepsilon} + \Gamma_{2F}^{[1]n}(\varepsilon) \tag{5.80}$$

其中,$\Gamma_{2F}^{[1]n}(\varepsilon)$在 $\varepsilon\to 0$ 时有限。在最小减除方案中,要求引入抵消项恰好抵消式(5.80)中的极点项,因此到 $\hbar^2$ 阶重整化的 $n$ 点正规顶角为

$$\Gamma^n = \Gamma_0^{[0]n} + (\Gamma_{1F}^{[0]n} + \Gamma_{2F}^{[1]n})(\varepsilon = 0) + O(\hbar^3) \tag{5.81}$$

这样的减除步骤可以逐步地进行到愈来愈高的阶。令 $\Gamma_{l+1}^{[l]n}$ 为包含 $\hbar^l$ 阶抵消项的 $\hbar^{l+1}$ 阶 $n$ 点正规顶角,我们有

$$\Gamma^n = \Gamma_0^{[0]n} + \sum_{l=0}^{\infty} \Gamma_{l+1,F}^{[l]n}(\varepsilon = 0) \tag{5.82}$$

在最小减除方案中抵消项是极点项,$\hbar^{l+1}$ 阶抵消项对 $\hbar^{l+1}$ 阶顶角的有限部分没有贡献,即

$$\Gamma_{l+1,F}^{[l]n} = \Gamma_{l+1,F}^{[l+1]n} = \Gamma_{l+1,F}^{[L]n}, \qquad L \geqslant l+1$$

因此由式(5.82)可得

$$\Gamma^{n} = \sum_{l=0}^{L} \Gamma_{lF}^{[L-1]n}(\varepsilon = 0) + O(\hbar^{L+1}) \tag{5.83}$$

也就是说考虑了直到 $\hbar^{L-1}$ 阶抵消项的顶角表示式的劳仑特级数中的有限部分就是重整化顶角的 $\hbar^{L}$ 阶近似。这里需要注意的是

$$\Gamma^{n} \neq \sum_{l=0}^{L} \Gamma_{lF}^{[0]n}(\varepsilon = 0) + O(\hbar^{L+1}) \tag{5.84}$$

因此,最小减除手续并不等于简单地取顶角中的有限部分。这是由于在一个图形内部的抵消项顶点不但对极点项有贡献,而且也对有限项有贡献。

我们以 $\phi^4$ 理论为例说明最小减除方案中重整化常数的计算。在单圈近似下,$\phi^4$ 理论的自能部分 $\Sigma(p^2)$ 由 图 5.6(a)表示,它的表示式为

$$-\mathrm{i}\Sigma_1^{[0]}(p) = -\frac{1}{2} g\mu^{\varepsilon} \int \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D (k^2 + m^2)} \tag{5.85}$$

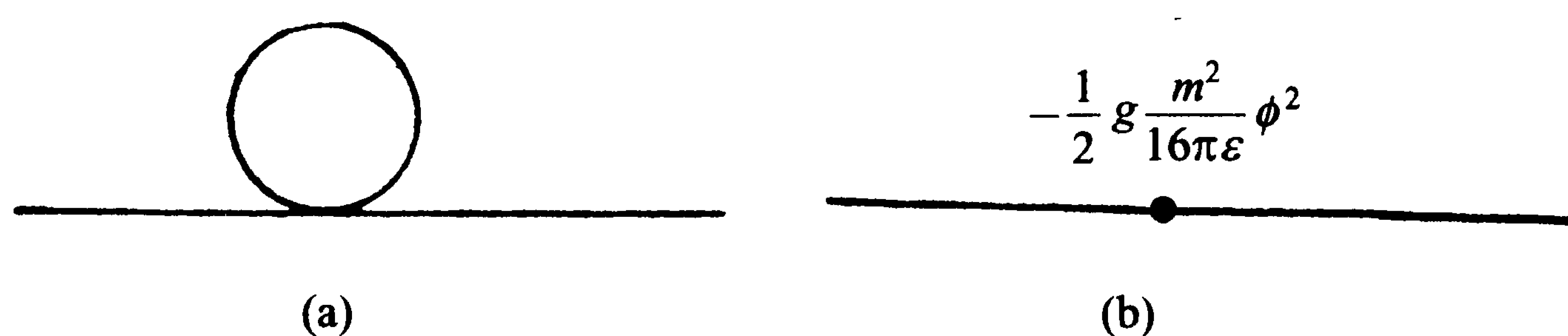



图 5.6

上式中的因子 1/2 是图形的对称因子。利用维数正规化的计算公式(5.56)

$$\int \mathrm{d}^D k \frac{1}{(k^2 + 2k \cdot p + m^2)^{\alpha}} = \frac{\mathrm{i}\pi^{\frac{1}{2}D}}{(m^2 - p^2)^{\alpha - \frac{1}{2}D}} \cdot \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}D\right)}{\Gamma(\alpha)}$$

及 $\varepsilon \to 0$ 时的公式

$$\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + O(\varepsilon) \tag{5.86}$$

其中,$\gamma$ 为 Euler 常数,由式(5.85)并利用 $a^{\varepsilon} = \exp\{\varepsilon \ln a\}$ 的泰勒展开得到

$$\begin{aligned} \Sigma_1^{[0]}(p) &= g \frac{1}{32\pi^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^{\varepsilon/2} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{1}{\frac{\varepsilon}{2} - 1} m^2 \\ &= -\frac{gm^2}{16\pi^2}\left(\frac{1}{\varepsilon} + c\right) \end{aligned} \tag{5.87}$$

其中

$$c = \frac{1}{2}\left(\ln \frac{4\pi\mu^2}{m^2} + 1 - \gamma\right) \tag{5.88}$$

按照最小减除规则应在 $\delta\mathscr{L}(\varepsilon)$ 中引入一个质量抵消项

$$-\frac{1}{2}g\frac{m^2}{16\pi^2\varepsilon}\phi^2 \tag{5.89}$$

由它产生的图 5.6(b)正好抵消式(5.87)中的极点项。与式(5.75)比较得到

$$z_\phi = 1 + O(g^2), \qquad z_m^2 = 1 + \frac{g}{16\pi^2\varepsilon} + O(g^2) \tag{5.90}$$

在单圈近似下 $\phi^4$ 理论的四点顶角由图 5.7 表示。

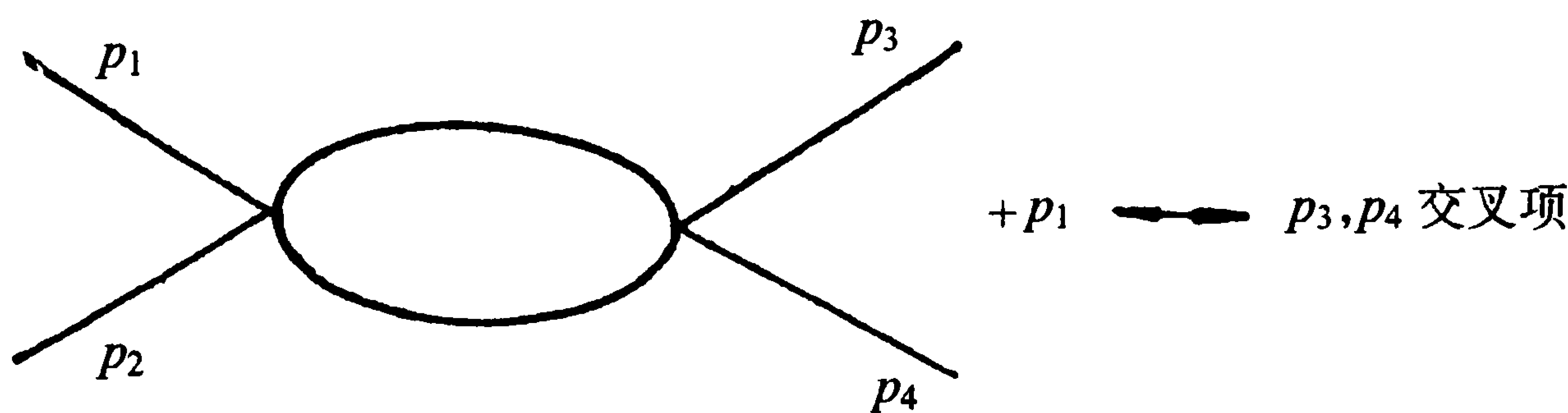



图 5.7

利用式(5.56)于图 5.7 中的四点顶角可得

$$\mathrm{i}\Gamma_1^{[0]4} = -\mathrm{i}g\mu^\varepsilon - \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^D}\frac{1}{(k^2+m^2)[(k-p)^2+m^2]}$$

$$\times(-\mathrm{i}g\mu^\varepsilon)^2 + \text{交叉项} = -\mathrm{i}g\mu^\varepsilon\left\{1-(-\mathrm{i}g\mu^\varepsilon)\frac{\pi^{\frac{D}{2}}\Gamma\left(2-\frac{1}{2}D\right)}{(2\pi)^D 2\Gamma(2)}\right.$$

$$\left.\times\int_0^1\mathrm{d}y[p^2y(1-y)+m^2]^{(D-4)/2}\right\} + \text{交叉项}$$

$$= -\mathrm{i}g\mu^\varepsilon\left\{1-\frac{3g}{16\pi^2\varepsilon}+g\left[3\ln 2\sqrt{\pi}+\int_0^1\mathrm{d}y\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\ln\frac{m^2+y(1-y)p^2}{\mu^2}\right]+O(\varepsilon)\right\} + \text{交叉项} \tag{5.91}$$

其中，$P = p_1 + p_2$。按照最小减除规则应在 $\delta\mathscr{L}(\varepsilon)$ 中引入一项

$$-\frac{3g^2\mu^\varepsilon}{16\pi^2\varepsilon}\frac{\phi^4}{4!} \tag{5.92}$$

来抵消式(5.91)中的极点项。因此到 $g^1$ 阶

$$z_g = \left(1+\frac{3g}{16\pi^2\varepsilon}\right) + O(g^2) \tag{5.93}$$

在两圈图的两点顶角中，图 5.8 中所示的图形是单粒子可约的，它们的极点项互相抵消了。$\Gamma_2^{[1]2}$ 包含图 5.9 中所示的四个图形，其中图 5.9(c)中的顶点是由抵消项式(5.92)产生的。

图 5.9(a)和 5.9(b)两个图形对自能的贡献之和为

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\mathrm{i}}{32\pi^2}g^2\mu^{\varepsilon}c(1+O(\varepsilon))m^2\int\frac{\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^D(k^2+m^2)^2}\\
&=\frac{1}{32\pi^2}g^2(c+O(\varepsilon))m^2\,\frac{1}{16\pi^2}\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^{\varepsilon/2}\cdot\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\\
&=\frac{g^2cm^2}{(16\pi^2)^2\varepsilon}+\text{有限项}
\end{aligned}
\tag{5.94}
$$

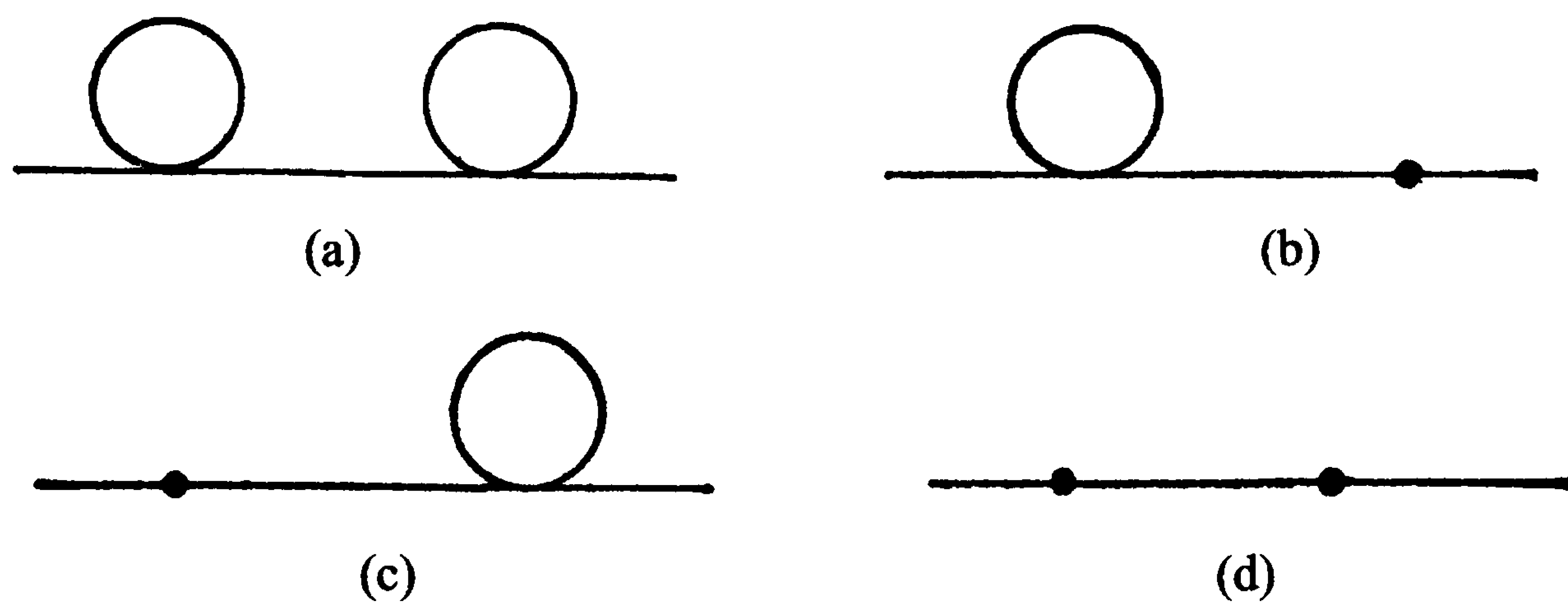


图 5.8

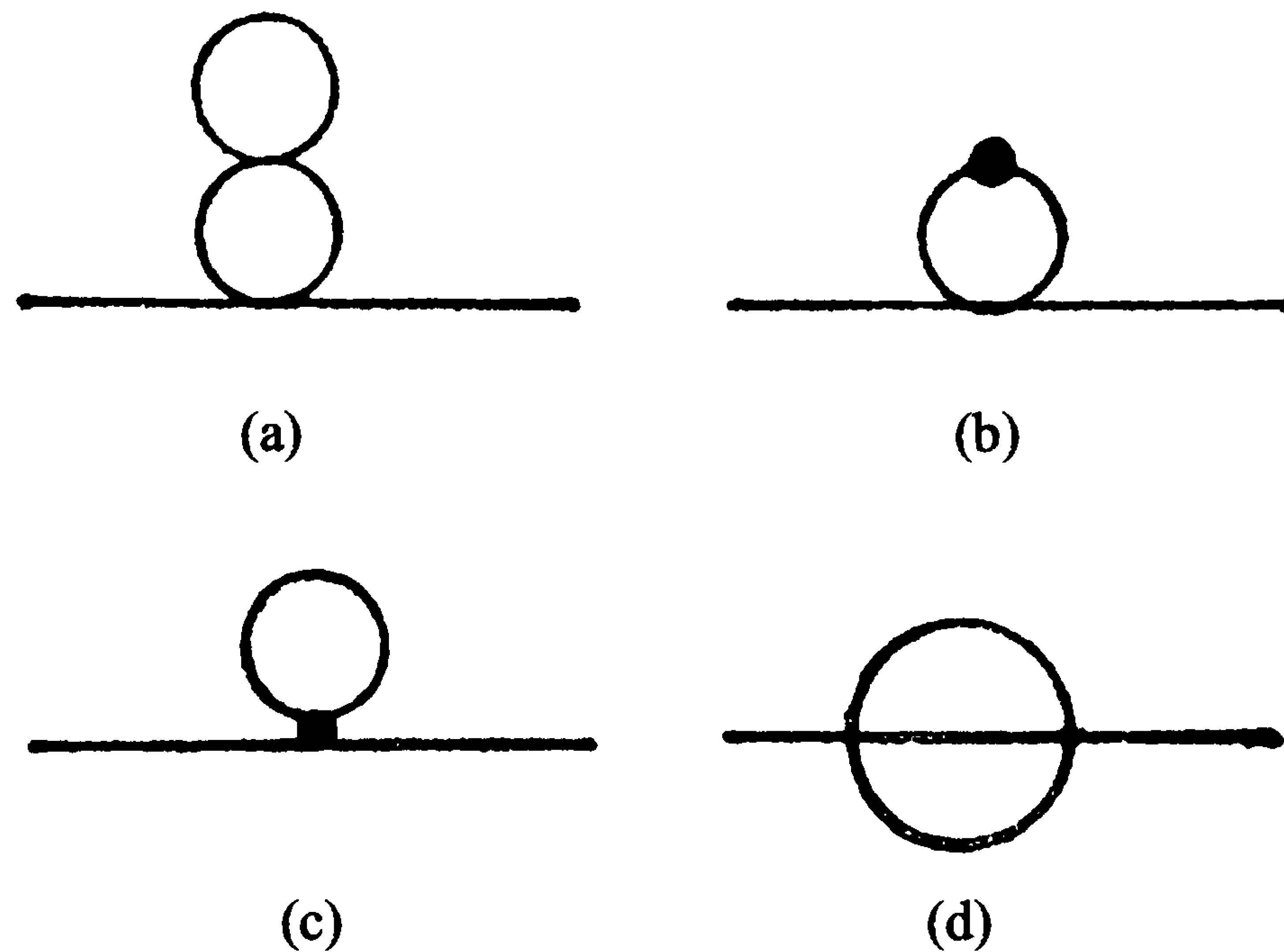


图 5.9

图 5.9(c)的贡献为

$$
-\mathrm{i}\frac{3g^2}{16\pi^2\varepsilon}\mu^{\varepsilon}\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^D(k^2+m^2)}=-\frac{3g^2}{(16\pi^2)^2\varepsilon}\left[\frac{1}{\varepsilon}+c\right]m^2+\text{有限项}
\tag{5.95}
$$

图 5.9(d)的贡献为

$$
-\frac{g^2\mu^{8-2D}}{6(2\pi)^{2D}}\iint\mathrm{d}^Dk_1\mathrm{d}^Dk_2\,\frac{1}{(k_1^2+m^2)(k_2^2+m^2)[(p-k_1-k_2)^2+m^2]}
\tag{5.96}
$$

其中,1/6 是图形的对称因子。用 Feynman 参数后两次利用积分公式(5.56),上式化为

$$-\frac{g^2\mu^{8-2D}}{6(2\pi)^{2D}}\pi^D\Gamma(3-D)J(p^2)$$

$$J(p^2)=\int_0^1\prod_{i=1}^3 \mathrm{d}\alpha_i\delta(\Sigma\alpha_i-1)\frac{1}{K^{D/2}}\left(\frac{D(p^2)}{K}\right)^{D-3}$$

其中

$$K=\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1$$

$$D(p^2)=p^2\alpha_1\alpha_2\alpha_3+m^2K$$

在 $D\geqslant4$ 时 $J(p^2)$在 $\alpha_1+\alpha_2=0,\alpha_2+\alpha_3=0,\alpha_3+\alpha_1=0$ 处发散,所以它在 $D=4$ 处有极点。我们不在此做 $J(p^2)$的详细的计算,只限于写出最后的结果

$$J(p^2)=(m^2)^{D-4}\left(\frac{6m^2}{\varepsilon}+\frac{1}{2}p^2+3m^2\right)+O(\varepsilon)$$

因此式(5.96)可化为

$$-\frac{g^2}{6(4\pi)^4}\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^{\varepsilon}\Gamma(\varepsilon-1)\left[\frac{6m^2}{\varepsilon}+\frac{1}{2}p^2+3m^2\right]+\text{有限项}$$

$$=\frac{g^2}{(16\pi^2)^2}\left[\frac{m^2}{\varepsilon^2}+\frac{m^2}{\varepsilon}2c+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{12}p^2+\frac{1}{2}m^2\right)\right]+\text{有限项} \tag{5.97}$$

由式(5.94)、(5.95)及(5.97)得到包含单圈抵消项的 $g^2$ 阶自能部分

$$\Sigma_2^{[1]}(p^2)=\frac{g^2}{(16\pi^2)^2}\left[-\frac{2m^2}{\varepsilon^2}+\frac{m^2}{2\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{12}p^2\right]+\text{有限项} \tag{5.98}$$

按照最小减除手续引入抵消项以消除上式中的极点,这个抵消项是

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{-g^2}{12(16\pi^2)^2\varepsilon}\right)\partial_\mu\phi\cdot\partial_\mu\phi-\frac{1}{2}\frac{g^2}{(16\pi^2)^2}\cdot\left[\frac{2}{\varepsilon^2}-\frac{1}{2\varepsilon}\right]m^2\phi^2 \tag{5.99}$$

与式(5.75)比较并考虑式(5.90)中的 $g^1$ 阶项得到波函数和质量重整化常数为

$$z_\phi=1-\frac{g^2}{12(16\pi^2)^2\varepsilon}+O(g^3)$$

$$z_m^2=1+\frac{g}{16\pi^2\varepsilon}+\frac{g^2}{(16\pi^2)^2}\left[\frac{2}{\varepsilon^2}-\frac{5}{12\varepsilon}\right]+O(g^3) \tag{5.100}$$

关于在维数正规化下用最小减除手续进行重整化的方案还有一个基本问题需要讨论。理论的可重整性意味着拉氏函数中的抵消项是场的定域多项式。多项式的量纲要符合数幂律。要使这一点在最小减除方案中成立。$\Gamma_{l+1}^{[l]n}$ 中的极点项的留数只能是外动量的多项式,其中不能出现例如 $\ln(p^2)$型的项,因为不是多项式的项不能用含场的有限阶导数的抵消项消去。由公式(5.56)～(5.61)知道,对单

圈图来说,极点项的留数确实是多项式,数幂律也是成立的。但是对多圈图这一点并不显然。一个发散的子图形在其极点项被消去后对这个子图形的外动量常有对数的依赖关系[例如式(5.91)]。在维数正规化下做最小减除的重整化方案的可行性要求这种对数项不出现在大图形极点项的留数中。这一点还没有普遍的严格证明。Hepp 对 B-P 减除手续的证明[4]中所用的解析表达式不适用于这里的情况。

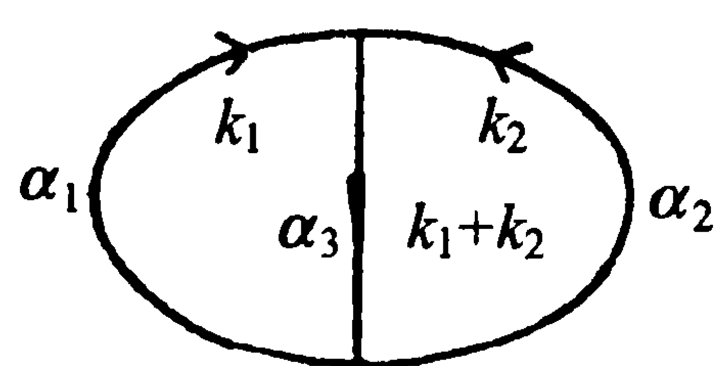



图 5.10

在文献[11]中对双圈图给出了证明,我们来叙述证明的主要步骤。一般的双圈顶角图可用图 5.10 表示,图中 $k_1$ 和 $k_2$ 为回路动量,与外线相联的顶点在图中没有画出。用 Feynman 参数分别把只含 $k_1$,$k_2$ 和 $k_1+k_2\equiv k_3$ 的传播子分母合并,则 Feynman 积分的计算归结为如下形式的积分

$$I_\alpha^\lambda(D)=\int \mathrm{d}^D k_1 \mathrm{d}^D k_2 \cdot \left(\prod_{\mu,\nu=1}^{D} k_{1\mu}^{\lambda_{1\mu}} k_{2\nu}^{\lambda_{2\nu}}\right) / \{(k_1^2+2P_1\cdot k_1+M_1^2)^{\alpha_1}(k_2^2+2P_2\cdot k_2+M_2^2)^{\alpha_2}[(k_1+k_2)^2+2(k_1+k_2)\cdot P_3+M_3^2]^{\alpha_3}\} \tag{5.101}$$

其中,$P_i$ 为外动量的线性组合,$M_i$ 为外动量组成的二次不变量。令

$$\lambda_1=\sum_\mu \lambda_{1\mu},\qquad \lambda_2=\sum_\nu \lambda_{2\nu},\qquad \alpha=\sum_i \alpha_i$$

$\lambda=\lambda_1+\lambda_2$。积分式(5.101)的表面发散度为 $2D-2\alpha+\lambda$。这个图形包含三个单圈图(2,3)、(1,3)和(1,2),分别相当于去掉 $k_1$,$k_2$ 和 $k_1+k_2$ 线所得的顶角。它们的发散已被 $\hbar$ 阶抵消项所消去。包含相应的抵消项的 $\hbar^2$ 阶顶角如图 5.11 所示。

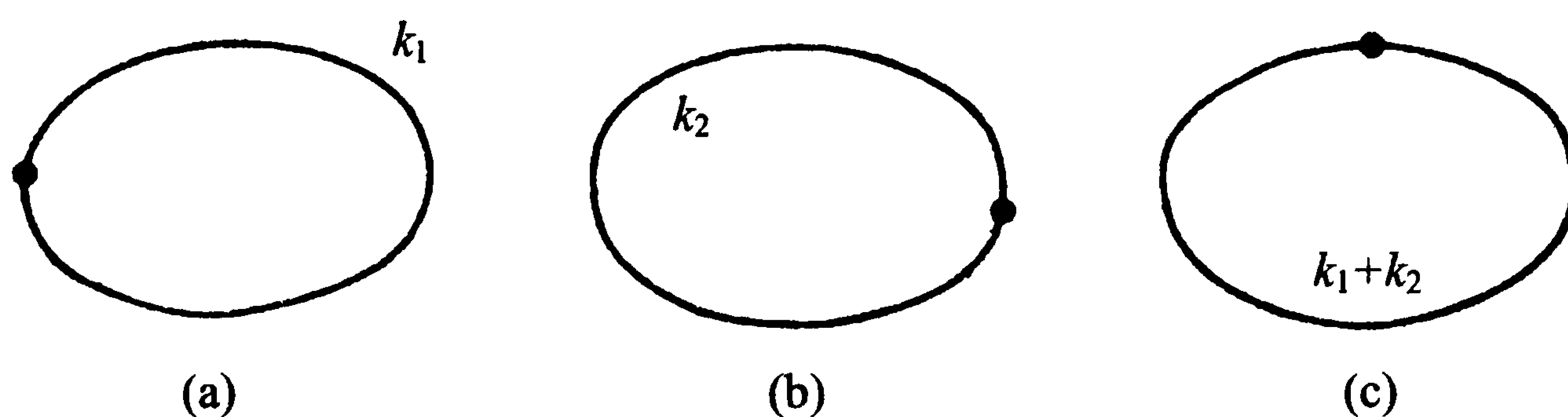



图 5.11

为考虑式(5.101)在 $D=4$ 附近的行为可以如 5.2 节中所叙述的在积分中插入因子

$$\frac{1}{2D}\sum_{\mu=1}^{D}\left(\frac{\mathrm{d}k_{1\mu}}{\mathrm{d}k_{1\mu}}+\frac{\mathrm{d}k_{2\mu}}{\mathrm{d}k_{2\mu}}\right)=1$$

并进行分部积分。由此可得

$$I_\alpha^\lambda(D)=-\frac{1}{2D-2\alpha+\lambda}I' \tag{5.102}$$

$$I' = \int d^D k_1 d^D k_2 ([2\alpha_1(M_1^2 + P_1 \cdot k_1)]/\{(k_1^2 + 2k_1 \cdot P_1 + M_1^2)^{\alpha_1+1}(k_2^2 + 2k_2 \cdot P_2 + M_2^2)^{\alpha_2}[(k_1 + k_2)^2 + 2P_3 \cdot (k_1 + k_2) + M_3^2]^{\alpha_3}\} + [2\alpha_2(M_2^2 + P_2 \cdot k_2)]/\{(k_1^2 + 2P_1 k_1 + M_1^2)^{\alpha_1}(k_2^2 + 2P_2 \cdot k_2 + M_2^2)^{\alpha_2+1}[(k_1 + k_2)^2 + 2(k_1 + k_2) \cdot P_3 + M_3^2]^{\alpha_3}\} + [2\alpha_3(M_3^2 + P_3 \cdot (k_1 + k_2))]/\{(k_1^2 + 2P_1 \cdot k_1 + M_1^2)^{\alpha_1}(k_2^2 + 2P_2 \cdot k_2 + M_2^2)^{\alpha_2}[(k_1 + k_2)^2 + 2(k_1 + k_2) \cdot P_3 + M_3^2]^{\alpha_3+1}\}) \times \prod_{\mu,\nu} k_{1\mu}^{\lambda_{1\mu}} k_{2\nu}^{\lambda_{2\nu}} \tag{5.103}$$

用这个方法可以把 $I_\alpha^\lambda(D)$表为一些整体发散度≤0($D=4$ 时)的积分 $I_{\alpha'}^{\lambda'}(D)$的线性组合,其中出现的系数是外动量的多项式。不难看出,可以使这些系数在 $D=4$ 处无极点。因此,为研究双圈图在 $D=4$ 处的极点项可以只考虑满足以下条件的 $I_\alpha^\lambda(D)$

$$8 - 2\alpha + \lambda \leqslant 0 \tag{5.104}$$

相应于这个积分的图形最多有一个单圈子图形发散。例如,如果(1,3)圈积分发散,则

$$4 - 2\alpha_1 - 2\alpha_3 + \lambda_1 \geqslant 0 \tag{5.105}$$

由式(5.104)和(5.105)

$$4 - 2\alpha_2 + \lambda_2 \leqslant 0 \tag{5.106}$$

因此如设 $2\alpha_1 - \lambda_1 > 0$。则有

$$4 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3 + \lambda_2 < 0, \qquad 4 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \lambda_1 + \lambda_2 < 0 \tag{5.107}$$

即(2,3)和(1,2)圈没有发散。用这个方法把交缠发散分开了。对于(1,3)圈的发散积分可以用插入

$$\frac{1}{D}\sum_{\mu=1}^{D} \frac{dk_{1\mu}}{dk_{1\mu}} = 1$$

并进行分部积分的方法把它用对数发散的积分表示。因此我们可设(1,3)圈积分是对数发散的。利用 Feynman 参数把含动量 $k_1$ 和 $k_1 + k_2$ 的传播子分母结合起来并用式(5.56)、(5.58)和(5.59)或由它们对 $P$ 取微商得到的公式完成对 $k_1$ 的积分。当这个积分对数发散时,它在 $D=4$ 处的极点项有如下的形式

$$C\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right)\frac{1}{(k_2^2 + 2k_2 \cdot P + M^2)^{2-\frac{D}{2}}} \tag{5.108}$$

其中，$C$ 是在$D=4$ 处无极点的系数，它一般含有 $\delta_{\mu\nu}$ 这样的张量因子，但与外动量无关。(1,3)圈发散的抵消项为

$$C\frac{1}{2-\frac{D}{2}} \tag{5.109}$$

式(5.108)对 $\Gamma_\alpha^\lambda(D)$的贡献及含抵消项式(5.109)的图 5.11(b)中顶角的相应项之和为

$$C\int\left[\Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right)\frac{1}{(k_2^2+2k_2\cdot P+M^2)^{2-\frac{D}{2}}}-\frac{1}{2-\frac{D}{2}}\right]\frac{\prod_\nu k_{2\nu}^{\lambda_{2\nu}}\,\mathrm{d}^D k_2}{(k_2^2+2k_2\cdot P_2+M_2^2)^{\alpha_2}}$$

作积分变量的平移可将上式写为

$$C\int\left[\Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right)\frac{1}{(k_2^2+M'^2)^{2-\frac{D}{2}}}-\frac{1}{2-\frac{D}{2}}\right]\times\frac{N^{\lambda_2}(k_2)\mathrm{d}^D k_2}{(k_2^2+2k_2\cdot P'_2+M'^2_2)^{\alpha_2}} \tag{5.110}$$

其中，$N^{\lambda_2}(k_2)$为 $k_2$ 的 $\lambda_2$ 阶多项式。当 $2\alpha_2>4+\lambda_2$ 时式(5.110)无极点。按照条件式(5.106)，我们只需考虑 $2\alpha_2=4+\lambda_2$ 的情况。利用推广的 Feynman 参数公式(5.63)把式(5.110)中第一项的两个因子合并，再利用式(5.56)及其对 $P$ 的微商做出对$k_2$ 的积分。经过具体计算可以证明式(5.110)在 $D=4$ 处有双重和单极点项，这些极点项中的留数对于所考虑的对数发散的积分是常数。由于

$$(M^2)^{2-\frac{D}{2}}\approx 1+\left(2-\frac{D}{2}\right)\ln M^2$$

式(5.110)中一些单极点项的留数含有 $\ln M^2$ 的因子，但这些与外动量有关的非多项式项都互相抵消了。对于一般的有更高发散度的情况，由前述的分部积分程序知道，相应的极点项中的留数是外动量的多项式。这样就证明了双圈图的发散可以用最小减除手续进行重整化。这样的证明看来可以推广到多圈图。

在文献[12]中对按最小减除手续进行重整化的可能性做了另一个一般的论证。论证的主要之点是对维数正规化的包含内部抵消项在内的 Feynman 积分推导了一个形式类似于色散关系的方程式。在这个方程式中，对某个能量的色散积分的虚部是低阶 Feynman 积分及其复共轭的乘积对有限动量空间的积分。因此由归纳法可以知道这个虚部是有限的。包含内部抵消项在内的顶角的发散表现在色散积分的发散，它对外线能量的微商是有限的。因此发散项是外动量的多项式。上述这些论证也许不完全严格，但看来还是可信的。

由式(5.93)和(5.100)可以看到由最小减除手续得到的 $\varphi^4$ 理论的重整化常

数在所求的阶内与质量无关。式(5.94)、(5.95)和(5.97)中含 $c$ 的项分别都与质量有关,但是它们互相抵消了。在文献[14]中给出了论据,说明在最小减除方案内重整化常数的这一性质对任何可重整的场论到任意阶都成立。在维数正规化的最小减除方案中,重整化常数与质量无关,这是一个很有用的性质。

## 5.4　规范理论重整化的特殊问题

为了叙述的简单,我们首先考虑纯规范场理论。在取规范固定函数 $F^a(A)$ 时,有效拉氏函数有如下的形式

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}(A_\mu,\eta,\bar{\eta}) = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(F^a)^2 + \bar{\eta}^a M_{ab}(A)\eta^b + \delta\mathscr{L} \equiv \mathscr{L}^{[0]}_{\text{eff}} + \delta\mathscr{L} \tag{5.111}$$

其中,$\delta\mathscr{L}$ 为重整化抵消项。在取线性协变规范时

$$F^a(A) = \partial_\mu A^a_\mu$$
$$M_{ab} = \partial_\mu(D_\mu)_{ab} = \partial_\mu(\delta_{ab}\partial_\mu + gf_{acb}A^c_\mu) \tag{5.112}$$

在第四章中,由拉氏函数式(5.111)推导了 Feynman 规则,其中不出现任何有量纲的常数。在这样的理论中,带 $n$ 条外线(规范粒子或 Fadeev-Popov 虚拟粒子)的正规(即单粒子不可约)顶角的表面发散度等于它的量纲

$$D = 4 - n$$

因此在微扰论中只有 $n \leqslant 4$ 的正规顶角才有原始发散。由 $\bar{\eta}\eta A$ 作用顶点的 Feynman 规则知道,在包含虚拟粒子外线的顶角的表示式中对每条 $\bar{\eta}\eta$ 连线有一个外线动量的因子,这使对内线动量的积分的发散度减少一阶,因此 $\bar{\eta}\eta\bar{\eta}\eta$ 四点顶角没有原始发散。这个理论的所有发散都包含在$(A)^2$,$(A)^3$,$(A)^4$,$\bar{\eta}\eta$ 及 $\bar{\eta}\eta A$ 顶角中,可以用相应的抵消项消去。在这个意义上在线性协变规范条件下的规范理论是明显可重整的。不明显的是引进重整化抵消项以后的理论是否仍然具有规范理论的结构,特别是规范粒子是否保持无质量的性质?$(A)^3$,$(A)^4$ 及 $\bar{\eta}\eta A$ 作用是否仍然由同一个耦合常数决定?

在处理包含标量场与旋量场在内的规范理论的重整化时遇到的问题是相似的。重整化以后的理论保持规范理论的结构是非常重要的。这是因为在线性协变规范条件下理论中包含负度规的 Fadeev-Popov 虚拟粒子及纵向极化规范粒子等非物理粒子,这些粒子出现在 Feynman 图的中间态中,因此理论的幺正性不是明显的。在本章的后面我们将看到由规范理论的有效拉氏函数可以导出 Ward-Takahashi 恒等式,这些恒等式对于保证理论的幺正性是必要的。

为了证明重整化以后的理论仍然具有规范理论的形式,我们将证明纯规范理

论的所有发散可以用如下形式的抵消项消去

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{L} = & -(z_3-1)\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 \\ & -(z_1-1)\frac{1}{2}[g(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)f_{abc}A_\mu^b A_\nu^c] \\ & -(z_4-1)\frac{g^2}{4}(f_{abc}A_\mu^b A_\nu^c)^2 + (\tilde{z}_3-1)\bar{\eta}^a\Box\eta^a \\ & + g(\tilde{z}_1-1)f_{abc}\bar{\eta}^a A_\mu^c\partial_\mu\eta^b\end{aligned} \tag{5.113}$$

特别是不需要引入规范场和虚拟场的质量抵消项。式(5.113)中的重整化常数还需要满足如下的关系

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{\tilde{z}_1}{\tilde{z}_3} = \frac{z_4}{z_1} \tag{5.114}$$

引进由下式定义的未重整的场量和常数

$$\begin{aligned} & A_{\mu 0} = z_3^{\frac{1}{2}}A_\mu,\ \eta_0 = \tilde{z}_3^{\frac{1}{2}}\eta,\ \bar{\eta}_0 = \tilde{z}_3^{\frac{1}{2}}\bar{\eta} \\ & g_0 = z_1 z_3^{-\frac{3}{2}}g \quad \alpha_0 = z_3\alpha \end{aligned} \tag{5.115}$$

由式(5.113)~(5.115)及(5.111)得到

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}(A_\mu, \bar{\eta}, \eta, g) = \mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{[0]}(A_{\mu 0}, \bar{\eta}_0, \eta_0, g_0) \tag{5.116}$$

因此在式(5.113)和(5.114)满足时,重整化以后的理论仍然具有规范理论的形式。

重整化手续包含正规化和减除两个步骤。对于下面关于重整化抵消项的讨论来说,使正规化的 Green 函数保持由规范不变性导出的 Ward-Takahashi 恒等式仍成立是必要的。引入负度规的有质量的矢量粒子的正规化方案明显破坏理论的规范不变性和相应的 Ward-Takahashi 恒等式,不宜用于非 Abel 规范理论,Pauli-Villars 正规化方案不适于消除规范粒子圈图的发散。因此我们将采用维数正规化方案,这种正规化手续不破坏规范不变性及相应的 Ward-Takahashi 恒等式。

在减除手续上非 Abel 规范理论也有它特殊的问题。对于没有破缺的规范理论规范粒子没有质量,当外线粒子在质壳上时,顶角部分有红外发散,这种红外发散比量子电动力学中的红外发散更为复杂。这一点在本书的后面将会比较详细地讨论。因此通常在外线粒子质壳上减除的方案不适用于没有破缺的非 Abel 规范理论。

在非 Abel 规范理论中,一个常用的减除规则是在外线动量的欧氏点归一化,以避开 Green 函数的奇点。在这个方案中,选择重整化抵消项中的常数 $z_3, \tilde{z}_3, z_1$ 及 $\tilde{z}_1$,使得在外动量 $k_i$ 的某个欧氏点$k_i^2 = \mu^2 > 0$ 处重整化的正规顶角等于它的最

低阶表示式。令$\tilde{\Delta}'_{F\mu\nu}(k,\alpha)_{ab}$为规范场传播子,它的归一化条件取为

$$\tilde{\Delta}'_{F\mu\nu}(k,\alpha)_{ab}\Big|_{k^2=\mu^2}=\tilde{\Delta}_{F\mu\nu}(k,\alpha)_{ab}=\left[\delta_{\mu\nu}-(1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{\mu^2}\right]\cdot\frac{1}{\mu^2}\delta_{ab} \tag{5.117}$$

相似地,虚拟场传播子的归一化条件为

$$\tilde{\Delta}'_{F}(k,\alpha)_{ab}\Big|_{k^2=\mu^2}=\frac{1}{\mu^2}\delta_{ab} \tag{5.118}$$

$(A)^3$ 及 $\bar{\eta}\eta A$ 顶角的归一化条件分别为

$$\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2,k_3)\Big|_{k_i^2=\mu^2}=-gf_{abc}[(k_1-k_2)_\lambda\delta_{\mu\nu}+(k_2-k_3)_\mu\delta_{\nu\lambda}+(k_3-k_1)_\nu\delta_{\lambda\mu}] \tag{5.119}$$

$$\Gamma^{abc}_{\mu}(k_1,k_2,k_3)\Big|_{k_i^2=\mu^2}=gf_{abc}k_{1\mu} \tag{5.120}$$

式(5.117)~(5.120)分别决定了 $z_3,\tilde{z}_3,z_1^{-1}$ 及 $\tilde{z}_1^{-1}$。在这个方案中的重整化顶角可以由通常的 Bogoliubov R 手续得到,只是要选择一个欧氏点做泰勒展开。在维数正规化方案中,原来的顶角表示式中的发散表现为时空维数 $D=4$ 处的极点。在经过 R 手续后极点消去了。

在非 Abel 规范理论中另一个常用的减除规则是′t Hooft 首先提出的最小减除手续,在本节中我们将采用这个减除方案,因为这样较易于证明重整化的理论具有规范理论的形式。

## 5.5　规范场的单圈重整化常数

在本节中我们将讨论规范理论中单圈重整化常数的计算。首先考虑纯规范场的情况,这时规范场 $A^a_\mu$ 的波函数重整化常数$z_3$ 在微扰论最低阶可以由图 5.12 中三个 Feynman 图算出,其中波纹线表示规范场,虚线表示虚拟场,$a,a'$及$\lambda,\lambda'$分别为始末态规范粒子的规范群指标及 Lorentz 指标。为了说明计算方法,我们写出在 Feynman 规范中 $z_3$ 的计算式。按照第四章中所给出的 Feynman 规则,图 5.12(a)对自能的贡献为

$$\begin{aligned}-\mathrm{i}(\Pi^{[1]}_a)^{aa'}_{\lambda\lambda'}=&\frac{1}{2}(-g\mu^{\epsilon/2})^2f_{abc}f_{a'bc}\int\frac{\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^D}[\delta_{\lambda\mu}(p+k)_\nu\\&+\delta_{\mu\nu}(p-2k)_\lambda+\delta_{\nu\lambda}(k-2p)_\mu][\delta_{\lambda'\mu'}(-p-k)_{\nu'}\\&+\delta_{\mu'\nu'}(2k-p)_{\lambda'}+\delta_{\nu'\lambda'}(2p-k)_{\mu'}](-\mathrm{i})\\&\times\frac{\delta_{\mu\mu'}-(1-\alpha)k_\mu k_{\mu'}}{k^2}\cdot(-\mathrm{i})[\delta_{\nu\nu'}-(1-\alpha)(p-k)_\nu\end{aligned}$$

$$\times (p-k)_{\nu'}]/[(p-k)^2]$$

其中，$f_{abc}$为群的结构常数。上式中的因子 1/2 是图形的对称因子。群的生成元 $T_a$ 满足对易关系

$$[T_a, T_b] = \mathrm{i} f_{abc} T_c \tag{5.121}$$

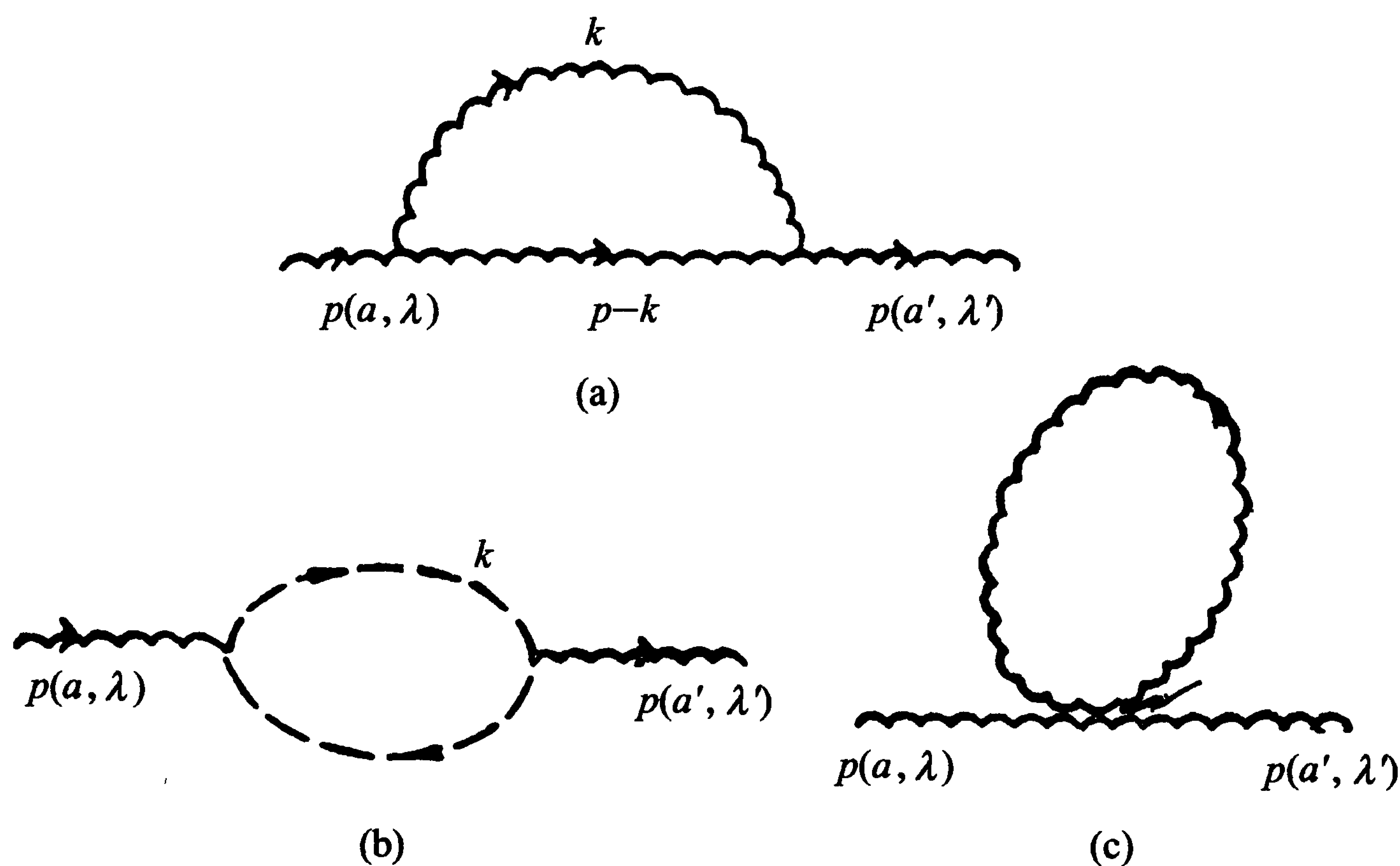



图 5.12

令

$$f_{abc} f_{a'bc} = \delta_{aa'} C_2(A) \tag{5.122}$$

$C_2(A)$为规范群 $G$ 的 Casimir 算符在正则表示中的值。在 Feynman 规范中 $\alpha=1$，这时

$$\begin{aligned} -\mathrm{i}(\Pi_a^{[1]})_{\lambda\lambda'}^{aa'} = & -\frac{1}{2}(g\mu^{\varepsilon/2})^2 C_2(A)\delta_{aa'}\int[\delta_{\lambda\lambda'}(-5p^2+2k\cdot p \\ & -2k^2)+2p_\lambda p_{\lambda'}+5p_\lambda k_{\lambda'}+5k_\lambda p_{\lambda'} \\ & -10k_\lambda k_{\lambda'}]\cdot\frac{1}{k^2(p-k)^2}\frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D} \end{aligned} \tag{5.123}$$

利用公式(5.56)及由对它做微商得到的公式(5.57)和(5.58)

$$\int \mathrm{d}^D k \frac{k_\lambda}{(k^2+2k\cdot p+m^2)^\alpha} = \frac{\mathrm{i}\pi^{\frac{1}{2}D}}{(m^2-p^2)^{\alpha-\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}D\right)}{\Gamma(\alpha)}(-p_\mu) \tag{5.124}$$

$$\int \mathrm{d}^D k \frac{k_\lambda k_{\lambda'}}{(k^2+2k\cdot p+m^2)^\alpha} = \frac{\mathrm{i}\pi^{\frac{1}{2}D}}{(m^2-p^2)^{\alpha-\frac{D}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}$$

$$\times\left\{\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}D\right)p_\lambda p_{\lambda'}+\Gamma\left(\alpha-1-\frac{1}{2}D\right)\frac{1}{2}\delta_{\lambda\lambda'}(m^2-p^2)\right\} \tag{5.125}$$

利用 Feynman 参数积分可以得到

$$\frac{\mu^\varepsilon}{(2\pi)^D}\int \mathrm{d}^D k\,\frac{1}{(p-k)^2k^2}=\frac{\mathrm{i}}{8\pi^2}\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{2}\ln\frac{4\pi\mu^2}{p^2}+\text{常数}\right) \tag{5.126}$$

$$\frac{\mu^\varepsilon}{(2\pi)^D}\int \mathrm{d}^D k\,\frac{k_\lambda}{(p-k)^2k^2}=\frac{\mathrm{i}}{16\pi^2}\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{2}\ln\frac{4\pi\mu^2}{p^2}+\text{常数}\right)p_\lambda \tag{5.127}$$

$$\frac{\mu^\varepsilon}{(2\pi)^D}\int \mathrm{d}^D k\,\frac{k_\lambda k_{\lambda'}}{(p-k)^2k^2}=\frac{\mathrm{i}}{8\pi^2}\left(\frac{1}{3}p_\lambda p_{\lambda'}-\frac{1}{12}p^2\delta_{\lambda\lambda'}\right)\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{2}\ln\frac{4\pi\mu^2}{p^2}+\text{常数}\right) \tag{5.128}$$

此外,在维数正规化中一般有(见 5.2 节)

$$\lim_{\eta\to 0}\int \mathrm{d}^D k\,\frac{1}{k^2-\mathrm{i}\eta}=0 \tag{5.129}$$

因此

$$\int \mathrm{d}^D k\,\frac{1}{(p-k)^2}=0$$

利用以上公式可以得到,图 5.12(a)的贡献为

$$(\Pi_a^{[1]})_{\lambda\lambda'}^{aa'}=\frac{1}{16\pi^2}C_2(A)\left(-\frac{19}{6}p^2\delta_{\lambda\lambda'}+\frac{11}{3}p_\lambda p_{\lambda'}\right)\times\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{2}\ln\frac{4\pi\mu^2}{p^2}+\text{常数}\right)\delta_{aa'} \tag{5.130}$$

图 5.12(b)的贡献为

$$-\mathrm{i}(\Pi_b^{[1]})_{\lambda\lambda'}^{aa'}=(-1)(-g\mu^{\varepsilon/2})^2 f_{abc}f_{ba'c}\times\int\frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D}k_\lambda(k-p)_{\lambda'}\,\frac{-\mathrm{i}}{k^2}\,\frac{-\mathrm{i}}{(k-p)^2} \tag{5.131}$$

其中,因子(−1)来自虚拟粒子圈。利用式(5.127)及(5.128)得到

$$(\Pi_b^{[1]})_{\lambda\lambda'}^{aa'}=g^2C_2(A)\frac{-1}{16\pi^2}\left(\frac{1}{6}p^2\delta_{\lambda\lambda'}+\frac{1}{3}p_\lambda p_{\lambda'}\right)\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{2}\ln\frac{4\pi\mu^2}{p^2}+\text{常数}\right) \tag{5.132}$$

图 5.12(c)的贡献 $\Pi_c^{[1]}$ 正比于 $\int\frac{\mathrm{d}^D k}{k^2}$,按照式(5.129)

$$\Pi_c^{[1]}=0 \tag{5.133}$$

由此得到在 Feynman 规范中单圈真空极化部分

$$(\Pi^{[1]})_{\lambda\lambda'}^{aa'}=(\Pi_a^{[1]}+\Pi_b^{[1]}+\Pi_c^{[1]})_{\lambda\lambda'}^{aa'}$$

$$= \frac{g^2}{16\pi^2}\frac{10}{3}C_2(A)(-p^2\delta_{\lambda\lambda'} + p_\lambda p_{\lambda'})\delta_{aa'}$$

$$\times\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\ln\frac{4\pi\mu^2}{p^2} + \text{常数}\right) \tag{5.134}$$

按照最小减除规则应当在拉氏函数中引进一个抵消项

$$-\frac{1}{4}(z_3 - 1)(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2$$

$$z_3 = 1 + \frac{g^2}{10\pi^2}\frac{10}{3}C_2(A)\frac{1}{\varepsilon} \tag{5.135}$$

来抵消式(5.134)中的极点项，注意，式(5.134)不需要引入质量抵消项而且 $k_\lambda \Pi_{\lambda\lambda'}^{[1]}(k) = k_{\lambda'}\Pi_{\lambda\lambda'}^{[1]}(k) = 0$，满足了规范不变的要求。

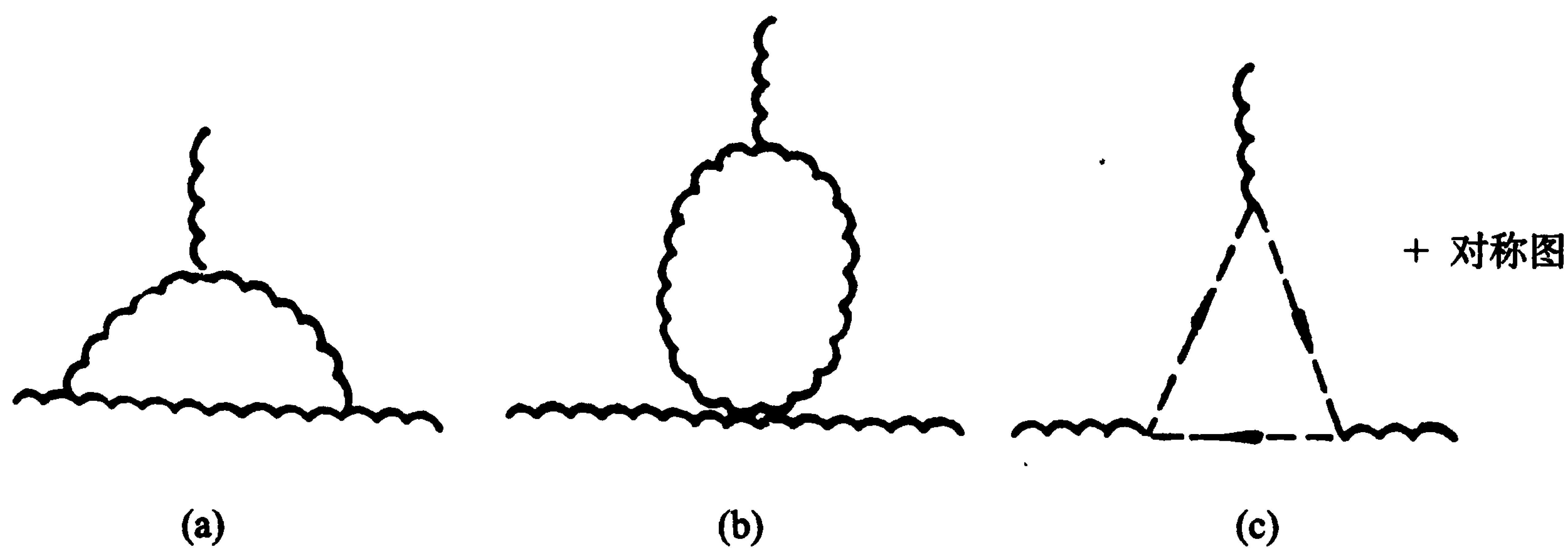



图 5.13

耦合常数的重整化常数 $z_1$ 由图 5.13 中的 Feynman 图算出。计算结果表明这些图形所表示的顶角的极点项可以用一个抵消项

$$-\frac{1}{2}(z_1 - 1)gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\nu^a)$$

来消去。由此可以定出单圈图对 $z_1$ 的贡献。相似地，$\tilde{z}_3$ 和 $\tilde{z}_1$ 可以由图 5.14 和 5.15 中的图形算出。图 5.14 中的顶角含有外线动量的因子，它实际上只是对数发散的，因此不需要引入虚拟场的质量抵消项。由图 5.16 中的图形算出的四点顶角极点项可以用如下的抵消项消去



图 5.14

$$-(z_4 - 1)\frac{g^2}{4}(f_{abc}A_\mu^b A_\nu^c)^2$$

这一点不是能由 Lorentz 和群的整体对称性导出的。

在一般的线性协变规范中,用最小减除规则得到的重整化常数如下

$$z_3 = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2}\left(\frac{13}{3} - \alpha\right)C_2(A)\frac{1}{\varepsilon} + O(g^4)$$

$$z_1 = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2}C_2(A)\left(\frac{17}{6} - \frac{3}{2}\alpha\right)\frac{1}{\varepsilon} + O(g^4)$$

$$\tilde{z}_3 = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2}C_2(A)\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\alpha\right)\frac{1}{\varepsilon} + O(g^4)$$

$$\tilde{z}_1 = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2}C_2(A)\alpha\frac{1}{\varepsilon} + O(g^4)$$

$$z_4 = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2}C_2(A)\left(\frac{4}{3} - 2\alpha\right)\frac{1}{\varepsilon} + O(g^4) \tag{5.136}$$

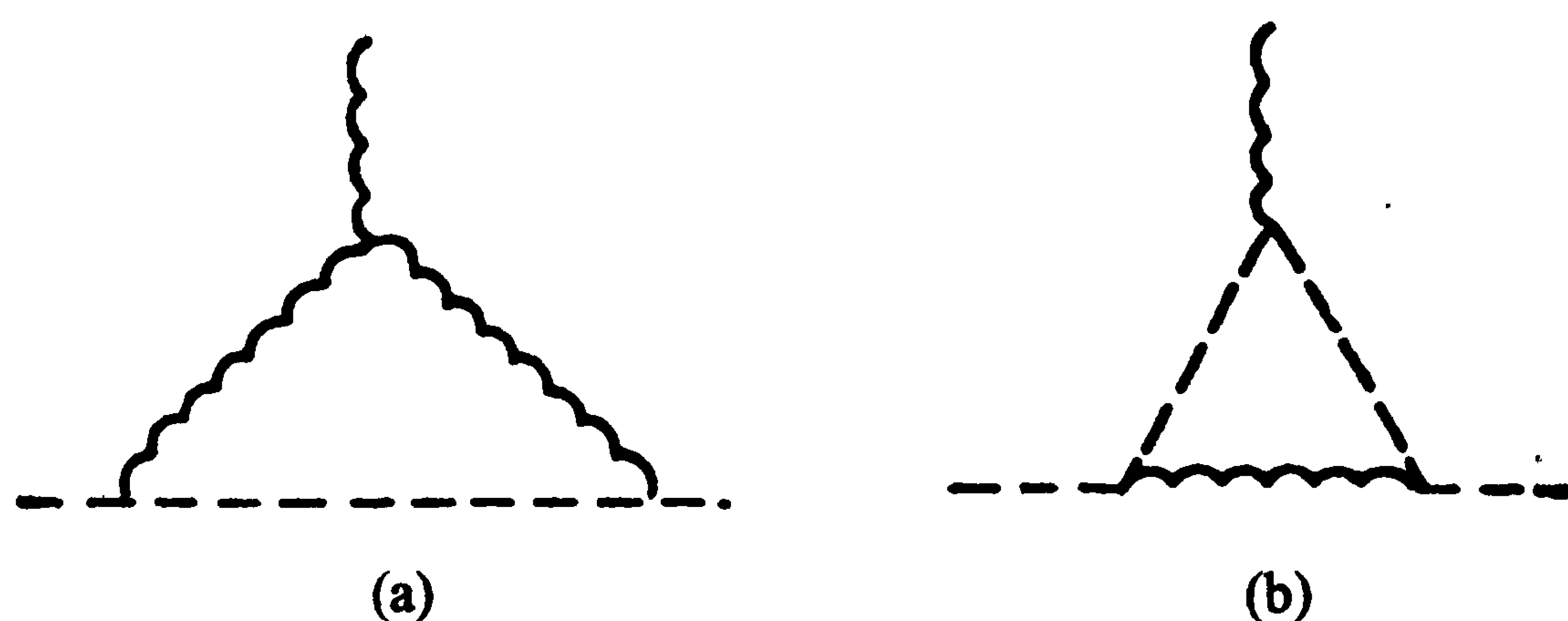



图 5.15

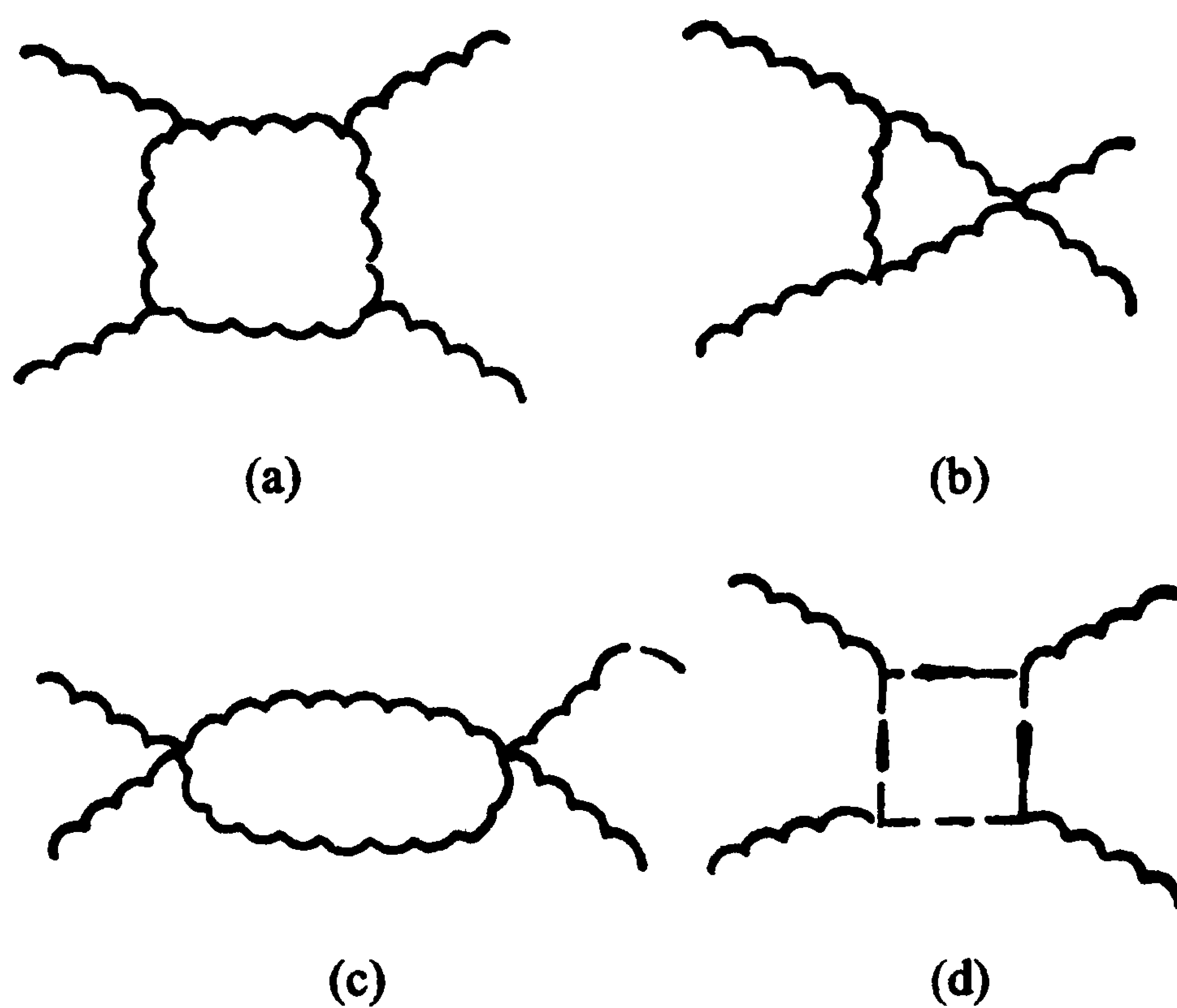



图 5.16

式(5.136)中的重整化常数满足关系式(5.114),证明了单圈图一级重整化的理论保持规范理论的形式。

注意,式(5.136)中的 $z_3$ 与规范有关,这是非 Abel 规范理论的特点。在量子电动力学中光子波函数重整化常数与规范无关。非 Abel 规范理论的这一性质是与规范粒子带有对称群的量子数相关的。我们可以引入耦合常数重整化常数 $z_g$

$$g_0 = z_g g, \qquad z_g = z_1 z_3^{-\frac{3}{2}} \tag{5.137}$$

由式(5.136)得到

$$z_g = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2} C_2(A) \frac{11}{3} \frac{1}{\varepsilon} + O(g^4) \tag{5.138}$$

上式与规范无关。

如果再考虑与规范场耦合的 Fermi 子,在拉氏函数中需要引入如下的项

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_\psi = &- \bar{\psi}\gamma_\mu D_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi - (z_2 - 1)\bar{\psi}\gamma_\mu \partial_\mu \psi - (z_2 z_m - 1) m\bar{\psi}\psi \\ &+ \mathrm{i}(z_{1\psi} - 1) g\bar{\psi}\gamma_\mu A_\mu^a T_a \psi = \mathscr{L}_\psi^{[0]} + \delta \mathscr{L}_\psi \end{aligned} \tag{5.139}$$

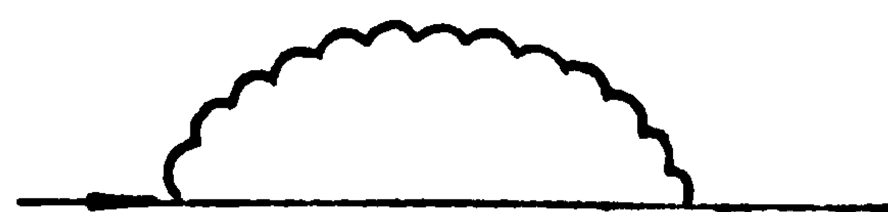


图 5.17

其中

$$D_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}g A_\mu^a T_a$$

$T_a$ 为群的生成元在 Fermi 子所属的表示中的矩阵。在单圈近似下,$z_2$ 和 $z_m$ 由图 5.17 定出,$z_{1\psi}$ 由图 5.18 定出。除群的因子外,图 5.17 的计算与量子电动力学一样,得到的结果是

$$z_2 = 1 - \frac{g^2}{8\pi^2} C_2(\psi) \alpha \frac{1}{\varepsilon} + O(g^4) \tag{5.140}$$

$$z_m = 1 - \frac{3g^2}{8\pi^2} C_2(\psi) \frac{1}{\varepsilon} + O(g^4) \tag{5.141}$$

其中

$$C_2(\psi) \times I = \sum_a T_a^2 \tag{5.142}$$

为 Casimir 算符在 Fermi 子表示中的值。由图 5.18 得到

$$z_{1\psi} = 1 - \frac{g^2}{8\pi^2} \left[ \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\alpha \right) C_2(A) + \alpha C_2(\psi) \right] \frac{1}{\varepsilon} \tag{5.143}$$

此外 Fermi 子圈图对 $z_3$, $z_1$ 和 $z_4$ 也有贡献,计算结果是

$$\delta z_3 = \delta z_1 = \delta z_4 = - \frac{g^2}{16\pi^2} T(\psi) \frac{1}{\varepsilon} \tag{5.144}$$

其中,$T(\psi)$ 由下式定义

$$\delta_{ab} T(\psi) = \mathrm{Tr}(T_a T_b) \tag{5.145}$$

在引入 Fermi 子以后,重整化的理论保持规范理论的形式还需要增加一个条件

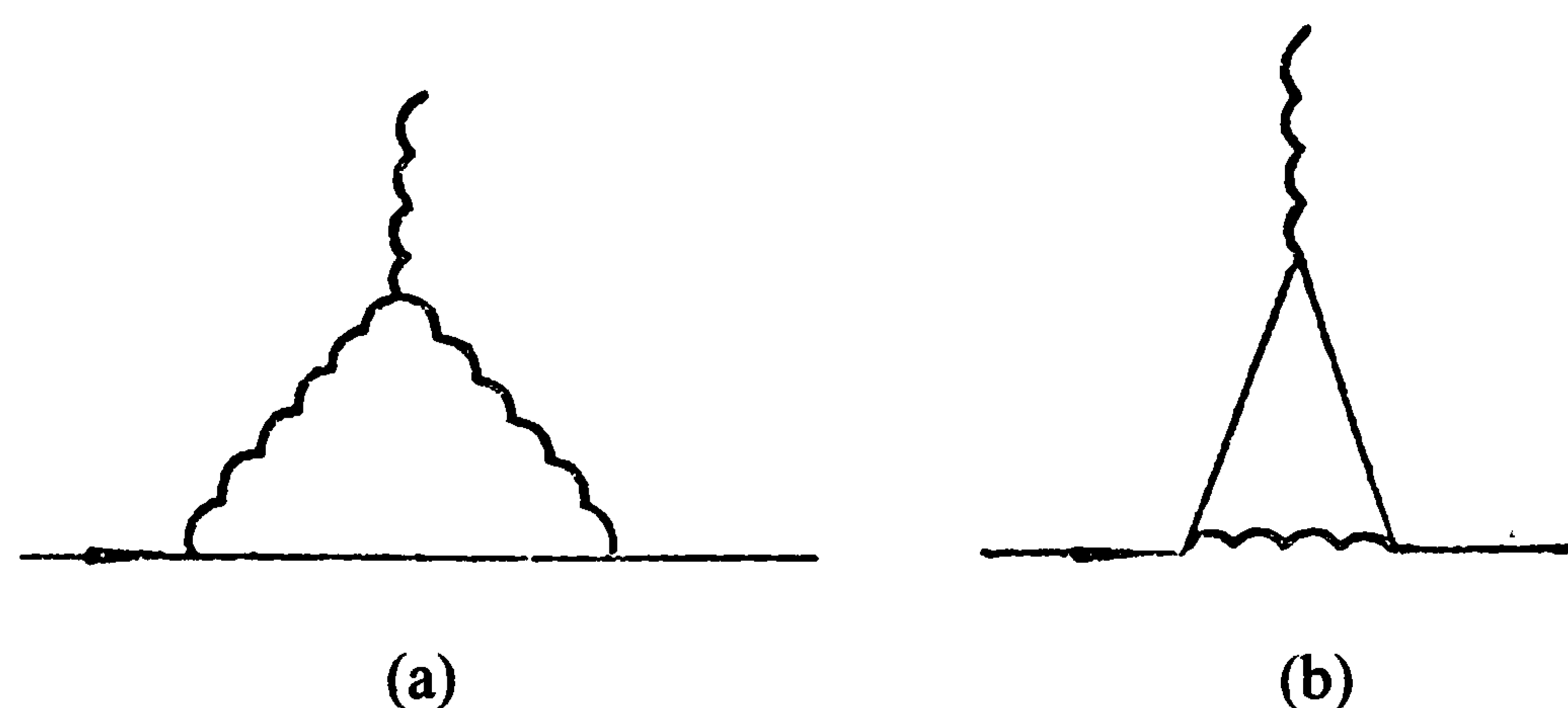



图 5.18

$$\frac{z_2}{z_{1\psi}} = \frac{z_3}{z_1} \tag{5.146}$$

定义未重整的 Fermi 子场和质量

$$\psi_0 = \sqrt{z_2}\,\psi, \qquad m_0 = z_m m \tag{5.147}$$

在式(5.146)和(5.114)满足时,拉氏函数

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}(A,\psi,\eta,\bar{\eta}) = \mathscr{L}_{\text{eff}}(A,\eta,\bar{\eta}) + \mathscr{L}_{\psi}$$

有如下的规范理论的形式

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}(A,\ \psi,\eta,\bar{\eta},g,m) = \mathscr{L}_{\text{eff}}^{[0]}(A_0,\eta_0,\bar{\eta}_0,g_0) + \mathscr{L}_{\psi}^{[0]}(\psi_0,A_0,g_0,m_0) \tag{5.148}$$

式(5.143)和(5.140)是满足关系式(5.146)的。显然在考虑了 Fermi 子圈图对 $z_3$,$z_1$ 和 $z_4$ 的贡献式(5.144)以后,关系式(5.114)仍旧满足。这就验证了,包含 Fermi 子的规范理论在重整化以后到单圈图一级仍旧保持规范理论的形式,特别是理论中所包含的各种相互作用顶点由一个统一的耦合常数决定。考虑了 Fermi 子以后,耦合常数的重整化常数为

$$\begin{aligned} z_g &= z_1 z_3^{-\frac{3}{2}} = z_{1\psi} z_2^{-1} z_3^{-\frac{1}{2}} = g_0/g \\ &= 1 - \frac{g^2}{8\pi^2\varepsilon}\left(\frac{11}{6}C_2(A) - \frac{2}{3}T(\psi)\right) \end{aligned} \tag{5.149}$$

上式是与规范无关的。

下面我们将给出规范理论可重整性的一般证明。这方面最早的贡献是由 ′t Hooft在文献[15]中作出的,稍后有文献[16],[17]中的工作。本书的叙述依据文献[18],[19]。作为准备我们将首先导出由理论的规范形式得到的 Ward-Takahashi 恒等式,这是一些把不同的 Green 函数或顶角联系起来的关系式。

## 5.6 Becchi-Rouet-Stora 变换和 Ward-Takahashi 恒等式

为了叙述的简单，首先考虑纯规范场的情况，这时在引进重整化抵消项之前，有效拉氏量有如下的形式

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}^{[0]}(A_\mu,\bar{\eta},\eta)=\mathscr{L}_{\text{YM}}(A)-\frac{1}{2\alpha}(F^a(A_\mu))^2+\bar{\eta}^a M_{ab}(A)\eta^b \tag{5.150}$$

在无穷小规范变换下

$$\delta A_\mu^a=(D_\mu)_{ab}\delta\theta^b,\qquad (D_\mu)_{ab}=\delta_{ab}\partial_\mu+gf_{acb}A_\mu^c$$

$$\delta F^a=M_{ab}\delta\theta^b=\frac{\partial F^a}{\partial A_\mu^c}(D_\mu)_{cb}\delta\theta^b \tag{5.151}$$

在选取线性协变规范时

$$F^a(A)=\partial_\mu A_\mu^a,M_{ab}=\partial_\mu(D_\mu)_{ab} \tag{5.152}$$

由于加上了规范固定项及相应的 Fadeev-Popov 虚拟粒子项，$\mathscr{L}_{\text{eff}}^{[0]}$ 失去了规范不变性。然而，Becchi，Rouet 和 Stora 发现[20]式(5.150)在如下的变换下是不变的

$$\delta A_\mu^a=-(D_\mu)_{ab}\eta^b\delta\lambda,\delta\eta^a=-\frac{1}{2}gf_{abc}\eta^b\eta^c\delta\lambda$$

$$\delta\bar{\eta}^a=\frac{1}{\alpha}F^a\delta\lambda \tag{5.153}$$

其中，$\delta\lambda$ 为反对易常数。式(5.153)称为 BRS 变换，它是一个把 Fermi 场和 Bose 场混起来的定域变换。$\mathscr{L}_{\text{eff}}^{[0]}$ 的 BRS 不变性是理论原来的规范不变性的反映。

BRS 变换有如下一些性质。首先，注意式(5.153)中第一式是一个规范变换，变换的参数是 $\delta\theta^a=\eta^a\delta\lambda$，因此 $\mathscr{L}_{\text{YM}}(A)$在 BRS 变换下是不变的。其次，对 $A_\mu$ 及 $\eta$ 的变换来说，它是一个幂零变换，即

$$\delta^2A_\mu^a=-\delta((D_\mu)_{ab}\eta^b)\delta\lambda=0 \tag{5.154}$$

$$\delta^2\eta^a=-\frac{g}{2}\delta(f_{abc}\eta^b\eta^c)\delta\lambda=0 \tag{5.155}$$

式(5.154)的证明如下

$$\delta((D_\mu)_{ab}\eta^b)=-gf_{acb}((D_\mu)_{cd}\eta^d)\delta\lambda\eta^b-\frac{1}{2}g\cdot((D_\mu)_{ab}f_{bef}\eta^e\eta^f)\delta\lambda$$

考虑到 $\delta\lambda$ 与 $\eta$ 反对易，上式中含微分的项为

$$gf_{acb}(\partial_\mu\eta^c)\eta^b\delta\lambda-\frac{1}{2}gf_{aef}\partial_\mu(\eta^e\eta^f)\delta\lambda$$

$$=gf_{acb}(\partial_\mu\eta^c)\eta^b\delta\lambda-gf_{aef}(\partial_\mu\eta^e)\eta^f\delta\lambda=0$$

因此,考虑到结构常数的反对称性,我们有

$$- \delta^2 A_\mu^a = \left( - g^2 f_{acb} f_{ced} A_\mu^a \eta^d \eta^b + \frac{1}{2} g^2 f_{acb} f_{bef} A_\mu^c \eta^e \eta^f \right) \cdot \delta\lambda$$

$$= - \frac{g^2}{2} ( f_{acb} f_{ced} - f_{acd} f_{ceb} - f_{aec} f_{cdb} ) \cdot A_\mu^e \eta^d \eta^b \delta\lambda$$

$$= \frac{g^2}{2} ( f_{dec} f_{cab} + f_{dac} f_{cbe} + f_{aec} f_{cdb} ) \cdot A_\mu^e \eta^d \eta^b \delta\lambda$$

由结构常数满足的 Jacobi 恒等式即得到式(5.154)。式(5.155)的证明如下

$$\delta ( f_{abc} \eta^b \eta^c ) = - g ( f_{abc} f_{bef} \eta^e \eta^f ) \eta^c \delta\lambda$$

由 $\eta$ 的反对易性及 Jacobi 恒等式即得式(5.155)。

现在我们来证明 $\mathscr{L}_{\text{eff}}^{[0]}$ 在 BRS 变换下不变。由式(5.152)及(5.154)得

$$\delta ( M_{ab} \eta^b ) = 0 \tag{5.156}$$

由式(5.153)中第三式、(5.152)及(5.156)得

$$- \delta \left( \bar{\eta}^a M_{ab} \eta^b - \frac{1}{2\alpha} ( F^a )^2 \right) = \frac{1}{\alpha} F^a M_{ab} \eta^b \delta\lambda$$

$$- \frac{1}{\alpha} F^a \frac{\partial F^a}{\partial A_\mu^c} \cdot ( D_\mu )_{cb} \eta^b \delta\lambda = 0 \tag{5.157}$$

由上式及 $\mathscr{L}_{\text{YM}}(A)$ 在 BRS 变换下的不变性即得 $\mathscr{L}_{\text{eff}}^{[0]}$ 在 BRS 变换下的不变性。

下面我们需要知道,在形如式(5.153)的变数替换下,泛函积分测度 $\int [\mathscr{D}A][\mathscr{D}\eta][\mathscr{D}\bar{\eta}]$ 的形式上的变化。为此我们考虑把普通 $c$ 数 $B_i$ 和反对易 $c$ 数 $F_k$ 混起来的变换 $(B, F) \to (B', F')$,令其变换矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial B_i}{\partial B'_j} & \dfrac{\partial B_i}{\partial F'_l} \\ \dfrac{\partial F_k}{\partial B'_j} & \dfrac{\partial F_k}{\partial F'_l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \alpha \\ \beta & b \end{pmatrix} \tag{5.158}$$

其中,$\alpha$,$\beta$ 是反对易 $c$ 数。这个变换可以看做是依次做如下两个变换 $(B, F) \to (B', F)$

$$J_1 = \begin{pmatrix} a - \alpha b^{-1} \beta & \alpha b^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.159}$$

及 $(B', F) \to (B', F')$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & b \end{pmatrix} \tag{5.160}$$

得到的,$J = J_1 J_2$。在变数替换式(5.159)下,积分测度变为

$$\int\prod_i \mathrm{d}B_i\prod_k \mathrm{d}F_k = \int\prod_i \mathrm{d}B'_i\prod_k \mathrm{d}F_k\det(a-\alpha b^{-1}\beta) \tag{5.161}$$

由第三章式(3.139)知道在变数替换式(5.160)下积分测度变为

$$\int\prod_i \mathrm{d}B'_i\prod_k \mathrm{d}F_k = \int\prod_i \mathrm{d}B'_i\prod_k \mathrm{d}F''_k(\det b)^{-1} \tag{5.162}$$

因此我们有

$$\int\prod_i \mathrm{d}B_i\prod_k \mathrm{d}F_k = \int\prod_i \mathrm{d}B'_i\prod_k \mathrm{d}F'_k\det(a-\alpha b^{-1}\beta)(\det b)^{-1} \tag{5.163}$$

变换式(5.153)的 $J$ 矩阵的对角元素都是1,而非对角元素都正比于 $\delta\lambda$。易见这时式(5.163)中的两个行列式都等于1。因此泛函积分测度 $\int[\mathscr{D}A][\mathscr{D}\eta][\mathscr{D}\bar{\eta}]$在变数替换式(5.153)下保持不变。

利用 $\mathscr{L}_{\text{eff}}^{[0]}$ 在 BRS 变换下的不变性,可以得到由 $\mathscr{L}_{\text{eff}}^{[0]}$ 构造的 Green 函数生成泛函

$$W^{[0]}[J] = \int[\mathscr{D}A][\mathscr{D}\eta][\mathscr{D}\bar{\eta}]\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4y[\mathscr{L}_{\text{eff}}^{[0]}(y)+J_\mu^a(y)A_\mu^a(y)]\right\}$$

所满足的 Ward-Takahashi 恒等式。为此我们由关系式

$$\int[\mathscr{D}A][\mathscr{D}\eta][\mathscr{D}\bar{\eta}]\bar{\eta}^a(x)\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4y[\mathscr{L}_{\text{eff}}^{[0]}(y)+J_\mu^bA_\mu^b]\right\}=0 \tag{5.164}$$

出发。式(5.164)成立的理由是,按反对易数积分的规则[第三章式(3.115)及(3.116)],有

$$\int\mathrm{d}\eta^b(x)\cdot\eta^a(x) = \int\mathrm{d}\bar{\eta}^b(x)\cdot\bar{\eta}^a(x) = \delta_{ab} \tag{5.165}$$

而 $\mathscr{L}_{\text{eff}}^{[0]}$ 对 $\eta$ 及 $\bar{\eta}$ 为双线性的。我们在式(5.164)中作形式如式(5.153)的变数替换,这时积分的值保持不变。考虑到 $\mathscr{L}_{\text{eff}}^{[0]}$ 及泛函积分测度在 BRS 变换下的不变性,就得到

$$\begin{aligned}\int[\mathscr{D}A][\mathscr{D}\eta][\mathscr{D}\bar{\eta}]&\left\{-\frac{1}{\alpha}F^a(A(x))+\mathrm{i}\bar{\eta}^a(x)\int J_\mu^b(y)(D_\mu)_{bc}\right.\\&\left.\times\eta^c(y)\mathrm{d}^4y\right\}\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4y[\mathscr{L}_{\text{eff}}^{[0]}+J_\mu A_\mu]\right\}=0\end{aligned} \tag{5.166}$$

引入虚拟粒子在外源下的传播子

$$\begin{aligned}W_{ba}^{[0]}[y,x,J] = N\mathrm{i}\int&[\mathscr{D}A][\mathscr{D}\eta][\mathscr{D}\bar{\eta}]\bar{\eta}^a(x)\eta^b(y)\\&\times\exp\left\{\mathrm{i}\int[\mathscr{L}_{\text{eff}}^{[0]}+J_\mu A_\mu]\mathrm{d}^4x\right\}\end{aligned} \tag{5.167}$$

利用式(5.167)可以将式(5.166)表为

$$\frac{1}{\alpha}F^a\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)W^{[0]}[J]-\int \mathrm{d}^4 y J_\mu^b(y)\left[D_\mu\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)\right]_{bc}W_{ca}^{[0]}[y,x,J]=0$$

(5.168)

上式就是 Green 函数生成泛函的 Ward-Takahashi 恒等式，也称为 Slavnov-Taylor 恒等式，原来是在文献[21]，[16]中用另外的方法得到的。把式(5.168)对外源 $J$ 做若干次泛函微分，然后令 $J=0$ 就可以得到 Green 函数之间的一些 Ward-Takahashi 恒等式。令

$$G_{\mu_1\cdots\mu_n}^{a_1\cdots a_n}(x_1\cdots x_n)=\langle 0\mid T(A_{\mu_1}^{a_1}(x_1)\cdots A_{\mu_n}^{a_n}(x_n))\mid 0\rangle \tag{5.169}$$

$$\widetilde{G}_{\mu_1\cdots\mu_n}^{b,a,a_1\cdots a_n}(y,x;x_1\cdots x_n)=\langle 0\mid T(\bar{\eta}^a(x)\eta^b(y)\cdot A_{\mu_1}^{a_1}(x_1)\cdots A_{\mu_n}^{a_n}(x_n))\mid 0\rangle$$

(5.170)

则在用协变规范时由式(5.168)可得

$$\frac{1}{\alpha}\partial_\mu G_{\mu\mu_1\cdots\mu_n}^{aa_1\cdots a_n}(x,x_1,\cdots,x_n)=\sum_i[\partial_{\mu_i}\widetilde{G}_{\mu_1\cdots\mu_{i-1}\mu_{i+1}\cdots\mu_n}^{a_i,a,a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n}(x_i,x;x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)$$

$$-gf_{a_idc}\cdot\widetilde{G}_{\mu_i\mu_1\cdots\mu_{i-1}\mu_{i+1}\cdots\mu_n}^{ca,da_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n}(x_i,x;x_i,x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)] \tag{5.171}$$

在讨论规范理论的可重整性时，需要正规顶角所满足的 Ward-Takahashi 恒等式，其中包括外线有虚拟粒子的正规顶角。为此，我们引进包含虚拟粒子外源的生成泛函

$$W^{[0]}[J_\mu,\beta,\bar{\beta}]=N\int[\mathscr{D}A][\mathscr{D}\eta][\mathscr{D}\bar{\eta}]$$

$$\times\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x[\mathscr{L}_{\text{eff}}^{[0]}+J_\mu^aA_\mu^a+\bar{\eta}^a\beta^a+\bar{\beta}^a\eta^a]\right\} \tag{5.172}$$

为了以下讨论的方便我们还需要引进出现在 BRS 变换中的复合算符 $(D_\mu)_{ab}\eta^b$ 及 $\frac{1}{2}gf_{abc}\eta^b\eta^c$ 的外源。令

$$\tilde{S}^{[0]}=\int\mathrm{d}^4x\widetilde{\mathscr{L}}^{[0]}(A,\eta,\bar{\eta},K,L)\equiv\int\mathrm{d}^4x\Big[\mathscr{L}_{\text{YM}}(A)$$

$$-\frac{1}{2\alpha}(F^a)^2+\bar{\eta}^aM_{ab}\eta^b+K_\mu^a(D_\mu)_{ab}\eta^b-\frac{1}{2}gL^af_{abc}\eta^b\eta^c\Big] \tag{5.173}$$

其中，$K$ 为反对易 $c$ 数。定义包含外源 $K,L$ 的生成泛函

$$\widetilde{W}^{[0]}[J,\beta,\bar{\beta},K,L]=N\int[\mathscr{D}A][\mathscr{D}\eta][\mathscr{D}\bar{\eta}]\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\right.$$

$$\left.\times[\widetilde{\mathscr{L}}^{[0]}+J_\mu^aA_\mu^a+\bar{\eta}^a\beta^a+\bar{\beta}^a\eta^a]\right\} \tag{5.174}$$

由式(5.154)及(5.155)，$\tilde{S}^{[0]}$ 在 BRS 变换下是不变的，因此

$$\left\{-(D_\mu)_{ab}\eta^b\delta\lambda\frac{\delta}{\delta A_\mu^a}-\frac{1}{2}gf_{abc}\eta^b\eta^c\delta\lambda\frac{\delta}{\delta\eta^a}+\frac{1}{\alpha}F^a\delta\lambda\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}^a}\right\}\tilde{S}^{[0]}=0 \quad (5.175)$$

利用

$$\frac{\delta\tilde{S}^{[0]}}{\delta K_\mu^a}=(D_\mu)_{ab}\eta^b \quad (5.176)$$

$$\frac{\delta\tilde{S}^{[0]}}{\delta L^a}=-\frac{1}{2}gf_{abc}\eta^b\eta^c \quad (5.177)$$

可以把式(5.175)写为

$$\frac{\delta\tilde{S}^{[0]}}{\delta A_\mu^a}\frac{\delta\tilde{S}^{[0]}}{\delta K_\mu^a}+\frac{\delta\tilde{S}^{[0]}}{\delta L^a}\frac{\delta\tilde{S}^{[0]}}{\delta\eta^a}+\frac{1}{\alpha}F^a\frac{\delta\tilde{S}^{[0]}}{\delta\bar{\eta}^a}=0 \quad (5.178)$$

由式(5.173)还可以得到

$$\frac{\delta\tilde{S}^{[0]}}{\delta\bar{\eta}^a}=\partial_\mu\frac{\delta\tilde{S}^{[0]}}{\delta K_\mu^a} \quad (5.179)$$

在式(5.174)中做形式如 BRS 变换的变数替换。由于 $\tilde{S}$ 及泛函积分测度在 BRS 变换下不变,利用式(5.176)和(5.177)可以得到

$$\int[\mathscr{D}A][\mathscr{D}\eta][\mathscr{D}\bar{\eta}]\int d^4x\left\{\frac{\delta\tilde{S}^{[0]}}{\delta K_\mu^a}J_\mu^a-\bar{\beta}^a\frac{\delta\tilde{S}^{[0]}}{\delta L^a}+\frac{1}{\alpha}\times F^a\beta^a\right\}(x)\cdot\exp\left\{i\int d^4y[\tilde{\mathscr{L}}^{[0]}+\bar{\eta}\beta+\bar{\beta}\eta+J_\mu A_\mu]\right\}=0 \quad (5.180)$$

利用式(5.174)在 $\bar{\eta}$ 的任意平移 $\bar{\eta}\rightarrow\bar{\eta}+\delta\bar{\eta}$ 下的不变性可以得到

$$\int[\mathscr{D}A][\mathscr{D}\eta][\mathscr{D}\bar{\eta}]\left\{\frac{\delta\tilde{S}^{[0]}}{\delta\bar{\eta}^a(x)}+\beta^a(x)\right\}\exp\left\{i\int d^4y\times[\tilde{\mathscr{L}}^{[0]}+\bar{\eta}\beta+\bar{\beta}\eta+J_\mu A_\mu]\right\}=0 \quad (5.181)$$

把式(5.179)代入式(5.181)得到

$$\int[\mathscr{D}A][\mathscr{D}\eta][\mathscr{D}\bar{\eta}]\left\{\partial_\mu\frac{\delta\tilde{S}^{[0]}}{\delta K_\mu^a}+\beta^a(x)\right\}\cdot\exp\left\{i\int d^4y\times[\tilde{\mathscr{L}}^{[0]}+\bar{\eta}\beta+\bar{\beta}\eta+J_\mu A_\mu]\right\}=0 \quad (5.182)$$

我们将利用式(5.180)和(5.182)推导正规顶角生成泛函的 Ward-Takahashi 恒等式。

相应于式(5.174)的联通 Green 函数生成泛函为

$$\tilde{Z}^{[0]}[J,\beta,\bar{\beta},K,L]=-\mathrm{i}\ln\widetilde{W}^{[0]}[J,\beta,\bar{\beta},K,L]$$

按照式(3.200)我们利用 Legendre 变换引进如下的不可约顶角生成泛函

$$\widetilde{\Gamma}^{[0]}[A_c,\bar{\eta}_c,\eta_c,K,L]$$
$$=\widetilde{Z}^{[0]}[J,\beta,\bar{\beta},K,L]-\int\mathrm{d}^4x[J_\mu A_\mu+\bar{\eta}_c\beta+\bar{\beta}\eta_c] \tag{5.183}$$

其中,$A_c$,$\bar{\eta}_c$,$\eta_c$ 为那里的经典场,$\phi_c$ 由下式定义

$$A^a_{\mu c}=\frac{\delta\widetilde{Z}^{[0]}}{\delta J^a_\mu},\ \eta^a_c=\frac{\delta\widetilde{Z}^{[0]}}{\delta\bar{\beta}^a},\ \bar{\eta}^a_c=-\frac{\delta\widetilde{Z}^{[0]}}{\delta\beta^a} \tag{5.184}$$

式(5.184)的逆为

$$-J^a_\mu=\frac{\delta\widetilde{\Gamma}^{[0]}}{\delta A^a_{\mu c}},\ \bar{\beta}^a=\frac{\delta\widetilde{\Gamma}^{[0]}}{\delta\bar{\eta}^a_c},\ -\beta^a=\frac{\delta\widetilde{\Gamma}^{[0]}}{\delta\eta^a_c} \tag{5.185}$$

$K$ 和 $L$ 是不参与 Legendre 变换式(5.183)的参数,我们有

$$\frac{\delta\widetilde{\Gamma}^{[0]}}{\delta L^a}=\frac{\delta\widetilde{Z}^{[0]}}{\delta L^a}+\frac{\delta\widetilde{Z}^{[0]}}{\delta J^b_\mu}\frac{\delta J^b}{\delta L^a}+\frac{\delta\widetilde{Z}^{[0]}}{\delta\beta^b}\frac{\delta\beta^b}{\delta L^a}+\frac{\delta\widetilde{Z}^{[0]}}{\delta\bar{\beta}^b}\frac{\delta\bar{\beta}^b}{\delta L^a}$$
$$-\frac{\delta J^b_\mu}{\delta L^a}A^b_{\mu c}+\bar{\eta}^b_c\frac{\delta\beta^b}{\delta L^a}-\frac{\delta\bar{\beta}^b}{\delta L^a}\eta^a_c$$

因此由式(5.184)得到

$$\frac{\delta\widetilde{\Gamma}^{[0]}}{\delta L^a}=\frac{\delta\widetilde{Z}^{[0]}}{\delta L^a} \tag{5.186}$$

同样有

$$\frac{\delta\widetilde{\Gamma}^{[0]}}{\delta K^a_\mu}=\frac{\delta\widetilde{Z}^{[0]}}{\delta K^a_\mu} \tag{5.187}$$

规范理论中的正规顶角生成泛函 $\Gamma^{[0]}$ 显然可以由在 $\widetilde{\Gamma}^{[0]}$ 中令 $K=L=0$ 而得到。利用式(5.185)及(5.180)可以得到

$$\int\mathrm{d}^4x\left(\frac{\delta\widetilde{W}^{[0]}}{\delta K^a_\mu}\frac{\delta\widetilde{\Gamma}^{[0]}}{\delta A^a_{\mu c}}+\frac{\delta\widetilde{W}^{[0]}}{\delta L^a}\frac{\delta\widetilde{\Gamma}^{[0]}}{\delta\eta^a_c}+\frac{1}{\alpha}F^a\widetilde{W}^{[0]}\frac{\delta\widetilde{\Gamma}^{[0]}}{\delta\bar{\eta}^a_c}\right)(x)=0$$

由式(5.183)、(5.186)和(5.187)知道,略去脚标 $c$ 上式可以写为

$$\int\mathrm{d}^4x\left(\frac{\delta\widetilde{\Gamma}^{[0]}}{\delta K^a_\mu}\frac{\delta\widetilde{\Gamma}^{[0]}}{\delta A^a_\mu}+\frac{\delta\widetilde{\Gamma}^{[0]}}{\delta L^a}\frac{\delta\widetilde{\Gamma}^{[0]}}{\delta\eta^a}+\frac{1}{\alpha}F^a\frac{\delta\widetilde{\Gamma}^{[0]}}{\delta\bar{\eta}^a}\right)(x)=0 \tag{5.188}$$

相似地,由式(5.182)、(5.183)及(5.185)可得

$$\partial_\mu\frac{\delta\widetilde{\Gamma}^{[0]}}{\delta K^a_\mu}=\frac{\delta\widetilde{\Gamma}^{[0]}}{\delta\bar{\eta}^a} \tag{5.189}$$

$\widetilde{\Gamma}^{[0]}$的树图近似是 $\widetilde{S}^{[0]}$,在这个近似下,式(5.188)和(5.189)分别回到式(5.178)和(5.179)。引入

$$\bar{\Gamma}^{[0]}[A,\bar{\eta},\eta;K,L]=\widetilde{\Gamma}^{[0]}[A,\eta,\eta,K,L]+\frac{1}{2\alpha}\int\mathrm{d}^4x(F^a)^2(x) \tag{5.190}$$

可以把式(5.188)和(5.189)写成如下的更简单的形式

$$\int \mathrm{d}^4 x\left(\frac{\delta\bar{\Gamma}^{[0]}}{\delta K_\mu^a}\frac{\delta\bar{\Gamma}^{[0]}}{\delta A_\mu^a}+\frac{\delta\bar{\Gamma}^{[0]}}{\delta L^a}\frac{\delta\bar{\Gamma}^{[0]}}{\delta\eta^a}\right)(x)=0 \tag{5.191}$$

$$\partial_\mu \frac{\delta\bar{\Gamma}^{[0]}}{\delta K_\mu^a(x)}=\frac{\delta\bar{\Gamma}^{[0]}}{\delta\bar{\eta}^a(x)} \tag{5.192}$$

式(5.191)和(5.192)就是正规顶角生成泛函的 Ward-Takahashi 恒等式，它们是证明规范场理论的可重整性的基础。

## 5.7 纯规范场理论的重整化

式(5.183)中的正规顶角生成泛函 $\tilde{\Gamma}^{[0]}$ 是按拉氏函数 $\tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{eff}}^{[0]}$ 构造的。它可以按场的幂次展开为

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^{[0]}= & \sum_n\int\frac{\delta^n\tilde{\Gamma}^{[0]}}{\delta A_\mu^{a_1}(x_1)\cdots\delta A_{\mu_n}^{a_n}(x_n)}\bigg|_{A=\eta=\bar{\eta}=0}A_{\mu_1}^{a_1}(x_1)\cdots A_{\mu_n}^{a_n}(x_n)\\ & \times\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n+\sum_n\int\frac{\delta^2}{\delta\bar{\eta}^{b_1}(y_1)\delta\eta^{b_2}(y_2)}\\ & \times\frac{\delta^n}{\delta A_{\mu_1}^{a_1}(x_1)\cdots\delta A_{\mu_n}^{a_n}(x_n)}\tilde{\Gamma}^{[0]}\mid_{A=\eta=\bar{\eta}=0}\bar{\eta}^{b_1}(y_1)\eta^{b_2}(y_2)\\ & \times A_{\mu_1}^{a_1}(x_1)\cdots A_{\mu_n}^{a_n}(x_n)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n+\cdots\end{aligned} \tag{5.193}$$

其中，展开式的系数为在外源 $K,L$ 下的正规顶角。在微扰论中，$(A)^2,(A)^3,(A)^4,\bar{\eta}\eta$ 和 $\bar{\eta}\eta A$ 包含发散。我们用维数正规化使这些顶角有限。这种正规化方法不破坏由 $\mathscr{L}_{\mathrm{YM}}$ 的规范不变性得到的 Ward-Takahashi 恒等式(5.191)和(5.192)。为了消除 $\tilde{\Gamma}^{[0]}$ 或 $\bar{\Gamma}^{[0]}$ 中的紫外发散，需要在拉氏函数中引进抵消项 $\delta\mathscr{L}$。令

$$\tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{eff}}=\tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{eff}}^{[0]}+\delta\mathscr{L}$$

为包含所有抵消项的拉氏函数，$\tilde{\Gamma}$ 为由 $\tilde{\mathscr{L}}_{\mathrm{eff}}$ 构造的重整化不可约顶角生成泛函。抵消项的选择要保证由 $\tilde{\Gamma}$ 产生的所有正规顶角是有限的。重整化规范理论的正规顶角生成泛函为

$$\Gamma=\tilde{\Gamma}\mid_{K=L=0}$$

我们要证明可以选取重整化抵消项使得重整化正规顶角生成泛函 $\bar{\Gamma}=\tilde{\Gamma}+\frac{1}{2\alpha}\int(F^a)^2\mathrm{d}x$ 满足 Ward-Takahashi 恒等式

$$\int \mathrm{d}^4 x\left(\frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta K_\mu^a}\frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta A_\mu^a}+\frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta L^a}\frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta\eta^a}\right)(x)=0 \tag{5.194}$$

$$\partial_\mu \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta K_\mu^a(x)} = \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta \bar{\eta}^a(x)} \tag{5.195}$$

我们将看到，在证明式(5.194)和(5.195)的同时也就证明了重整化的理论具有规范理论的结构。

证明式(5.194)和(5.195)可以用归纳法。令 $\widetilde{\mathscr{L}}_{\text{eff}}^{[L]}$ 为包含直到$(\hbar)^L$ 阶抵消项的拉氏函数。$\widetilde{\Gamma}^{[L]}$ 为由 $\widetilde{\mathscr{L}}_{\text{eff}}^{[L]}$ 构造的正规顶角生成泛函。$\widetilde{\mathscr{L}}_{\text{eff}}^{[L]}$ 的选择保证了由 $\widetilde{\Gamma}^{[L]}$ 产生的所有正规顶角直到 $\hbar^L$ 阶都是有限的

$$\bar{\Gamma} = \lim_{L\to\infty} \bar{\Gamma}^{[L]} = \lim_{L\to\infty} \widetilde{\Gamma}^{[L]} + \frac{1}{2\alpha}\int \mathrm{d}^4 x (F^a)^2$$

由式(5.191)和(5.192)知道，在 $\hbar^0$ 阶式(5.194)和(5.195)是满足的。我们假设 Ward-Takahashi 恒等式

$$\int \mathrm{d}^4 x \left( \frac{\delta \bar{\Gamma}^{[L]}}{\delta K_\mu^a} \frac{\delta \bar{\Gamma}^{[L]}}{\delta A_\mu^a} + \frac{\delta \bar{\Gamma}^{[L]}}{\delta L^a} \frac{\delta \bar{\Gamma}^{[L]}}{\delta \eta^a} \right)(x) = 0 \tag{5.196}$$

$$\partial_\mu \frac{\delta \bar{\Gamma}^{[L]}}{\delta K_\mu^a(x)} = \frac{\delta \bar{\Gamma}^{[L]}}{\delta \bar{\eta}^a(x)} \tag{5.197}$$

在 $L=N$ 时成立，我们要证明可以选择抵消项使它们在 $L=N+1$ 时也成立。

引入记号

$$A * B \equiv \int \mathrm{d}^4 x \left( \frac{\delta A}{\delta K_\mu^a} \frac{\delta B}{\delta K_\mu^a} + \frac{\delta A}{\delta L^a} \frac{\delta B}{\delta \eta^a} \right)(x) \tag{5.198}$$

令 $\bar{\Gamma}_M^{[N]}$ 代表$\bar{\Gamma}^{[N]}$的$(\hbar)^M$ 阶项。按照归纳假设，我们有

$$\sum_M \bar{\Gamma}_M^{[N]} * \bar{\Gamma}_{N-M+1}^{[N]} = 0 \tag{5.199}$$

对 $\bar{\Gamma}^{[N]}$可以作类似于式(5.193)的展开，由它可以分出 $\bar{\Gamma}^{[N]}$的一个发散部分，它是发散的正规顶角的$\frac{1}{\varepsilon}$极点项在展开式中的贡献。按照归纳假设，$\bar{\Gamma}_M^{[N]}$ 在$M\leqslant N$ 时是有限的，式(5.199)中只有 $\bar{\Gamma}_{N+1}^{[N]}$包含 $N+1$ 圈图整体发散，所有子图形的发散都已经抵消了。如果我们把 $\bar{\Gamma}_{N+1}^{[N]}$分解为

$$\bar{\Gamma}_{N+1}^{[N]} = \bar{\Gamma}_{N+1,F}^{[N]} + \bar{\Gamma}_{N+1,\text{div}}^{[N]} \tag{5.200}$$

其中，$\bar{\Gamma}_{N+1,\text{div}}^{[N]}$为发散正规顶角 $N+1$ 圈图的劳仑特展开式中的$\frac{1}{\varepsilon}$极点项在$\bar{\Gamma}^{[N]}$中的贡献，$\bar{\Gamma}_{N+1,F}^{[N]}$是有限的。对于这里所讨论的按数幂次可以重整的理论，由量纲分析可以知道 $\bar{\Gamma}_{N+1,\text{div}}^{[N]}$是场的定域泛函，即同一点的场及其有限阶导数的多项式的积分。由式(5.199)得到

$$\bar{\Gamma}_0 * \bar{\Gamma}_{N+1,\text{div}}^{[N]} + \bar{\Gamma}_{N+1,\text{div}}^{[N]} * \bar{\Gamma}_0 = 0 \tag{5.201}$$

上式中，$\bar{\Gamma}_0 \equiv \bar{\Gamma}_0^{[N]} = \tilde{S}^{[0]} + \frac{1}{2\alpha}(F^a)^2$。由归纳假设还可以得到

$$\partial_\mu \frac{\delta \bar{\Gamma}^{[N]}_{N+1,\mathrm{div}}}{\delta K^a_\mu} = \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}^a} \bar{\Gamma}^{[N]}_{N+1,\mathrm{div}} \tag{5.202}$$

式(5.201)和(5.202)限制了 $N+1$ 圈图整体发散极点项的形式。

我们来求方程(5.201)和(5.202)的解。为此令

$$(b_i) \equiv (A^a_\mu(x), L^a(x)), \qquad (f_i) \equiv (K^a_\mu(x),\ \eta^a(x))$$

$b_i$ 和 $f_i$ 分别为对易和反对易的量，引入记号

$$\hat{g} = \frac{\delta \bar{\Gamma}_0}{\delta b_i} \frac{\delta}{\delta f_i} + \frac{\delta \bar{\Gamma}_0}{\delta f_i} \frac{\delta}{\delta b_i} \tag{5.203}$$

其中，对 $i$ 的求和包括对坐标 $x$ 的积分，则式(5.201)可写为

$$\hat{g}\, \bar{\Gamma}^{[N]}_{N+1,\mathrm{div}} = 0 \tag{5.204}$$

算符 $\hat{g}$ 是幂零的，即

$$\hat{g}^2 = 0 \tag{5.205}$$

上式的证明如下

$$\begin{aligned}
\hat{g}^2 = {} & \frac{\delta}{\delta b_j}\left(\frac{\delta \bar{\Gamma}_0}{\delta b_i} \frac{\delta \bar{\Gamma}_0}{\delta f_i}\right)\frac{\delta}{\delta f_j} - \frac{\delta}{\delta f_j}\left(\frac{\delta \bar{\Gamma}_0}{\delta b_i} \frac{\delta \bar{\Gamma}_0}{\delta f_i}\right)\frac{\delta}{\delta b_j} \\
& + \left[\frac{\delta \bar{\Gamma}_0}{\delta b_i} \frac{\delta \bar{\Gamma}_0}{\delta b_j} \frac{\delta}{\delta f_i} \frac{\delta}{\delta f_j} + \frac{\delta \bar{\Gamma}_0}{\delta f_i} \frac{\delta \bar{\Gamma}_0}{\delta f_j} \frac{\delta}{\delta b_i} \frac{\delta}{\delta b_j}\right. \\
& \left. - \frac{\delta \bar{\Gamma}_0}{\delta b_i} \frac{\delta \bar{\Gamma}_0}{\delta f_j} \frac{\delta}{\delta f_i} \frac{\delta}{\delta b_j} + \frac{\delta \bar{\Gamma}_0}{\delta f_i} \frac{\delta \bar{\Gamma}_0}{\delta b_j} \frac{\delta}{\delta b_i} \frac{\delta}{\delta f_j}\right]
\end{aligned} \tag{5.206}$$

由式(5.178)得到

$$\bar{\Gamma}_0 * \bar{\Gamma}_0 = 0$$

即

$$\frac{\delta \bar{\Gamma}_0}{\delta b_i} \frac{\delta \bar{\Gamma}_0}{\delta f_i} = 0$$

因此式(5.206)右方第一和第二项为零。(5.206)式中方括号内的项由于 $f$ 是反对易的也为零。这样就证明了式(5.205)。

令 $f[A]$ 为只与 $A^a_\mu$ 有关的规范不变的泛函，则由式(5.176)

$$\hat{g}\, f[A] = \int \mathrm{d}^4 x \frac{\delta f}{\delta A^a_\mu(x)} \frac{\delta \bar{\Gamma}_0}{\delta K^a_\mu(x)} = \int \mathrm{d}^4 x \frac{\delta f}{\delta A^a_\mu(x)} (D_\mu)_{ab} \eta^b(x) = 0 \tag{5.207}$$

由式(5.205)和(5.207)知道，形式为

$$\bar{\Gamma}^{[N]}_{N+1,\mathrm{div}} = f[A] + \hat{g} f'[A, \eta, \bar{\eta}, K, L] \tag{5.208}$$

的泛函是式(5.204)的解。在文献[22]中证明了这是式(5.204)最一般的解。方程(5.202)的一般解显然具有如下的形式

$$\bar{\Gamma}^{[N]}_{N+1}[A,\eta,\bar{\eta},K,L]_{\text{div}} = \bar{\Gamma}^{[N]}_{N+1}[A,\eta,0,K^a_\mu+\partial_\mu\bar{\eta}^a,L]_{\text{div}} + \int \mathrm{d}^4 x K^a_\mu T^a_\mu(A,\eta,\bar{\eta},L)(x) \tag{5.209}$$

其中，$T^a_\mu$ 满足$\partial_\mu T^a_\mu=0$。$\bar{\Gamma}^{[N]}_{N+1,\text{div}}$还有一些需要满足的条件。令 $K$ 和 $L$ 的量纲为 $D[K]=D[L]=2$，则 $\tilde{S}$ 的量纲是零，因此 $\bar{\Gamma}^{[N]}_{N+1,\text{div}}$是量纲为零的由有关场量组成的定域泛函

$$D[\bar{\Gamma}^{[N]}_{N+1,\text{div}}] = 0 \tag{5.210}$$

定义虚拟粒子数 $N_g$ 如下

$$N_g[\eta]=1,\quad N_g[\bar{\eta}]=-1,\quad N_g[K]=-1,$$
$$N_g[L]=-2,\quad N_g[A]=0$$

则由虚拟粒子数守恒得到

$$N_g[\bar{\Gamma}] = 0 \tag{5.211}$$

满足这些条件的 $\bar{\Gamma}^{[N]}_{N+1,\text{div}}$的最一般形式为

$$\bar{\Gamma}^{[N]}_{N+1,\text{div}} = \alpha_{N+1}(\varepsilon)S_{\text{YM}}[A] + \hat{g}\int \mathrm{d}^4 x\beta_{N+1}(\varepsilon)(K^a_\mu + \partial_\mu\bar{\eta}^a)A^a_\mu + \gamma_{N+1}(\varepsilon)L^a\eta^a\}(x) \tag{5.212}$$

其中，$\alpha_{N+1}$，$\beta_{N+1}$和 $\gamma_{N+1}$为在 $\varepsilon\to 0$ 时发散的常数，$S_{\text{YM}}[A]$是纯规范场作用量，它是唯一量纲为零的由 $A_\mu$ 的多项式组成的规范不变泛函。式(5.212)可以写为

$$\bar{\Gamma}^{[N]}_{N+1,\text{div}} = \alpha_{N+1}S_{\text{YM}}[A] - \int \mathrm{d}^4 x\Big[\beta_{N+1}(K^a_\mu+\partial_\mu\bar{\eta}^a)(D_\mu)_{ab}\eta^b + \gamma_{N+1}L^a\frac{\delta\bar{\Gamma}_0}{\delta L^a} + \beta_{N+1}\frac{\delta\bar{\Gamma}_0}{\delta A^a_\mu}A^a_\mu + \gamma_{N+1}\frac{\delta\bar{\Gamma}_0}{\delta\eta^a}\eta^a\Big](x) \tag{5.213}$$

在得到式(5.213)的过程中我们没有给出式(5.208)是式(5.204)的一般解的证明。然而也可以不用式(5.208)。首先，写出满足式(5.209)～(5.211)的 $\Gamma^{[N]}_{N+1,\text{div}}$的最一般形式；然后，把这个一般形式代入式(5.204)得出其中待定函数和一些参数之间的关系。这样得到的结果与式(5.213)一样。由于

$$S_{\text{YM}}[A,g] = \frac{1}{g^2}S_{\text{YM}}[gA,1]$$

我们有

$$S_{\text{YM}}[A,g] = \frac{1}{2}A^a_\mu\frac{\delta S_{\text{YM}}}{\delta A^a_\mu} - \frac{1}{2}g\frac{\partial S_{\text{YM}}}{\partial g} \tag{5.214}$$

将式(5.214)代入式(5.213)得到

$$\overline{\Gamma}^{[N]}_{N+1,\mathrm{div}} = \int \mathrm{d}^4 x \left\{ \left(\frac{1}{2}\alpha_{N+1} + \beta_{N+1}\right)\left(A^a_\mu \frac{\delta}{\delta A^a_\mu} + L^a \frac{\delta}{\delta L^a}\right) - \frac{1}{2}(\gamma_{N+1} + \beta_{N+1})\left(\eta^a \frac{\delta}{\delta \eta^a} + \bar{\eta}^a \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}^a} + K^a_\mu \frac{\delta}{\delta K^a_\mu}\right) - \frac{1}{2}\alpha_{N+1} g \frac{\partial}{\partial g}\right\} \overline{\Gamma}_0[A, \eta, \bar{\eta}, K, L, g] \tag{5.215}$$

上式是利用$[L]=[N]$时的 Ward-Takahashi 恒等式得到的 $\overline{\Gamma}^{[N]}_{N+1}$ 的发散部分的一般形式。

选取重整化抵消项使

$$\tilde{S}^{[N+1]} = \int \tilde{\mathscr{L}}^{[N+1]}_{\mathrm{eff}} \mathrm{d}^4 x = \int \tilde{\mathscr{L}}^{[N]}_{\mathrm{eff}} \mathrm{d}^4 x - \overline{\Gamma}^{[N]}_{N+1,\mathrm{div}} + O(\hbar^{N+2}) \tag{5.216}$$

则因

$$\overline{\Gamma}^{[N+1]}_{N+1} = \overline{\Gamma}^{[N]}_{N+1} + \tilde{S}^{[N+1]} - \tilde{S}^{[N]}$$

$\overline{\Gamma}^{[N+1]}_M$ 在$M \leqslant N+1$时为有限。我们取

$$\tilde{S}^{[N+1]}[A, \eta, \bar{\eta}, K, L, g, \alpha] = \tilde{S}^{[0]}[(z_3^{[N+1]})^{1/2} A, (\tilde{z}_3^{[N+1]})^{1/2} \eta, (\tilde{z}_3^{[N+1]})^{1/2} \bar{\eta}, (\tilde{z}_3^{[N+1]})^{1/2} K, (z_3^{[N+1]})^{1/2} L, z_g^{[N+1]} g, z_3^{[N+1]} \alpha] \tag{5.217}$$

其中

$$(z_3^{[N]})^{1/2} = 1 + \sum_{L=1}^{N} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\alpha_L - \beta_L\right)(\varepsilon) = (z_3^{[N-1]})^{1/2} - \left(\frac{1}{2}\alpha_N + \beta_N\right)(\varepsilon)$$

$$(\tilde{z}_3^{[N]})^{1/2} = 1 + \sum_{L=1}^{N} \frac{1}{2}(\gamma_L + \beta_L)(\varepsilon) = (\tilde{z}_3^{[N-1]})^{1/2} + \frac{1}{2}(\gamma_N + \beta_N)(\varepsilon)$$

$$z_g^{[N]} = 1 + \sum_{L=1}^{N} \frac{1}{2}\alpha_L(\varepsilon) = z_g^{[N-1]} + \frac{1}{2}\alpha_N(\varepsilon) \tag{5.218}$$

由于

$$(z_3^{[N]})^{n/2} A^n = (z_3^{[N-1]})^{n/2} A^n - n\left(\frac{1}{2}\alpha_N + \beta_N\right) A^n + O(\hbar^N)$$

$$= (z_3^{[N-1]})^n A^n - \left(\frac{1}{2}\alpha_N + \beta_N\right)\left(A \frac{\delta}{\delta A}\right) A^n + O(\hbar^N)$$

及相应的对于其他场的多项式的等式,式(5.217)显然满足式(5.216)。在式(5.172)和(5.183)中做场的标度变换,我们由式(5.127)得到

$$\overline{\Gamma}^{[N+1]}[A, \eta, \bar{\eta}, K, L, g, \alpha] = \overline{\Gamma}^{[0]}[(z_3^{[N+1]})^{1/2} A, (\tilde{z}_3^{[N+1]})^{1/2} \eta, (\tilde{z}_3^{[N+1]})^{1/2} \bar{\eta}, (\tilde{z}_3^{[N+1]})^{1/2} K, (z_3^{[N+1]})^{1/2} L, z_g^{[N+1]} g, z_3^{[N+1]} \alpha] \tag{5.219}$$

上式表示 $\bar{\Gamma}^{[N+1]}$ 是由 $\bar{\Gamma}^{[0]}$ 做场的标度变换得到的。由 $\bar{\Gamma}^{[0]}$ 满足的 Ward-Takahashi 恒等式(5.191)及(5.192)知道 Ward-Takahashi 恒等式(5.196)和(5.197)在 $L=N+1$ 时成立。在这里,关键的是 $\eta,\bar{\eta}$ 和 $K$ 标度因子一样,$A$ 和 $L$ 的标度因子一样。这样我们就由归纳法证明了式(5.194)和(5.195)。在 $N\to\infty$ 时得到

$$\tilde{S}[A,\eta,\bar{\eta},K,L,g,\alpha]=\tilde{S}^{[0]}[A_0,\ \eta_0,\bar{\eta}_0,K_0,L_0,g_0,\alpha_0] \tag{5.220}$$

其中

$$\begin{gathered}A_0=z_3^{1/2}A,\quad \eta_0=\tilde{z}_3^{1/2}\eta,\quad \bar{\eta}_0=\tilde{z}_3^{1/2}\bar{\eta},\quad K_0=\tilde{z}_3^{1/2}K\\ L_0=z_3^{1/2}L,\quad g_0=z_g g,\quad \alpha_0=z_3\alpha\\ z_3=z_3^{[\infty]},\quad \tilde{z}_3=\tilde{z}_3^{[\infty]},\quad z_g=z_g^{[\infty]}\end{gathered} \tag{5.221}$$

$$\bar{\Gamma}[A,\eta,\bar{\eta},K,L,g,\alpha]=\bar{\Gamma}^{[0]}[z_3^{1/2}A,\tilde{z}_3^{1/2}\eta,\tilde{z}_3^{1/2}\bar{\eta},\tilde{z}_3^{1/2}K,z_3^{1/2}L,z_g g,z_3\alpha] \tag{5.222}$$

最后,我们当然可以在式(5.220)和(5.222)中令作为证明的辅助工具的 $K,L$ 等于零。以上我们证明了所有紫外发散可以用场及耦合常数的标度变换消去,因此经过重整化的理论保持了规范理论的形式。用5.1节中的符号,式(5.220)满足关系式

$$z_1/z_3=\tilde{z}_1/\tilde{z}_3=z_4/z_1$$

注意,$\tilde{S}$ 中的规范场 $A_\mu$ 部分为

$$S_{\mathrm{YM}}[z_3^{1/2}A,z_g g] \tag{5.223}$$

上式在规范变换

$$\delta A_\mu^a=(-\delta_{ab}\partial_\mu-g z_g z_3^{1/2}f_{abc}A_\mu^b)\delta\theta^c \tag{5.224}$$

下不变。因此重整化的理论和未重整化的理论虽然各自都是规范理论的形式,它们的规范变换是不同的。而抵消项对其中任何一个规范变换都不是规范理论的形式。

注意,这里所用的重整化步骤与5.3节中所叙述的步骤有一些微小的修改。按照那里叙述的规则,式(5.216)右方的 $O(\hbar^{N+2})$ 阶项应取为零。这样的修改是必要的,因为如果不用式(5.217)中由场的标度变换得到的拉氏函数,则不能保证 Ward-Takahashi 恒等式到 $N+1$ 阶成立。但是这样修改了的最小减除规则实际上与5.3节中所叙述的规则给出同样的结果。因为在 $\hbar^L$ 阶中这两种规则中引入的抵消项只差高阶极点项,因此它们给出同样的 $\hbar^L$ 阶重整化正规顶角,两者相差的 $\hbar^{L+1}$ 阶极点项在考虑高一阶时被消去了。

如果我们在由式(5.218)表示的重整化常数 $z_3,\tilde{z}_3$ 和 $z_g$ 中各自加上一个有限项,则显然以上关于已重整化的理论满足 Ward-Takahashi 恒等式的证明仍然成立。因此我们也可以用其他的减除规则,例如在欧氏点做减除的规则。在用其他

减除规则时重要的一点是正规顶角在减除点的归一化规则要与 Ward-Takahashi 恒等式一致。

作为 Ward-Takahashi 恒等式的应用的例子，我们把式(5.194)用于规范粒子两点正规顶角。把 $\bar{\Gamma}$ 按带虚拟粒子数 $N_g$ 的场展开如下

$$\bar{\Gamma}[A,\eta,\bar{\eta},K,L] = \bar{\Gamma}[A] + \iint \bar{\eta}^a(x)\Gamma_{ab}[A,x,y]\eta^b(y) \times \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y + \int K_\mu^a(x)\Gamma_{\mu ab}[A,x,y]\eta^b(y)\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y + \cdots \tag{5.225}$$

将上式代入式(5.194)，然后对 $\eta$ 微分，再令所有带虚拟粒子数的场都为零，可以得到

$$\int \Gamma_{\mu ab}[A,x,y]\frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta A_\mu^a(x)}\mathrm{d}^4x = 0 \tag{5.226}$$

将上式对 $A$ 微分并利用

$$\left.\frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta A_\mu^a}\right|_{A=0} = 0$$

得到

$$\left.\int \Gamma_{\mu ab}[A,x,y]\frac{\delta^2\bar{\Gamma}[A]}{\delta A_\mu^a(x)\delta A_\nu^c(z)}\mathrm{d}^4x\right|_{A=0} = 0$$

将上式中的 $\Gamma_{\mu ab}\Big|_{A=0}$ 及 $\left.\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A_\mu^a\delta A_\nu^c}\right|_{A=0}$ 分别对 $y-x$ 及 $x-z$ 做傅氏变换，得到

$$k_\mu\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{bc}(k) = 0 \tag{5.227}$$

其中，$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{bc}(k)$ 是

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{bc}(k) = \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\left.\frac{\delta^2\bar{\Gamma}[A]}{\delta A_\mu^b\left(\frac{x}{2}\right)\delta A_\nu^c\left(-\frac{x}{2}\right)}\right|_{A=0}\mathrm{d}^4x$$

我们有

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{bc}(k) = \Gamma_{\mu\nu}^{bc}(k) - \frac{1}{\alpha}k_\mu k_\nu$$

其中，$\Gamma_{\mu\nu}^{bc}(k)$ 为规范场两点正规顶角(即传播子)的逆

$$\Gamma_{\mu\nu}^{bc}(k) = \delta_{bc}\Delta'^{-1}_{F_{\mu\nu}}(k)$$

式(5.227)表示

$$k_\mu\Delta'^{-1}_{F_{\mu\nu}}(k) = \frac{k_\nu}{\alpha}k^2$$

因此 $\Delta'^{-1}_{F_{\mu\nu}}$ 有如下的形式

$$(\Delta'^{-1}_F)_{\mu\nu}(k) = (\delta_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu)\frac{1}{F(k^2)} + \frac{1}{\alpha}k_\mu k_\nu$$

上式意味着规范场传播子有如下的形式

$$\Delta'_{F_{\mu\nu}} = \frac{\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu/k^2}{k^2}F(k^2) + \alpha\frac{k_\mu k_\nu}{(k^2)^2} \tag{5.228}$$

式(5.228)对微扰论任意阶都成立,它表示传播子的纵向部分没有圈图修正。

## 5.8 包含标量粒子的规范理论的重整化

包含标量场在内的规范理论的拉氏函数有如下的形式

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\mathrm{YM}}(A) + \mathscr{L}_s(\varphi, A) + \text{抵消项} \tag{5.229}$$

$$\mathscr{L}_s(\varphi, A) = -\frac{1}{2}\{(D_\mu)_{\alpha\beta}\varphi^\beta\}^2 - V(\varphi) \tag{5.230}$$

为了简单,假设规范群 $G$ 是单纯群,标量场 $\varphi^\alpha$ 属于群 $G$ 的一个不可约表示,式(5.230)中的协变微分$(D_\mu)_{\alpha\beta}$是

$$(D_\mu)_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\partial_\mu - \mathrm{i}gt^a_{\alpha\beta}A^a_\mu \tag{5.231}$$

其中,$t^a_{\alpha\beta}$是群 $G$ 的生成元在标量场 $\varphi^\alpha$ 所属的表示中的矩阵表示。对一般的线性协变规范,规范固定项可以写为

$$\frac{1}{2\alpha}(F^a(A,\varphi))^2 = \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^a_\mu + f_{a\alpha}\varphi^\alpha)^2 \tag{5.232}$$

这时有效拉氏量为

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}} = \mathscr{L}_{\mathrm{YM}}(A) + \mathscr{L}_s(\varphi, A) - \frac{1}{2\alpha}(F^a(A,\ \varphi))^2 + \bar{\eta}^a M_{ab}(A,\varphi)\eta^b + \text{抵消项} \tag{5.233}$$

其中

$$M_{ab} = \frac{\partial F^a}{\partial A^c_\mu}(D_\mu)_{cb} + \frac{\partial F^a}{\partial \varphi^\alpha}(-\mathrm{i})gt^b_{\alpha\beta}\varphi^\beta \tag{5.234}$$

这里需要区分两种情况。第一种情况是没有自发破缺的理论。这时矩阵

$$\left.\frac{\partial^2 V(\varphi)}{\partial\varphi^\alpha\partial\varphi^\beta}\right|_{\varphi=0} \equiv (m_s^2)_{\alpha\beta} \tag{5.235}$$

是正定的,它是标量粒子的重整化质量矩阵。$(m_s^2)_{\alpha\beta}$满足群 $G$ 的对称性,当 $\varphi^\alpha$ 属于一个不可约表示时,它正比于单位矩阵

$$(m_s^2)_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}m_s^2, \qquad m_s^2 > 0$$

对这种情况最方便的规范条件是取 $f_{a\alpha} = 0$。因为式(5.232)中的 $f_{a\alpha}$ 项在式

(5.233)中产生 $\varphi\partial_\mu A_\mu$ 耦合,产生不必要的麻烦。然而为了以后的用处,我们将把 $f_{a\alpha}$ 项保留下来。第二种情况是自发破缺的理论,这时矩阵式(5.235)的本征值是负的。

我们首先讨论这一种情况。证明这种理论的可重整性的步骤与纯规范场的情况是类似的,因此我们只是写出略有修改的主要公式而不做详细推导。有效拉氏函数式(5.233)在一个 BRS 变换下不变,在这里的 BRS 变换中,除 $A$, $\eta$ 和 $\bar{\eta}$ 按式(5.153)变换外,标量场也做参数为 $\eta^a\delta\lambda$ 的规范变换

$$\delta\varphi^\alpha = -\mathrm{i}gt^a_{\alpha\beta}\varphi^\beta\eta^a\delta\lambda \tag{5.236}$$

它也是幂零的,即

$$\delta^2\varphi^\alpha = 0 \tag{5.237}$$

引进与复合算符$\frac{\delta\varphi^\alpha}{\delta\lambda} = -\mathrm{i}gt^a_{\alpha\beta}\varphi^\beta\eta^a$ 耦合的外源项 $-\mathrm{i}gK^\alpha t^a_{\alpha\beta}\varphi^\beta\eta^a$,由有效拉氏函数

$$\widetilde{\mathscr{L}}_{\text{eff}} = \mathscr{L}_{\text{eff}} + K^a_\mu(D_\mu)_{ab}\eta^b - \mathrm{i}gK^\alpha t^a_{\alpha\beta}\varphi^\beta\eta^a - \frac{g}{2}f_{abc}L^a\eta^b\eta^c \tag{5.238}$$

构造正规顶角生成泛函

$$\widetilde{\Gamma}[\varphi, A, \eta, \bar{\eta}, K^a, K^\alpha, L] \equiv \bar{\Gamma}[\varphi, A, \eta, \bar{\eta}, K^a, K^\alpha, L] - \frac{1}{2\alpha}(F^a)^2$$

可以用归纳法证明它满足 Ward-Takahashi 恒等式

$$\int \mathrm{d}^4x\left(\frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta K^a_\mu}\frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta A^a_\mu} + \frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta K^\alpha}\frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta\varphi^\alpha} + \frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta L^a}\frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta\eta^a}\right)(x) = 0 \tag{5.239}$$

$$\left\{\partial_\mu\frac{\delta}{\delta K^a_\mu(x)} + f_{a\alpha}\frac{\delta}{\delta K^\alpha(x)} - \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}^a(x)}\right\}\bar{\Gamma} = 0 \tag{5.240}$$

证明式(5.239)和(5.240)的方法是,由 Ward-Takahashi 恒等式逐阶决定 $\bar{\Gamma}^{[N]}_{N+1,\text{div}}$的形式,它满足方程

$$\hat{g}\bar{\Gamma}^{[N]}_{N+1,\text{div}} = 0 \tag{5.241}$$

其中,$\hat{g}$仍可写为式(5.203),但现在 $b_i = (A^a_\mu(x), \varphi^\alpha(x), L^a(x))$, $f_i = (K^a_\mu(x), K^\alpha(x), \eta^a(x))$。式(5.241)的解一般有如下的形式

$$\bar{\Gamma}^{[N]}_{N+1,\text{div}} = f[A,\varphi] + \hat{g}f'[A,\varphi,\eta,\bar{\eta},K,L] \tag{5.242}$$

其中,$f[A,\varphi]$是规范不变的,因此 $f$ 的普遍形式是

$$\begin{aligned} f[A,\varphi] = {} & \alpha_{N+1}(\varepsilon)S_{\text{YM}}[A] \\ & + \int \mathrm{d}^4x\left[\alpha'_{N+1}(\varepsilon)\left(-\frac{1}{2}\right)(D_\mu\varphi^\alpha)^2 - V'(\varphi)\right] \end{aligned} \tag{5.243}$$

$V'$是一个在群$G$ 下不变的四次多项式,它可以用 $V$ 中的耦合常数$\lambda$ 和$\varphi$ 场质量

的抵消项消去。虽然规范条件中的 $f_{aa}$ 项破坏群 $G$ 的整体对称性，这个抵消项仍然可以保持在群 $G$ 下不变。利用式(5.240)并考虑到 $\bar{\Gamma}$ 的量纲和虚拟粒子数 $N_g$（记住 $f_{aa}$ 的量纲是 1），可以得到 $f'$ 的一般形式

$$f' = \int \{ \beta_{N+1}(\varepsilon)(K_\mu^a + \partial_\mu \bar{\eta}^a) A_\mu^a + \beta'_{N+1}(\varepsilon)(K^\alpha + f_{a\alpha}\bar{\eta}^a)\varphi^\alpha + \gamma_{N+1}(\varepsilon) L^a \eta^a + \delta_{N+1}(\varepsilon)(K^\alpha + f_{a\alpha}\bar{\eta}^a) d^b_{\alpha\beta} f_{b\beta} \}(x) \mathrm{d}^4 x \quad (5.244)$$

其中，$d^b_{\alpha\beta}$是群 $G$ 的广义 Clebsch-Gordan 系数。例如，在 $G = \mathrm{SU}(3)$ 而 $\varphi$ 属于正则表示的情况 $d^b_{\alpha\beta}$ 可以是结构常数 $f_{abc}$，也可以是全对称的系数 $d_{abc}$。这里有一点需要说明，在式(5.244)中系数 $\beta_{N+1}$，$\beta'_{N+1}$，$\gamma_{N+1}$ 及 $\delta_{N+1}$ 与 $f_{a\alpha}$ 无关。由于规范条件中的 $f_{a\alpha}$ 项这一点似乎可能不成立，然而这四个系数都是无量纲的，它们都是对数发散积分的发散项，因此量纲为 1 的因子 $f_{a\alpha}$ 不能进入这些系数的表示式中，它们不受 $f_{a\alpha}$ 项的影响。这样得到

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}^{[N]}_{N+1,\mathrm{div}} = \int \mathrm{d}^4 x \Big\{ & \left(\frac{1}{2}\alpha_{N+1} + \beta_{N+1}\right)\left(A_\mu^a \frac{\delta}{\delta A_\mu^a} + L^a \frac{\delta}{\delta L^a}\right) \\
& - \frac{1}{2}(\beta_{N+1} + \gamma_{N+1})\left(K_\mu^a \frac{\delta}{\delta K_\mu^a} + \eta^a \frac{\delta}{\delta \eta^a} + \bar{\eta}^a \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}^a}\right) \\
& - \frac{1}{2}\alpha_{N+1} g \frac{\partial}{\partial g} + \Big[\frac{1}{2}\alpha_{N+1} + \beta_{N+1} - \Big(\frac{1}{2}\alpha'_{N+1} \\
& + \beta'_{N+1}\Big) - \left(\frac{1}{2}\beta_{N+1} + \gamma_{N+1}\right)\Big] K^\alpha \frac{\partial}{\partial K^\alpha} \\
& + \left(\frac{1}{2}\alpha'_{N+1} + \beta'_{N+1}\right)\varphi^\alpha \frac{\delta}{\delta \varphi^\alpha} - v^\alpha_{f,N+1} \frac{\delta}{\delta \varphi^\alpha} \\
& + \left[\left(\frac{1}{2}\alpha_{N+1} + \beta_{N+1}\right) - \left(\frac{1}{2}\alpha'_{N+1} + \beta'_{N+1}\right)\right] \\
& \times f_{a\alpha} \frac{\partial}{\partial f_{a\alpha}} \Big\} \bar{\Gamma}^{[0]} + V'
\end{aligned} \quad (5.245)$$

其中

$$v^\alpha_{f,N+1}(\varepsilon) = -\delta_{N+1}(\varepsilon) d^\alpha_{\alpha\beta} f_{a\beta} \quad (5.246)$$

式(5.245)中的发散项可以用场和耦合常数的标度变换及 $\varphi$ 场的平移消去，得到

$$\begin{aligned}
& \bar{\Gamma}[A, \varphi, \eta, \bar{\eta}, K_\mu^a, K^\alpha, L, g, \alpha, f_{a\alpha}, \lambda, m_s^2] \\
& = \bar{\Gamma}^{[0]}\Big[ z_3^{1/2} A, z_s^{1/2}(\varphi + \delta v_f), \tilde{z}_3^{1/2}\eta, \tilde{z}_3^{1/2}\bar{\eta}, \tilde{z}_3^{1/2} K_\mu^a, \left(\frac{\tilde{z}_3 z_3}{z_s}\right)^{1/2} K^\alpha,
\end{aligned}$$

$$z_3^{1/2} L, z_g g, z_3 \alpha, \left(\frac{z_3}{z_s}\right)^{1/2} f_{a\alpha}, z_\lambda \lambda, m_s^2 + \delta m_s^2\Big] \tag{5.247}$$

其中，$z_3$，$\tilde{z}_3$ 和 $z_g$ 的表示式与式(5.218)相同

$$z_s^{1/2} = 1 - \sum_{L=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\alpha'_L + \beta'_L\right)$$

$$\delta v_f^a = \sum_{L=1}^{\infty} v_{f,L}^a \tag{5.248}$$

式(5.247)满足 Ward-Takahashi 恒等式(5.239)和(5.240)。生成泛函式(5.247)可以用如下的方法得到。取有效拉氏函数

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}(A, \varphi, \eta, \bar{\eta}, g, \alpha, f_{a\alpha}, \lambda, m_s^2) = \mathscr{L}_{\text{eff}}^{[0]}\Big(z_3^{1/2} A, z_s^{1/2}\varphi,$$

$$\tilde{z}_3^{1/2}\eta, \tilde{z}_3^{1/2}\bar{\eta}, z_g g, z_3\alpha, \left(\frac{z_3}{z_s}\right)^{1/2} f_{a\alpha}, z_\lambda\lambda, m_s^2 + \delta m_s^2\Big) \tag{5.249}$$

注意，在上式中，没有做 $\varphi$ 场的平移。式(5.249)具有规范理论的结构。由它构造出生成泛函 $\bar{\Gamma}$，再在 $\bar{\Gamma}$ 中做 $\varphi$ 场的平移，即得到式(5.247)。这里值得注意的是，由于有效拉氏量中有$\partial_\mu A_\mu^a f_{a\alpha}\varphi^\alpha$ 项，标量场可以在圈图中得到与规范有关的无穷大的真空平均值式(5.246)，它在式(5.247)中被用场的平移抵消，不破坏理论的可重整性。

现在我们来讨论自发破缺规范理论的重整化。设 $\varphi^\alpha = v_0^\alpha$ 是 $v(\varphi)$的极小，即

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \varphi^\alpha}\right|_{\varphi^\alpha = v_0^\alpha} = 0 \tag{5.250}$$

并且

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^\alpha \partial \varphi^\beta}\right|_{\varphi^\alpha = v_0^\alpha} = (m^2)_{\alpha\beta} \tag{5.251}$$

是半正定矩阵。做场的平移变换

$$\varphi^\alpha = \varphi'^\alpha + v^\alpha = \varphi'^\alpha + v_0^\alpha + \delta v^\alpha \tag{5.252}$$

其中，$v^\alpha$ 由 $\varphi'^\alpha$的真空平均值为零的要求

$$\langle \varphi'^\alpha \rangle_0 = 0 \tag{5.253}$$

决定，$\delta v^\alpha$ 是圈图的贡献。如第二章中已说明的，一个方便的规范条件是，取

$$F^a = \partial_\mu A_\mu^a + f_{a\alpha}\varphi'^\alpha$$

而 $f_{a\alpha}$ 取为

$$f_{a\alpha} = \alpha g t_{\alpha\beta}^a v^\beta \tag{5.254}$$

这时由有效作用量中规范固定项产生的 $\varphi'\partial_\mu A_\mu$ 耦合项与由 $1/2(D_\mu\varphi^\alpha)^2$ 项做平移

式(5.252)产生的 $\varphi'\partial_\mu A_\mu$ 耦合项互相抵消，$\mathscr{L}_{\text{eff}}$中场的二次项有如下的形式

$$\int \mathrm{d}^4 x\left\{-\frac{1}{2}A_\mu^a(x)\left[\left(-\delta_{\mu\nu}\Box+\partial_\mu\partial_\nu\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\right)\delta_{ab}\right.\right.$$
$$\left.+\delta_{\mu\nu}\mu_{ab}^2\right]A_\nu^b(x)-\frac{1}{2}\varphi'^\alpha[-\delta_{\alpha\beta}\Box+m_{\alpha\beta}^2+\alpha l_\alpha^a l_\beta^a]\varphi'^\beta$$
$$\left.-\bar{\eta}^a(-\delta_{ab}\Box+\alpha\mu_{ab}^2)\eta^b\right\}+\text{抵消项} \tag{5.255}$$

其中

$$l_\alpha^a\equiv g t_{\alpha\beta}^a v^\beta,\ \mu_{ab}^2\equiv l_\alpha^a l_\alpha^b \tag{5.256}$$

是规范粒子的质量矩阵。由式(5.255)可推导出场的传播子，其中规范场的传播子为

$$\tilde{\Delta}_{F_{\mu\nu}}(k,\alpha)_{ab}=\left(\delta_{\mu\nu}-(1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2+\alpha\mu^2-\mathrm{i}\varepsilon}\right)_{ac}\cdot\left(\frac{1}{k^2+\mu^2-\mathrm{i}\varepsilon}\right)_{cb} \tag{5.257}$$

虚拟粒子传播子为

$$\tilde{\Delta}_F(k^2,\alpha)_{ab}=\left(\frac{1}{k^2+\alpha\mu^2-\mathrm{i}\varepsilon}\right)_{ab} \tag{5.258}$$

按照第二章式(2.124)前后的讨论，分量为 $l_\alpha^a$ 的矢量簇 $l^a(a=1,\cdots,r_G)$在标量场 $\varphi^\alpha(\alpha=1,\cdots,N)$的 $N$ 维内部空间中张成$r_G-r_H$ 维的 Goldstone 粒子的子空间，其中 $r_G$ 和$r_H$ 分别为规范群$G$ 和未破缺的子群$H$ 的维数。引入到此子空间的投影算符

$$P_{\alpha\beta}=l_\alpha^a\left(\frac{1}{\mu^2}\right)_{ab}l_\beta^b \tag{5.259}$$

对与所有的 $l^a$ 正交的$\varphi$ 场$P_{\alpha\beta}\varphi_\beta=0, P_{\alpha\beta}l_\beta^a=l_\alpha^a, P_{\alpha\gamma}P_{\gamma\beta}=P_{\alpha\beta}$。位势 $V$ 在群$G$ 下的不变性可表示为

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi^\alpha}t_{\alpha\beta}^a\varphi_\beta=0$$

微分上式得到

$$m_{\alpha\gamma}^2 t_{\gamma\beta}^a v_\beta=0$$

由上式和式(5.259)得到

$$m_{\alpha\gamma}^2 P_{\gamma\beta}=0 \tag{5.260}$$

在式(5.255)中令 $\varphi'=[(1-P)+P]\varphi'$，并利用式(5.260)可将其中 $\varphi'$场的动能项写为

$$-\frac{1}{2}\varphi'^{\alpha}[(1-P)_{\alpha\gamma}(-\delta_{\gamma\beta}\Box+m^2_{\gamma\beta})+(P)_{\alpha\gamma}(-\delta_{\gamma\beta}\Box+\alpha l^a_\gamma l^a_\beta)]\varphi'^{\beta}$$

上式中的两项分别为物理标量粒子和 Goldstone 粒子的动能项。把 $l^a_\alpha l^a_\beta$ 写为 $l^a_\alpha\left(\frac{1}{\mu^2}\right)_{ab}\mu^2_{bc}l^c_\beta$，由上式可得 $\varphi'$场的传播子

$$\tilde{\Delta}_F(k^2,\alpha)_{\alpha\beta}=(1-P)_{\alpha\gamma}\left(\frac{1}{k^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}\right)_{\gamma\beta}+l^a_\alpha\left(\frac{1}{\mu^2}\right)_{ab}\left(\frac{1}{k^2+\alpha\mu^2-\mathrm{i}\varepsilon}\right)_{bc}l^c_\beta \tag{5.261}$$

在把质量矩阵 $\mu^2$ 对角化以后，以上公式可以化简。式(5.257)可写为

$$\delta_{ab}\left[\delta_{\mu\nu}-(1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2+\alpha\mu_a^2-\mathrm{i}\varepsilon}\right]\left(\frac{1}{k^2+\mu_a^2-\mathrm{i}\varepsilon}\right) \tag{5.257'}$$

上式中，$\mu_a^2$ 为第 $a$ 个本征值，$\mu_a^2=0$ 的项为未破缺的子群的规范场的传播子。对 $\mu_a^2\neq 0$ 的项，在质壳 $k^2=-\mu_a^2$ 附近，相应的规范场的传播子趋于有质量矢量场传播子的标准形式 $\left(\delta_{\mu\nu}+\frac{k_\mu k_\nu}{\mu_a^2}\right)\frac{1}{k^2+\mu_a^2-\mathrm{i}\varepsilon}$，离开质壳则与规范参数 $\alpha$ 有关。虚拟粒子传播子式(5.258)可写为

$$\tilde{\Delta}_F(k^2,\alpha)_{ab}=\delta_{ab}\frac{1}{k^2+\alpha\mu_a^2-\mathrm{i}\varepsilon} \tag{5.258'}$$

而式(5.261)中物理标量场和 Goldstone 粒子的传播子可写为

$$\tilde{\Delta}_F(k^2,\alpha)_{\alpha\beta}=(1-P)_{\alpha\gamma}\left(\frac{1}{k^2+m^2-\mathrm{i}\varepsilon}\right)_{\gamma\beta}+\sum_a(P_a)_{\alpha\beta}\left(\frac{1}{k^2+\alpha\mu_a^2-\mathrm{i}\varepsilon}\right) \tag{5.261'}$$

上式中，$(P_a)_{\alpha\beta}=\frac{l^a_\alpha l^a_\beta}{\mu_a^2}$，对 $a$ 不求和。由于 $\mu^2$ 对角化以后 $l^a_\alpha l^b_\alpha=0(a\neq b)$，$P_a$ 是投影算符，$P=\sum_a P_a$。

拉氏函数中除含有通常的规范作用及 $\lambda(\varphi')^4$ 项以外还含有

$$v(\varphi')^3,\qquad v\varphi'(A)^2,\qquad f_{a\alpha}\varphi'\bar{\eta}\eta \tag{5.262}$$

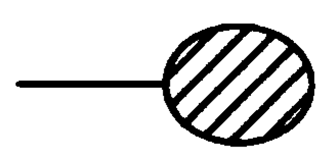


图 5.19

顶点。这种顶点在圈图(图 5.19 中的蝌蚪图)中产生 $\varphi'$场的无穷大真空平均值，需要用式(5.252)中场的平移 $\delta v^a$ 抵消。

传播子式(5.257)、(5.258)和(5.259)在 $k$ 大时都有 $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$的行为，$\varphi$ 场平移后多出来的相互作用顶点式(5.262)也属于可重整的类型，因此在取规范条件式(5.254)时，自发破缺规范理论按数幂次是可以重整的。然而，如果这

里的做法在物理上是合理的，$S$ 矩阵必须有规范不变性。另一方面，传播子式(5.257)、(5.258)和(5.259)中的极点 $k^2=-\alpha\mu^2$ 不相应于物理粒子的质量，如果它表现为 $S$ 矩阵的奇点，则将破坏理论的幺正性。因此由规范条件式(5.254)得到的理论形式不是明显幺正的。要求这些极点对 $S$ 矩阵没有贡献，也要求 $S$ 矩阵与规范参数 $\alpha$ 无关。在 5.9 节中我们将看到，$S$ 矩阵的规范不变性的证明需要包含重整化抵消项的拉氏函数式(5.229)具有规范不变性。现在我们来证明这一点是可以做到的。

为了证明自发破缺规范理论的可重整性，我们首先考虑一个用来作比较的特殊的规范对称性明显破缺的理论，其中拉氏函数取为

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_{\text{sym}}+c^{a}\varphi^{a} \tag{5.263}$$

这里，$\mathscr{L}_{\text{sym}}$是对称理论的拉氏函数式(5.229)，其中由式(5.235)定义的质量矩阵 $m_s^2$ 是正定的，$c^a$ 是常数。式(5.263)中的 $c^a\varphi^a$ 项是常数外源项的形式，它的引入使 $\varphi^a$ 场得到真空平均值，把 $c^a$ 及 $\varphi^a$ 的真空平均值 $v^a$ 按 $\hbar$ 的幂次展开为

$$c^{a}=\sum_{L}c_{L}^{a},\qquad v^{a}=\sum_{L}v_{L}^{a}$$

在树图一级，真空平均值 $v_0^a$ 由方程

$$\left.\frac{\partial V}{\partial\varphi^{a}}\right|_{\varphi^{a}=v_{0}^{a}}=c_{0}^{a} \tag{5.264}$$

决定。这个理论的 Green 函数可以由对称理论的生成泛函产生。由式(5.263)构造的生成泛函为

$$\begin{aligned}\exp\mathrm{i}Z[J]=\int\mathscr{D}[A,\varphi,\eta,\bar{\eta}]\exp\mathrm{i}\int\mathrm{d}^{4}x\{\mathscr{L}_{\text{eff}}+J_{\mu}^{a}A_{\mu}^{a}\\+(J^{a}+c^{a})\varphi^{a}\}=\exp\mathrm{i}Z[J+c]_{\text{sym}}\end{aligned} \tag{5.265}$$

其中，$\mathscr{L}_{\text{eff}}$由式(5.233)表示，$Z[J]_{\text{sym}}$是对称理论的生成泛函。因此

$$\frac{1}{\mathrm{i}^{n-1}}\left.\frac{\delta^{n}Z_{\text{sym}}[J]}{\delta J^{a_{1}}\delta J^{a_{2}}\cdots}\right|_{J^{a}=c^{a},J_{\mu}^{a}=0} \tag{5.266}$$

就是由拉氏函数式(5.263)描述的理论的联通 Green 函数。特别是

$$\left.\frac{\delta Z_{\text{sym}}[J]}{\delta J_{a}(x)}\right|_{J^{a}=c^{a},\,J_{\mu}^{a}=0}=v^{a}$$

是真空平均值。我们可以挑选 $c_L^a$ 的高阶项使 $v^a=v_0^a$。

由 Legendre 变换关系式

$$\Gamma=Z-\int\mathrm{d}^{4}x(J^{a}\varphi^{a}+J_{\mu}^{a}A_{\mu}^{a})$$

$$\frac{\delta Z}{\delta J^{a}(x)} = \varphi^{a}(x), \qquad \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi^{a}(x)} = -J^{a}(x)$$

得到

$$\left.\frac{\delta \Gamma_{\text{sym}}}{\delta \varphi^{a}(x)}\right|_{\varphi=v,A=0} = -c^{a} \tag{5.267}$$

上式的树图近似就是式(5.264)。和对通常 $J=0$ 时 $\varphi=0$ 的情况所做的推导相似,在 $J=c,\varphi=v$ 处取 Legendre 变换式的逐级泛函微商可推导出

$$\left.\frac{\delta^{n}\Gamma[A,\varphi]}{\delta\varphi^{a_1}(x_1)\delta\varphi^{a_2}(x_2)\cdots}\right|_{\varphi=v,A=0} = \Gamma^{(n)}_{a_1a_2\cdots}(x_1,x_2,\cdots,x_n;v) \tag{5.268}$$

其中,$\Gamma_{a_1a_2\cdots}(x_1,x_2,\cdots;v)$是理论式(5.263)的 $n$ 点正规顶角。由式(5.268),用省略的记号表示,我们有公式

$$\Gamma[A,\varphi]_{\text{sym}} = \sum_{n}\frac{1}{n!}(\varphi-v)^{a_1}\cdots(\varphi-v)^{a_n}\Gamma^{(n)}_{a_1\cdots a_n}(v) + \text{含 } A \text{ 项} \tag{5.269}$$

上式中对指标求和包括对相应的坐标积分。类似于通常的微分关系式

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{n} f(x)\Big|_{x=x_0} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}x_0^{m}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{n+m}\cdot f(x)\Big|_{x=0}$$

我们有

$$\Gamma^{(n)}_{a_1\cdots a_n}(v) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}v^{a_1}\cdots v^{a_m}\Gamma^{(n+m)}_{a_1\cdots a_n\cdots a_{n+m}}(v=0) \tag{5.270}$$

上式中,$\Gamma^{(n+m)}(v=0)$是对称理论的正规顶角。公式(5.270)把理论式(5.263)中的正规顶角用对称理论的正规顶角表示。

由式(5.270)知道,如果我们选择 $c_L^{a}$ 使 $v^{a}=v_0^{a}$ 有限并选择 $\mathscr{L}_{\text{sym}}$中的重整化抵消项使对称理论的所有正规顶角有限,则同样的抵消项也使理论式(5.263)的所有正规顶角有限。根据前面在讨论对称理论时得到的结构,我们可以由式(5.247)中的正规顶角生成泛函出发,把它在 $\varphi^{a}=v^{a},A_{\mu}^{a}=\eta^{a}=\bar{\eta}^{a}=\cdots=0$ 处作泛函微商就得到理论式(5.263)的有限的重整化正规顶角。

由拉氏函数式(5.263)描述的明显破缺的规范理论与自发破缺的规范理论非常相似。令两个拉氏函数的差别只存在于标量场的二次项和一次项中。我们选取式(5.263)中的 $c^{a}$ 使得真空平均值 $v^{a}(c)$与自发破缺理论中的真空平均值 $v^{a}$ 相等。因此在做场的平移 $\varphi^{a}=\varphi'^{a}+v^{a}$ 后,两个理论的相互作用顶点仍是完全一样的。在式(5.263)中做场的平移,场的二次项可以写成与式(5.255)非常相似的形式。由式(5.254)和(5.256)知道,矩阵 $\mu_{ab}^{2}$ 及 $l_{\alpha}^{a}$ 在两个理论中是一样的。唯一的差别是两个理论中的 $m^{2}$ 值不一样。因此理论式(5.263)中的传播子可以由在式

(5.257)～(5.259)中把 $m^2$ 换为 $m'^2$ 而得到。把这个理论中的传播子写为 $\tilde{\Delta}^c_{F\mu\nu}$，$\tilde{\Delta}^c_{F\alpha\beta}$和 $\tilde{\Delta}^c_{Fab}$，则在 $v^\alpha(c)=v^\alpha$ 的条件下，我们有

$$\tilde{\Delta}^c_{F\mu\nu} = \tilde{\Delta}_{F\mu\nu}, \quad \tilde{\Delta}^c_{Fab} = \tilde{\Delta}_{Fab} \tag{5.271}$$

上式中 $\tilde{\Delta}^c_{F\mu\nu}$，$\tilde{\Delta}_{Fab}$ 由式(5.257)，(5.258)表示。我们不妨设两个理论的位势只相差一个$\frac{1}{2}a^2(\varphi^\alpha)^2$ 项，即 $m'^2-m^2=a^2$ 正比于单位矩阵。这是因为 $m'^2-m^2$ 来自两个理论中 $V(\varphi)$的二次项，在式(5.263)中这项是正定的，而在自发破缺理论中这项有负本征值，两者都在对称群下不变。这时在考虑到式(5.260)后可以得到

$$\tilde{\Delta}^c_{F\alpha\beta} = \tilde{\Delta}_{F\alpha\beta} + a^2\left[\frac{1}{(k^2+m^2)(k^2+m'^2)}\right]_{\alpha\beta} \tag{5.272}$$

上式中的 $\tilde{\Delta}_{F\alpha\beta}$由式(5.261)表示。

在自发破缺规范理论中，除标量粒子的自能图及真空平均值以外，所有的原始发散正规顶角都是对数发散性的。式(5.272)中最后一项对这些对数发散积分的发散部分没有贡献。根据以上讨论知道，可以用理论式(5.263)的(也就是对称理论的)波函数和耦合常数重整化抵消项抵消这些发散。至于标量粒子的自能图，它是二次发散的。式(5.263)中最后一项对它的对数发散部分有贡献。由这一项的形式知道，这个对数发散部分可以用一个在群 $G$ 下不变的质量抵消项消去。最后，真空平均值的发散可以用一个场的平移消去。以上讨论说明除了对质量抵消项做不破坏群 $G$ 对称性的修正及场的平移以外，对称理论的抵消项同时也使得自发破缺规范理论的所有顶角有限。

由以上讨论知道，对于自发破缺理论，仍可以用式(5.249)中的有效拉氏函数，其中由式(5.235)定义的 $m_s^2$ 在自发破缺理论中是负的。除 $\delta m_s^2$ 以外，式(5.249)中的所有重整化常数对自发破缺理论($m_s^2<0$)和对称理论($m_s^2>0$)两种情况都是一样的。我们知道式(5.249)具有规范理论的结构。由式(5.249)可以按通常的方式构造正规顶角的生成泛函 $\Gamma[A,\varphi,\cdots]$。和前面对式(5.267)和(5.268)的推导一样，由 Legendre 变换式做逐阶泛函微商可以证明，对于自发破缺的理论，真空平均值 $v$ 由下式决定

$$\left.\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi^\alpha}\right|_{\varphi=v,A=\cdots=0} = 0 \tag{5.273}$$

而

$$\left.\frac{\delta^n\Gamma}{\delta\varphi^{\alpha_1}\delta\varphi^{\alpha_2}\cdots}\right|_{\varphi=v,\ A=\cdots=0} \tag{5.274}$$

是这个理论的正规顶角。

这里需要指出的是,由式(5.273)决定的真空平均值 $v^\alpha$ 并不等于 $v_0^\alpha$,由前面的讨论知道在由式(5.249)构造的正规顶角生成泛函中,需要做一个平移以抵消真空平均值的发散。因此由式(5.273)定出的真空平均值是发散的并与规范有关。但是这并不破坏理论的可重整性,因为真空平均值不是物理的可观测量。在 Feynman 规则中,真空平均值都可以用规范粒子质量参数代换掉。在实际计算中,我们可以简单地丢掉单 $\varphi$ 场外线的子图形。

还有一点需要说明,在重整化拉氏函数式(5.249)中用的重整化手续不满足对有质量粒子通常用的在质壳上减除的归一化条件。这里用的耦合常数不是某个物理散射振幅的值,甚至所用的质量参数也不是物理粒子的质量,因为圈图的贡献中有一些有限部分没有被抵消。如果要满足在质壳上减除的归一化条件,还需要进一步做一个有限的重整化。由前面的讨论可以清楚地看到,这个有限的重整化是破坏拉氏函数在群 $G$ 下的对称性的,但是这一点并不影响以下关于 $S$ 矩阵的规范无关性的证明。

最后两节中关于规范理论可重整性的证明可以直接推广到包含 Fermi 子场的理论,然而在一种情况下可能发生问题。在弱电统一理论中,出现与规范场耦合的手征 Fermi 场,这时拉氏函数中包含一 $\bar{\psi}_L\gamma_\mu D_\mu\psi_L$ 项,其中 $\psi_L=\dfrac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi$。因此在这类理论中出现轴矢流。这里的证明是以维数正规化保持规范不变性为前提的。然而维数正规化不能保持手征不变性和与 $\gamma_5$ 的特性有关的相应的 Ward-Takahashi 恒等式。这个问题在介绍弱电统一理论时将仔细讨论。

## 5.9 S 矩阵的规范无关性与幺正性

如本书第八章要详细说明的,在没有破缺的非 Abel 规范理论中存在着复杂的红外发散和共线发散,严格来说,$S$ 矩阵是不能定义的。因此我们着重讨论自发破缺的规范理论中 $S$ 矩阵的规范无关性与幺正性问题。我们假定由于真空平均值不为零,除光子外全体规范粒子都获得质量。因此如果存在红外发散可以用量子电动力学的方法处理。

作为准备,我们先证明一个等价定理。令 $\varphi$ 代表标量场,Green 函数生成泛函可以写为

$$W[J]=N\int[\mathscr{D}\varphi]\exp\left\{\mathrm{i}S(\phi)+\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4xJ(x)\varphi(x)\right\}\tag{5.275}$$

考虑另一个生成泛函 $W_f[J]$,其中外源 $J$ 与复合算符 $f(\varphi)$ 耦合

$$W_f[J]=N\int[\mathscr{D}\varphi]\exp\left\{\mathrm{i}S[\phi]+\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4xJ(x)f(\varphi(x))\right\}\tag{5.276}$$

我们来证明生成泛函式(5.275)和(5.276)给出相同的 $S$ 矩阵。令由 $W_f[J]$产生的 Green 函数为

$$G_f(x_1\cdots x_n) = \left(\frac{1}{\mathrm{i}}\right)^n \frac{\delta^n W_f[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\bigg|_{J=0} \tag{5.277}$$

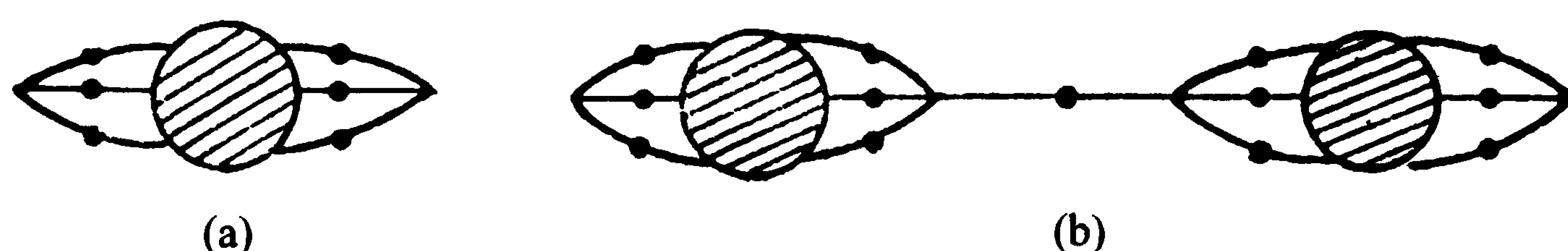
则由式(5.276)得到

$$G_f(x_1\cdots x_n) = \langle 0 \mid T(f(\varphi(x_1))\cdots f(\varphi(x_n))) \mid 0\rangle \tag{5.278}$$

例如,在 $\varphi^4$ 耦合理论中,取 $f(\varphi)=\varphi^3$。由 $W_f$ 产生的传播子

$$G_f(x_1,x_2) \equiv -\mathrm{i}\Delta'_{\mathrm{F}}(x_1-x_2)_f$$

按式(5.278)包含如图 5.20 中两种图形



(a)　　(b)

图 5.20

其中 —•— 代表包含所有自能修正的由 $W[J]$所产生的传播子 $\Delta'_{\mathrm{F}}(x)$。在动量表象中的传播子 $\tilde{\Delta}'_{\mathrm{F}}(k)$和 $\tilde{\Delta}'_{\mathrm{F}}(k)_f$ 在质壳附近可以分别写成如下的形式

$$\tilde{\Delta}'_{\mathrm{F}}(k) \sim \frac{z}{k^2+m_p^2},\tilde{\Delta}'_{\mathrm{F}}(k)_f \sim \frac{z_f}{k^2+m_p^2} \tag{5.279}$$

其中,$m_p^2$ 为粒子的物理质量。在用质壳上的减除条件时 $m_p^2=m^2, z=1$。在用其他重整化规则例如最小减除手续时,则可以不如此。由图 5.20(a)表示的 Feynman 图形在 $k^2=-m_p^2$ 处没有极点。由图 5.20(b)知道

$$z_f = \rho^2 z$$

$$\lim_{k^2+m^2\to 0} \tilde{\Delta}'_{\mathrm{F}}(k)_f = \lim_{k^2+m^2\to 0} \rho^2 \tilde{\Delta}'_{\mathrm{F}}(k) \tag{5.280}$$

其中,$\rho$ 由图 5.20(a)表示。一般地,由图 5.21 可以得到 $\tilde{G}_f(k_1\cdots k_n)$与通常的 $n$ 点 Green 函数 $\tilde{G}(k_1\cdots k_n)$之间的关系式

$$\lim_{k_i^2+m^2\to 0}\prod_{i=1}^{n}(k_i^2+m^2)\tilde{G}_f(k_1\cdots k_n) = \lim_{k_i^2+m^2\to 0}\rho^n\prod_{i=1}^{n}(k_i^2+m^2)\cdots\tilde{G}(k_1\cdots k_n) \tag{5.281}$$

例如,图 5.21(a)中的图形,由于没有 $k_1^2=-m_p^2$ 的极点,因而在式(5.281)左方没有贡献,而图 5.21(b)中的图形给出式(5.281)。因为 $S$ 矩阵为

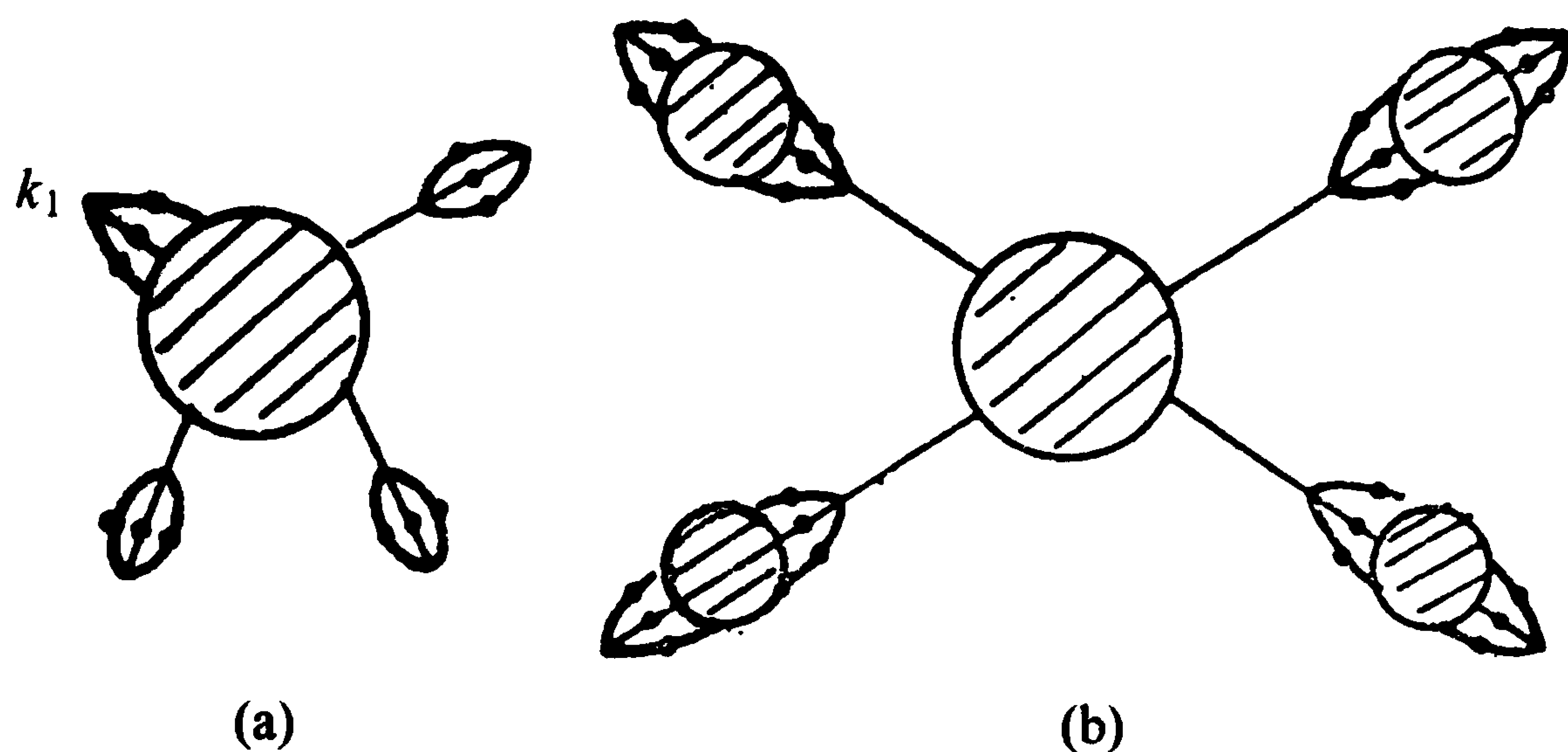



图 5.21

$$S(k_1\cdots k_n) = \lim_{k_i^2\to -m^2}\prod_{i=1}^{n}(z^{1/2})^n[\widetilde{\Delta}'_F(k_i)]^{-1}\widetilde{G}(k_1\cdots k_n)$$

$$S(k_1\cdots k_n)_f = \lim_{k_i^2\to -m^2}\prod_{i=1}^{n}(z_f^{1/2})^n[\widetilde{\Delta}'_F(k_i)_f]^{-1}\widetilde{G}_f(k_1\cdots k_n)$$

由式(5.280)及(5.281)得到

$$S(k_1\cdots k_n) = S(k_1\cdots k_n)_f \tag{5.282}$$

这个结果与 $f$ 的具体形式无关,并且可以直接推广到包含几种场的情况。不难看出,对于非定域的函数 $f$,它也成立。

我们需要的另一个公式是 Green 函数生成泛函的 Ward-Takahashi 恒等式(5.166)的推广。在式(5.166)的证明中,主要是用到未加重整化抵消项的纯规范场有效拉氏函数式(5.150)的 BRS 不变性。为了现在的目的,我们需要加入标量场和重整化抵消项,用式(5.249)中的 $\mathscr{L}_{\text{eff}}[A,\varphi,\eta,\bar{\eta}]$ 代替式(5.150)。令规范固定项为 $-\frac{1}{2}(F^a)^2$(把规范参数 $\alpha$ 归入 $F_a$ 中)时的重整化 Green 函数生成泛函为

$$W_F[J] = N\int\mathscr{D}[A,\varphi,\eta,\bar{\eta}]\exp \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\{\mathscr{L}_{\text{eff}}(A,\varphi,\eta,\bar{\eta},g) + J_\mu^a A_\mu^a + J^a\varphi^a\}$$

由式(5.249)知道,如果我们在泛函积分中做场的标度变换

$$z_3^{1/2}A\to A,\qquad z_s^{1/2}\varphi\to\varphi,\qquad \tilde{z}_3^{1/2}\eta\to\eta,\qquad \tilde{z}_3^{1/2}\bar{\eta}\to\bar{\eta}$$

可以把 $W_F[J]$ 写为

$$W_F[J] = N\int\mathscr{D}[A,\varphi,\eta,\bar{\eta}]\exp \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\{\mathscr{L}_{\text{eff}}^{[0]}(A,\varphi,\eta,\bar{\eta},z_g g) + z_3^{-1/2}J_\mu^a A_\mu^a + z_s^{-1/2}J^a\varphi^a\} \tag{5.283}$$

其中,$\mathscr{L}_{\text{eff}}^{[0]}$ 具有 BRS 不变性。因此相应于式(5.166),我们有

$$\int\mathscr{D}[A,\varphi,\eta,\bar{\eta}]\Big\{-F^a(A,\varphi)(x) + \mathrm{i}\bar{\eta}^a(x)\int \mathrm{d}^4y[z_3^{-1/2}$$

$$\times J_\mu^b(y)(D_\mu)_{bc} - \mathrm{i}z_g g z_s^{-1/2} J^\beta t_{\beta_\gamma}^c \varphi^\gamma ]\eta^c(y)\Big\} W_F[J] = 0 \qquad (5.284)$$

其中

$$(D_\mu)_{ac} = \delta_{ac}\partial_\mu + z_g g f_{abc} A_\mu^b \qquad (5.285)$$

做了这些准备以后,我们就可以证明 $S$ 矩阵元与规范无关。在规范固定函数 $F$ 有一个无穷小的改变 $\Delta F$ 时,生成泛函的形式是

$$\begin{aligned}
W_{F+\Delta F}[J] = {} & N\int \mathscr{D}[A,\varphi,\eta,\bar\eta]\exp \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x\Big\{\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{[0]}(A,\varphi) \\
& - \frac{1}{2}(F^a)^2 - F^a\Delta F^a + \bar\eta^a\Big[\Big(\frac{\partial F^a}{\partial A_\mu^c} + \frac{\partial}{\partial A_\mu^c}\Delta F^a\Big) \\
& \times (D_\mu)_{cb} + \Big(\frac{\partial F^a}{\partial \varphi^\alpha} + \frac{\partial}{\partial\varphi^\alpha}\Delta F^a\Big) \\
& \times(-\mathrm{i}z_g g)t_{\alpha\beta}^b\varphi^\beta\Big]\eta^b + z_3^{-1/2}J_\mu^a A_\mu^a + z_s^{-1/2}J^\alpha\varphi^\alpha\Big\}
\end{aligned} \qquad (5.286)$$

由式(5.283)及(5.286)得到

$$\begin{aligned}
W_{F+\Delta F}[J] - W_F[J] = {} & \mathrm{i}N\int\mathscr{D}[A,\varphi,\eta,\bar\eta]\int \mathrm{d}^4 y \\
& \times\Big[-F^a\Delta F^a + \bar\eta^a\Big(\frac{\partial\Delta F^a}{\partial A_\mu^c}(D_\mu)_{cb} + \frac{\partial \Delta F^a}{\partial\varphi^\alpha}(-\mathrm{i}z_g g) \\
& \times t_{\alpha\beta}^b\varphi^\beta\Big)\eta^b\Big](y)\cdot\exp \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\{\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{[0]} + z_3^{-1/2}J_\mu A_\mu + z_s^{-1/2}J\varphi\}
\end{aligned}$$

$$(5.287)$$

利用式(5.284),上式可以化为

$$\begin{aligned}
W_{F+\Delta F}[J] - W_F[J] = {} & \mathrm{i}N\Big\{\int \mathrm{d}^4 y\bar\eta^a(y)(-1)\Delta F^a\Big(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta J(y)}\Big) \\
& \times\int\mathscr{D}[A,\varphi,\eta,\bar\eta]\int \mathrm{d}^4 y'\mathrm{i}[z_3^{-1/2}J_\mu^c(D_\mu)_{cb} + z_3^{-\frac{1}{2}}(-\mathrm{i}z_g g) \\
& \times J^\alpha t_{\alpha\beta}^b\varphi^\beta)](y')\eta^b(y') + \int\mathscr{D}[A,\varphi,\eta,\bar\eta]\int \mathrm{d}^4 y\bar\eta^a(y) \\
& \times\Big[\frac{\partial\Delta F^a}{\partial A_\mu^c}(D_\mu)_{cb} + \frac{\partial\Delta F^a}{\partial\varphi^\alpha}(-\mathrm{i}z_g g)t_{\alpha\beta}^b\varphi^\beta\Big](y)\eta^b(y)\Big\}\exp \mathrm{i} \\
& \times\int \mathrm{d}^4 x\{\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{[0]} + z_3^{-1/2}J_\mu A_\mu + z_s^{-1/2}J\varphi\}
\end{aligned} \qquad (5.288)$$

因为

$$\Delta F^a\Big(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta J(y)}\Big)\mathrm{i}J_\mu^c(y') = \frac{\partial\Delta F^a}{\partial A_\mu^c(y)}\delta^4(y-y')$$

$$\Delta F^a\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)\mathrm{i}J^a(y') = \frac{\partial\Delta F^a}{\partial\varphi^a}\delta^4(y-y')$$

由式(5.288)得到

$$W_{F+\Delta F} - W_F = \mathrm{i}N\int\mathscr{D}[A,\varphi,\eta,\bar{\eta}]\int\mathrm{d}^4y(-\mathrm{i})\cdot\Delta F^a(A(y),$$

$$\varphi(y))\bar{\eta}^a(y)\int\mathrm{d}^4y'[z_3^{-1/2}J_\mu^c(D_\mu)_{cb} + z_s^{-1/2}J^a(-\mathrm{i}z_g g)t_{\alpha\beta}^b\varphi^\beta)](y')$$

$$\times\eta^b(y')\exp\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\{\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{[0]} + z_3^{-1/2}J_\mu A_\mu + z_s^{-1/2}J\varphi\} \qquad (5.289)$$

上式可以写为

$$W_{F+\Delta F} = \mathrm{i}N\int\mathscr{D}[A,\varphi,\eta,\bar{\eta}]\exp\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\{\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}^{[0]}$$

$$+ z_3^{-1/2}J_\mu A'_\mu + z_3^{-1/2}J\varphi'\} \qquad (5.290)$$

其中

$$A'^a_\mu(x) = A^a_\mu(x) - \mathrm{i}\int\mathrm{d}^4y\Delta F^c(A(y)\varphi(y))\bar{\eta}^c(y)$$

$$\times[z_3^{-1/2}(D_\mu)_{ab}](x)\cdot\eta^b(x)$$

$$\varphi'^a(x) = \varphi^a(x) - \mathrm{i}\int\mathrm{d}^4y\Delta F^c(A(y)\varphi(y))\bar{\eta}^c(y)$$

$$\times[z_s^{-1/2}(-\mathrm{i}z_g g)\cdot t_{\alpha\beta}^b\varphi^\beta](x)\eta^b(x) \qquad (5.291)$$

由前面证明的等价定理式(5.282)知道式(5.290)中的生成泛函 $W_{F+\Delta F}$ 与生成泛函 $W_F$ 产生同样的 $S$ 矩阵。这就证明了 $S$ 矩阵与规范无关，特别是在取线性协变规范时与规范参数 $\alpha$ 无关，即

$$(S)_{F+\Delta F} = (S)_F \qquad (5.292)$$

传播子式(5.257)、(5.258)和(5.259)中虚拟粒子、Goldstone 粒子以及规范粒子的传播子的多余极点与 $\alpha$ 有关。$S$ 矩阵的规范无关性表示这些不对应物理粒子的多余极点项互相抵消，不在 $S$ 矩阵中造成极点和阈能奇异。这说明 $S$ 矩阵的幺正性是成立的。

对于没有破缺的规范理论，如果我们用某种不破坏规范不变性的方法对红外发散和共线发散作正规化(用维数正规化能做到这一点)，则经过紫外发散重整化的 $S$ 矩阵的规范无关性可以用类似的推导证明。

## 参 考 文 献

1 F J Dyson. Phys Rev. 1949, 75: 1736

2 N N Bogoliubov and O S Parasiuk. Acta Math. 1957, 97: 227

3 N N Bogoliubov and D V Shirkov. Introduction to the Theory of Quantized Fields. Interscience, NY:1959,Ch.4

4 K Hepp. Comm Math Phys. 1966,2:301;Théorie de la Renormalization. Berlin:Springer-Verlag, 1969

5 W Zimmerman. Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory ed. S. Deser, M. Grisaru and H. Pendleton. Cambridge:MIT Press,1970,395

6 C Itzykson and J-B Zuber. Quantum Field Theory. Mc Graw-Hill,1980,Chapter 8

7 J D Bjorken and S D Drell. Relativistic Quantum Fields. Mc Graw-Hill, 1965,18

8 W Pauli and F Villars. Rev Mod Phys. 1949,21:434

9 文献[7],Chapter 17

10 卢里.粒子和场.北京:科学出版社,1981,第七章

11 G't Hooft and M Veltman. Nucl Phys. 1972,B44:189

12 G't Hooft and M Veltman. Diagram. CERN Theoretical Studies Division, 1973

13 G Leibbrandt. Rev Mod Phys. 1975,47:849

14 G't Hooft. Nucl Phys. 1973,B61:455

15 G't Hooft. Nucl Phys. 1971,B33:173;G 't Hooft and M Veltman. Nucl Phys. 1972,B50:318

16 B W Lee and J Zinn-Justin. Phys Rev. 1972,D5:3121,3137;1973,D7:1049

17 B W Lee and J Zinn-Justin. Phys Rev. 1974,D9:933

18 J Zinn-Justin. Renormalization of Gauge Theories,Lectures at the 1974 Bonn Int Summer Inst for Theoretical Physics

19 B W Lee. in Methods in Field Theory. North-Holland,1976

20 C Becchi. a Rouet and R Stora. Comm Math Phys. 1975,42:127

21 A A Slavnov. Theor Math Phys. 1972,10:152;J C Taylor. Nucl Phys. 1971,B33:436

22 S D Joglekar and B W Lee. Annales of Physics. 1976,97:160

# 第六章　重整化群方程和渐近自由

## 6.1　标度变换

在本章中，我们将研究 Green 函数在外线动量类空并且很大时的性质。这样的动量远离质壳，似乎不相应于物理过程。但是下一章中我们将看到，研究 Green 函数在这个区域的行为对分析深度非弹性散射过程等一类物理过程非常有用。

为了说明有关的物理问题，我们先考虑标量场 $\varphi^4$ 作用的简单模型。这时拉氏量密度为

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_c + \delta\mathscr{L}$$

$$\mathscr{L}_c = -\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{1}{4!}g\varphi^4 \tag{6.1}$$

其中，$m$ 为 $\varphi$ 场质量，$g$ 为耦合常数，$\delta\mathscr{L}$ 为重整化抵消项。令

$$G^{(n)}(p_i, m, g)$$

是 $n$ 条动量为 $p_i(i=1,2,\cdots n)$ 的外线的联通 Green 函数

$$(2\pi)^4\delta(\Sigma p_i)G(p_i, m, g) = \int\langle 0 \mid T(\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)) \mid 0\rangle \times \exp(-\mathrm{i}p_ix_i)\prod_j \mathrm{d}^4x_j$$

我们要讨论如下的问题：设动量 $p_i$ 为欧氏的，$p_i^2>0$，$(p_{i_1}+p_{i_2}+\cdots)^2>0$，并设 $p_i=\lambda p_i^0$，固定 $p_i^0$ 求 $\lambda\to\infty$ 时 $G^{(n)}(p_i,m,g)$ 的渐近行为。

一个简单的想法是：由量纲的考虑，$G^{(n)}$ 可写为

$$G^{(n)}(p_i, m, g) = P_{d_G}f\left(\frac{m^2}{p_i^2}, \frac{m^2}{p_i\cdot p_j}, g\right) \tag{6.2}$$

其中，$d_G=-3n+4$ 为 $G^{(n)}$ 的量纲，$P_{d_G}$ 为 $p_i$ 的 $d_G$ 次多项式，在所有的不变量 $(p_i^2, p_i\cdot p_j)$ 都很大时，粒子的质量可以忽略，因此

$$G^{(n)}(p_i, m, g) \to P_{d_G}f(0,0,g) \propto \lambda^{d_G} \tag{6.3}$$

然而这个想法是不正确的。

破坏这种简单的标度性的物理原因是量子场论的发散与重整化。由 $\varphi^4$ 理论的 Feynman 规则，在 $L$ 圈图的一级 $G^{(n)}$ 包含如下形式的 Feynman 积分

$$g^L \int \prod_{i=1}^{L} \mathrm{d}^4 l_i \frac{1}{\prod_{j=1}^{I} (k_j^2 + m^2)} \tag{6.4}$$

其中，$l_i(i=1,2,\cdots,L)$为 $L$ 个独立的圈动量，$k_j(j=1,2,\cdots,I)$为内线动量。$k_j$ 是 $l_i$ 及外线动量 $p_i$ 的线性组合。用 Feynman 参数公式可以把式(6.4)写为

$$(I-1)! \int \prod_{j=1}^{I} \mathrm{d}\alpha_j \int \prod_{i=1}^{L} \mathrm{d}^4 l_i \frac{1}{[P_0(l_1,\cdots,l_L,\alpha_i)]^I} \delta(1-\Sigma\alpha_j)$$

其中，$P_0$ 是 $l_1, l_2, \cdots, l_L$ 及外线动量的二次多项式。先对 $l_1$ 积分，如果这个积分是收敛的，得到的是形如

$$\frac{1}{[P_1(l_2,\cdots,l_L,\alpha_i)]^{I-2}}, \qquad \frac{Q_1}{[P_1]^{I-1}}$$

的因子，其中 $P_1, Q_1$ 是 $l_2,\cdots,l_L$ 及外线动量的二次式。依此类推，如果对所有 $l_i$ 的积分都收敛，最后将得到一些如下形式的积分

$$常数 \times \int \prod \mathrm{d}\alpha_j \frac{Q(p_i,\alpha_j)}{[P_L(p_i,\alpha_j)]^{I-K}} \delta(1-\Sigma\alpha_j)$$

其中，$P_L$ 为外线动量 $p_i$ 的二次式，$Q$ 为多项式。在欧氏动量区 $P_L$ 是正定的，此时式(6.3)的确是成立的。但是，事实上微扰论中包含发散，必须引入抵消项。如果重整化的减除点取在 $p_i^2=0$ 或 $p_i^2=-m^2$ 处，在理论中出现的有量纲参数只有 $m$，此时式(6.2)是成立的。但是每个对数发散的子积分在减除后出现一个含对数因子的项。因此重整化的顶角包含 $\ln\frac{P}{m^2}$这样的因子的乘积，其中 $P$ 是外线动量 $p_i$ 的某个二次式。这样的因子在外线动量的不变量 $p_i^2\to\infty$，$p_i\cdot p_j\to\infty$时没有极限，式(6.3)不能成立。

重整化 Green 函数的具体形式与重整化减除方案有关，如果我们选择在动量的欧氏区做减除(取 $p_i^2=\mu^2>0,\cdots$为减除点)或用维数正规化的方案，则理论形式中将出现一个由重整化引入的有质量量纲的常数 $\mu$。这时式(6.2)应改为

$$G^{(n)}(p_i,m,\mu,g) = P_{d_G} f\left(\frac{\mu^2}{p_i^2}, \frac{\mu^2}{p_i\cdot p_j}, \frac{m^2}{\mu^2}, g\right) \tag{6.2$'$}$$

重整化 Green 函数出现形如 $\ln\frac{P^2}{\mu^2}$的因子。第五章关于四外线和二外线顶角的微扰论公式(5.91)和(5.98)中就包含这样的因子。由于有这些因子，式(6.3)不能成立。

上面讨论的问题是与场论在标度变换下的性质有关的。设理论中包含 $N$ 分量场$\phi(x)$。在标度变换下，坐标 $x$ 和场$\phi(x)$的变换为

$$x_\mu \to x'_\mu = \lambda^{-1} x_\mu, \qquad \lambda > 0 \tag{6.5}$$

$$\phi(x) \to \phi'(x') = \lambda^D \phi(x) = \mathrm{e}^{D\ln\lambda}\phi(x) \tag{6.6}$$

其中，$D$ 为$N \times N$ 矩阵。假设它是对角的，其对角元 $D_i$ 称为场$\phi_i(x)$的标度量纲。注意，在标度变换下场论中有量纲的参数（如质量）是不变的。在标度变换下作用量的变换为

$$S = \int \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \to \int \mathrm{d}^4 x' \mathscr{L}(\phi'(x'), \partial_\mu \phi'(x'))$$

$$= \lambda^{-4} \int \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}(\lambda^D \phi(x), \lambda^{D+1} \partial_\mu \phi(x)) \tag{6.7}$$

$\mathscr{L}$ 的量纲为 $d_{\mathscr{L}} = 4$（以质量为单位）。如 $\mathscr{L}$ 中不含有量纲的参数我们可取 $\phi_i$ 场的标度量纲$D_i$ 与它的量纲$d_i$ 相等，这时式(6.7)右方变为

$$\lambda^{-4} \int \mathrm{d}^4 x \lambda^{d_{\mathscr{L}}} \mathscr{L}(\varphi, \partial_\mu \phi) = \int \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$$

因此如果拉氏量中不含有量纲的参数，则经典理论在标度变换下是不变的。对标量场 $\varphi^4$ 作用理论式(6.1) 中的经典作用量$\int \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}_c$ 在 $m = 0$ 时是标度不变的。

我们来推导标度变换的 Noether 流。对无穷小变换 $\ln\lambda = \varepsilon$

$$\delta x_\mu = x'_\mu - x_\mu = -\varepsilon x_\mu$$

由式(6.6)得到 $\phi(x)$场形式的改变为

$$\delta\phi(x) \equiv \phi'(x) - \phi(x) = \varepsilon\left(D + x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)\phi(x) \tag{6.8}$$

由式(1.17)～(1.19)，四维区域 $\Omega$ 中的作用量在无穷小标度变换下的变化为

$$\delta S_\Omega = \int_\Omega [\delta\mathscr{L} + \partial_\mu(\mathscr{L}\delta x_\mu)] = \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi\right.$$

$$\left. + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi + \mathscr{L}\delta x_\mu\right)\right] = -\varepsilon\int \partial_\mu j_\mu \mathrm{d}^4 x \tag{6.9}$$

其中，$j_\mu$ 为标度变换的 Noether 流

$$j_\mu(x) = -(x_\nu \pi_\mu \partial_\nu \phi + \pi_\mu D\phi) + x_\mu \mathscr{L} = x_\nu T_{\mu\nu} - \pi_\mu D\phi$$

$$\pi_\mu = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}, \qquad T_{\mu\nu} = -\pi_\mu \partial_\nu \phi + \delta_{\mu\nu}\mathscr{L} \tag{6.10}$$

为能量动量张量。

对式(6.10)可以加上一个散度等于零的项。例如，对于由式(6.1)中的 $\mathscr{L}_c$ 所描述的经典场

$$-\pi_\mu D\phi = \varphi\partial_\mu\varphi$$

利用

$$\partial_\mu\left[-\varphi\partial_\mu\varphi+\frac{1}{6}x_\nu(\delta_{\mu\nu}\partial^2-\partial_\mu\partial_\nu)\varphi^2\right]=-\partial_\mu(\varphi\partial_\mu\varphi)+\frac{1}{2}\partial^2\varphi^2=0$$

可定义与 $j_\mu$ 有相同散度的流

$$\tilde{j}_\mu=x_\nu\theta_{\mu\nu} \tag{6.11}$$

$$\theta_{\mu\nu}=T_{\mu\nu}+\frac{1}{6}(\delta_{\mu\nu}\partial^2-\partial_\mu\partial_\nu)\varphi^2 \tag{6.12}$$

$\theta_{\mu\nu}$与 $T_{\mu\nu}$只差一个全散度项。除实场和复场的差别外,式(6.12)的最后一项正是式(1.118)的最后一项。在文献[1]中证明了对包含标量场、旋量场和规范场的理论也可以写出式(6.11)形式的方程,其中 $\theta_{\mu\nu}$与 $T_{\mu\nu}$只差一个全散度项,它称为改进的能量动量张量,满足守恒方程

$$\partial_\mu\theta_{\mu\nu}=0$$

由式(6.11)可得

$$\partial_\mu j_\mu=\partial_\mu\tilde{j}_\mu=\theta_{\mu\mu} \tag{6.13}$$

另一方面,由式(6.8)知道,在变换 $\phi(x)\to\phi(x)+\delta\phi(x)$下

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{L}&=\varepsilon\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\left(D+x_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)\phi+\varepsilon\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\left(D+1+x_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)\partial_\mu\phi\\&=\varepsilon\left[\partial_\nu(x_\nu\mathscr{L})-4\mathscr{L}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}D\phi+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(D+1)\partial_\mu\phi\right]\end{aligned} \tag{6.14}$$

因此在标度变换下,作用量的改变为

$$\begin{aligned}\delta S_\Omega&=\int_\Omega d^4x\left[\delta\mathscr{L}-\varepsilon\partial_\nu(\mathscr{L}x_\nu)\right]\\&=\varepsilon\int_\Omega d^4x\left[-4\mathscr{L}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}D\phi+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(D+1)\partial_\mu\phi\right]\\&\equiv-\varepsilon\int_\Omega d^4x\Delta(\phi)\end{aligned} \tag{6.15}$$

如果 $\mathscr{L}$不含有量纲参数,则 $\Delta=0$。比较式(6.9)和(6.15)得到

$$\partial_\mu\tilde{j}_\mu=\partial_\mu j_\mu=\Delta=\theta_{\mu\mu} \tag{6.16}$$

由式(6.15)和(6.16)得到,对实标量场的经典拉氏量 $\mathscr{L}_c$

$$\theta_{\mu\mu}=-m^2\varphi^2 \tag{6.17}$$

对第一章中写出的 Fermi 场及标量场与规范场耦合的经典拉氏量

$$\theta_{\mu\mu}=-\bar{\psi}M\psi-2\varphi^\dagger\mu^2\varphi \tag{6.18}$$

将式(6.18)与(1.126)比较知道,$\theta_{\mu\nu}$正是 1.4 节中用符号 $\theta'_{\mu\nu}$表示的量。由式(6.17)和(6.18)也可以看出,如果质量等于零,这些经典理论中的标度流是守恒

的。

在量子场论中,由于存在发散和重整化,标度变换的性质要复杂得多,通常用的在动量空间引入切断参数 $\Lambda$ 的正规化手续破坏标度不变性。在维数正规化方案中,标度变换只能在 $4-\varepsilon$ 维空间讨论,最后才令 $\varepsilon\to 0$。以 $\varphi^4$ 作用标量场理论为例,拉氏量密度为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi-\frac{1}{2}m^2\varphi^2-\frac{1}{4!}g\mu^\varepsilon\varphi^4+\delta\mathscr{L}(g\mu^\varepsilon,\varepsilon^{-1},\varphi,\partial_\mu\varphi)$$

因此理论中出现了新的有量纲的参数 $\mu$。

现在我们来试图推导标度变换的 Ward 恒等式。在 $n$ 维欧氏空间中,Green 函数生成泛函可写为

$$W_E[J]=\exp Z_E[J]=N\int[\mathscr{D}\phi]\exp\left\{\int d^n x(\mathscr{L}+J\phi)\right\} \tag{6.19}$$

式(6.19)的泛函积分中做形如式(6.8)的变数替换

$$\phi(x)\to\phi(x)+\delta\phi(x)=\phi(x)+\varepsilon\left(D+x_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)\phi(x)$$

由于这个变换对 $\phi$ 是线性的,变换的 Jacobi 行列式与 $\phi$ 无关,可以吸收到归一化因子 $N$ 中去。由式(6.14)可得

$$\begin{aligned}\delta W_E[J]&=\varepsilon\int[\mathscr{D}\phi]\int d^n y\left[-\Delta(\phi(y))+J(y)\cdot\left(D+y_\nu\frac{\partial}{\partial y_\nu}\right)\phi\right]\exp\left\{\int d^n x(\mathscr{L}+J\phi)\right\}\\&=\varepsilon\int d^n y\left[-\Delta\left(\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)+J(y)\left(D+y_\nu\frac{\partial}{\partial y_\nu}\right)\cdot\frac{\delta}{\delta J(y)}\right]\cdot W_E[J]=0\end{aligned}$$

由上式得

$$\int d^n y\left[-\Delta\left(\frac{\delta}{\delta J(y)}\right)+J(y)\left(D+y_\nu\frac{\partial}{\partial y_\nu}\right)\frac{\delta}{\delta J(y)}\right]\cdot Z_E[J]=0 \tag{6.20}$$

联通 Green 函数所满足的 Ward 恒等式可以由式(6.20)导出。

在 $\varphi^4$ 作用标量场理论中,如果不考虑发散和重整化抵消项,则由式(6.15)可得

$$\Delta(\varphi)_{经典}=-m^2\varphi^2 \tag{6.21}$$

将式(6.20)对 $J(x_1)\cdots J(x_n)$ 做泛函微分,然后令 $J=0$ 就得到四维欧氏空间中连通 Green 函数

$$G(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\langle 0\mid T(\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n))\mid 0\rangle$$

满足的 Ward 恒等式为

$$\sum_i\left(1+x_{i\nu}\frac{\partial}{\partial x_{i\nu}}\right)G(x_1,x_2,\cdots,x_n)-\int d^4 x G_\Delta(x;x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \tag{6.22}$$

其中

$$G_{\Delta}(x;x_1,\cdots,x_n) = \langle 0 \mid T(\Delta(x)\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)) \mid 0\rangle \tag{6.23}$$

我们对式(6.22)做傅氏变换。如果采用经典公式(6.21)作为 $\Delta$ 的表示式,则由

$$\int \mathrm{d}^4 x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i \cdot x_i} \sum_j x_{j\nu} \frac{\partial}{\partial x_{j\nu}} G(x_1,\cdots,x_n)$$

$$= \left(-4n - \sum_j p_{j\nu} \frac{\partial}{\partial p_{j\nu}}\right) \times (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p_j) G(p_1,\cdots,p_n)$$

$$\sum_j p_{j\nu} \frac{\partial}{\partial p_{j\nu}} \delta^4(\Sigma p_i) = \sum_j p_{j\nu} \frac{\partial}{\partial p_{1\nu}} \delta^4\left(\sum p_i\right)$$

$$= -4\delta^4(\Sigma p_j) + \frac{\partial}{\partial p_{1\nu}}\left[\left(\sum_j p_{j\nu}\right)\delta^4(\Sigma p_i)\right] = -4\delta^4(\Sigma p_i)$$

得到

$$\left(d_G - \sum_j p_{j\nu} \frac{\partial}{\partial p_{j\nu}}\right) G(p_1,\cdots,p_n) + m^2 G_{\varphi^2}(0,p_1,\cdots,p_n) = 0 \tag{6.24}$$

$G$ 的量纲 $d_G = -3n+4$;$G_{\varphi^2}$ 的量纲为 $-3n+2$。令欧氏动量 $p_i = \lambda p_i^0$,$\lambda \to \infty$,按照 Weinberg 定理[2]在微扰论有限阶

$$G(p_1,\cdots,p_n) \sim \lambda^{-3n+4} \times \text{对数因子}$$

$$G_{\varphi^2}(0,p_1,\cdots,p_n) \sim \lambda^{-3n+2} \times \text{对数因子}$$

如果以微扰论有限阶的结果为根据,忽略式(6.24)中的 $m^2 G_{\varphi^2}$ 项,则由式(6.24)得到

$$G(\lambda p_i^0) = \lambda^{d_G} G(p_i^0) \tag{6.25}$$

这就是式(6.3)的结果。然而这个公式是不对的,原因是 Ward 恒等式(6.24)没有考虑发散和重整化效应。在考虑正规化和减除手续对 $\Delta$ 的效应(称为能量动量张量的迹 $\theta_{\mu\mu}$ 的反常)以后,正确的 Ward 恒等式可以由式(6.20)推导出来。但是,研究 Green 函数在标度变换下的性质用下节中将介绍的重整化群方法更为简便。

## 6.2　重整化群方程

关于重整化对 Green 函数大动量渐近性质的影响的研究是 20 世纪 50 年代初开始的[3,4]。Gell-Mann和Low用重整化群的方法研究了量子电动力学中光子传播子的大动量行为[4]。他们的方法曾被推广到其他 Green 函数和其他可重整的场论[5]。20 世纪 70 年代初 Callan 和 Symanzik 从考察标度变换的破坏出发得到一个偏微分方程,称为 Callan-Symanzik 方程[6]。用这个方程可以更方便地导出关于

Green 函数大动量渐近行为对重整化的依赖的知识。虽然出发点不尽相同，他们的方法与重整化群的方法有密切的关系，他们的方程适用于在零动量点或质壳上做减除的方案。由于非 Abel 规范场论中 Green 函数在零动量处及物质场的质壳上有复杂的红外发散（参看第八章），这种减除方案不能用。下面将推导的方程与原来的 Callan-Symanzik 方程有相似之处，但不完全相同，它适用于在欧氏动量区做减除或在维数正规化下减除掉极点的方案。在这两类方案中都出现由重整化引入的有质量量纲的参数 $\mu$。这个方程的意义直接与重整化群有关。因此我们先说明重整化群的概念。

以式(6.1)中的拉氏量描述的标量场理论为例。令 $\Gamma^{(n)}(p_i)$ 为 $n$ 条动量为 $p_i$ ($i=1,2,\cdots,n$) 的外线的重整化正规顶角。我们取如下的减除规则

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{(2)}(p)\Big|_{p^2=-m^2} &= 0 \\
\Gamma^{(2)}(p)\Big|_{p^2=\mu^2} &= -(\mu^2+m^2) \\
\Gamma^{(4)}(p_i)\Big|_{p_i^2=\mu^2,\,s=t=u=-\frac{4}{3}\mu^2} &= -g
\end{aligned}
\tag{6.26}
$$

上式中，$m$ 是 $\Gamma^{(2)}$ 的零点，因此是物理质量。在这个方案下，$\Gamma^{(n)}=\Gamma^{(n)}(p_i,m,\mu,g)$ 是 $m$，$\mu$ 和 $g$ 的函数。在未重整的理论中，须引入动量空间的切断参数 $\Lambda$。未重整化正规顶角 $\Gamma_0^{(n)}=\Gamma_0^{(n)}(p_i,m_0,\Lambda,g_0)$ 是 $\Lambda$、裸质量 $m_0$ 和裸耦合常数 $g_0$ 的函数。重整化关系为

$$
\Gamma^{(n)}(p_i,m,\mu,g)=Z^{\frac{n}{2}}\Gamma_0^{(n)}(p_i,m_0,\Lambda,g_0)
\tag{6.27}
$$

$$
g_0=Z_g g,\qquad m_0=m+\delta m
\tag{6.28}
$$

其中

$$
Z=Z\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2},\frac{m^2}{\mu^2},g\right),\qquad Z_g=Z_g\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2},\frac{m^2}{\mu^2},g\right)
\tag{6.29}
$$

分别是 $\varphi$ 场及耦合常数的重整化常数。未重整顶角 $\Gamma_0^{(n)}$ 与 $\mu$ 无关，而重整化顶角 $\Gamma^{(n)}$ 则在 $\Lambda\to\infty$ 时与 $\Lambda$ 无关。如固定未重整的理论的参数 $m_0$，$\Lambda$ 及 $g_0$，则 $g$ 与 $\mu$ 有关。$\mu$ 是可以任意选择的，改变 $\mu$ 不改变理论的物理内容，而只是改变 $g$ 的定义。由式(6.27)的形式易见，物理质量 $m$ 作为 $\Gamma^{(2)}$ 的零点是与 $\mu$ 无关的。

由式(6.27)知道，不同减除点 $\mu$ 的正规顶角相差一个有限的重整化

$$
\Gamma^{(n)}(p_i,m,\mu_2,g(\mu_2))=Z^{21}\Gamma^{(n)}(p_i,m,\mu_1,g(\mu_1))
\tag{6.30}
$$

$$
g(\mu_2)=Z_g^{21}g(\mu_1)
\tag{6.31}
$$

其中

$$
Z^{21}=Z(\mu_2)/Z(\mu_1)
$$

$$Z_g^{21} = Z_g(\mu_2)/Z_g(\mu_1) \tag{6.32}$$

都是有限数。三个减除点 $\mu_1,\mu_2,\mu_3$ 的重整化常数间有关系

$$Z^{31} = Z^{32}\cdot Z^{21}, \qquad Z_g^{31} = Z_g^{32}Z_g^{21} \tag{6.33}$$

因此重整化操作具有群的性质。固定未重整参数下的微分算符 $\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\Big|_{\Lambda,g_0,m_0}$（作用在正规顶角上）可以看作是重整化群的生成元（也可以考虑固定 $\mu$ 及 $g$ 的初值而不提未重整理论）。正像通常的群论一样，生成元的形式决定正规顶角 $\Gamma^{(n)}(p_i,m,\mu,g(\mu))$ 对 $\mu$ 的依赖。

固定未重整化理论的参数 $\Lambda,m_0$ 和 $g_0$，将式(6.27)对 $\mu$ 微分，利用

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\Big|_{g_0,\Lambda,m_0}\Gamma_0^{(n)}(p_i,m_0,\Lambda,g_0) = 0 \tag{6.34}$$

得到方程

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta\frac{\partial}{\partial g} - n\gamma\right)\Gamma^{(n)}(p_i,m,\mu,g) = 0 \tag{6.35}$$

其中

$$\beta = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}g\Big|_{g_0,\Lambda,m_0} \tag{6.36}$$

$$\gamma = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z^{\frac{1}{2}}\Big|_{g_0,\Lambda,m_0} \tag{6.37}$$

注意，式(6.35)中的 $\mu\frac{\partial}{\partial\mu}$是在固定 $g$ 和 $m$ 条件下求偏微商。由于 $g=Z_g^{-1}g_0$，式(6.36)可以写为

$$\beta = -g\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_g\,|_{g_0,\Lambda,m_0} \tag{6.38}$$

$\gamma$ 称为 $\varphi$ 场的反常量纲，这样称呼的理由以后将会清楚。

我们也可以不用动量空间的切断参数 $\Lambda$ 而用维数正规化，这时重整化常数是 $\varepsilon=4-d$ 及 $m^2/\mu^2$ 的函数

$$Z = Z\left(\varepsilon,\frac{m^2}{\mu^2}\right), \qquad Z_g = Z_g\left(\varepsilon,\frac{m^2}{\mu^2}\right) \tag{6.39}$$

现在我们来证明，Callan-Symanzik 函数 $\beta$ 和 $\gamma$ 是有限的，把重整化群方程(6.35)用于 $\Gamma^{(2)}$ 并利用归一化条件式(6.26)可以得到

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\Gamma^{(2)}(p)\Big|_{p^2=\mu^2} + 2\gamma(\mu^2+m^2) = 0 \tag{6.40}$$

由上式知道 $\gamma$ 是有限的，再把式(6.35)用于 $\Gamma^{(4)}(p)$并用归一化条件式(6.26)，得

到

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Gamma^{(4)}(p_i) \Big|_{p_i^2=\mu^2, s=t=u=-\frac{4}{3}\mu^2} - \beta + 4\gamma g = 0 \tag{6.41}$$

因此 $\beta$ 也是有限的。这说明 $\beta$ 和 $\gamma$ 都与切断无关。它们都是无量纲的,因此都只是 $m^2/\mu^2$ 及 $g$ 的函数

$$\beta = \beta\left(\frac{m^2}{\mu^2}, g\right), \qquad \gamma = \gamma\left(\frac{m^2}{\mu^2}, g\right) \tag{6.42}$$

由重整化群方程(6.35),可以得到关于正规顶角 $\Gamma^{(n)}$ 的大动量行为的知识,这需要利用由量纲分析得到的方程

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + m \frac{\partial}{\partial m} + \sum_i p_{i\mu} \frac{\partial}{\partial p_{i\mu}}\right) \Gamma^{(n)}(p_i) = d_{\Gamma^{(n)}} \Gamma^{(n)}(p_i) \tag{6.43}$$

其中,$d_{\Gamma^{(n)}} = 4 - n$ 是 $\Gamma^{(n)}(p_i)$ 的量纲。由式(6.43)及重整化群方程(6.35)得到

$$\left(\sum_i p_{i\mu} \frac{\partial}{\partial p_{i\mu}} + m \frac{\partial}{\partial m} - \beta \frac{\partial}{\partial g} + n\gamma - d_{\Gamma^{(n)}}\right) \Gamma^{(n)}(p_i, m, \mu, g) = 0 \tag{6.44}$$

在零质量或 $m$ 可以忽略的情况下,方程(6.44)得到简化,知道了 Callan-Symanzik 函数 $\beta$ 和 $\gamma$ 以后容易写出方程的解。但是如果需要知道 $\Gamma^{(n)}$ 对 $m$ 的依赖,此时式(6.44)中的 $m \frac{\partial}{\partial m}$ 项不能忽略,由于 $\beta$ 和 $\gamma$ 都与 $m$ 有关,方程(6.44)不容易处理,对讨论这类问题,选用重整化常数与质量无关的方案较为方便。由第五章的讨论知道,在维数正规化的最小减除方案中,未重整化顶角不含有量纲的切断参数,代替 $\Lambda$ 的是无量纲的参数 $\varepsilon = 4 - d$,并且重整化常数是与质量参数 $m$ 无关的。对这类方案,代替式(6.27)～(6.29),我们有

$$\Gamma^{(n)}(p_i, m, \mu, g) = Z^{\frac{n}{2}}(\varepsilon, g) \Gamma_0^{(n)}(p_i, m_0, \varepsilon, g_0) \tag{6.45}$$

$$g_0 = Z_g(\varepsilon, g) g \mu^{\varepsilon}, \qquad m_0 = Z_m(\varepsilon, g) m \tag{6.46}$$

与前面讨论的减除方案不同,这里 $m$ 不是物理质量,它只是一个有质量量纲的参数,物理质量可以用它表示。$m$ 是与 $\mu$ 有关的。在这个方案下,重整化群方程为

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - \gamma_m m \frac{\partial}{\partial m} - n\gamma\right) \Gamma^{(n)}(p_i, m, \mu, g) = 0 \tag{6.35$'$}$$

其中

$$\beta = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} g \Big|_{g_0, \varepsilon} = -\left\{ g\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z_g(g_0 \mu^{-\varepsilon}, \varepsilon) \Big|_{g_0, \varepsilon} + \varepsilon g \right\}$$

$$\doteq - g\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z_g(g_0 \mu^{-\varepsilon}, \varepsilon) \Big|_{g_0, \varepsilon} \tag{6.36$'$}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z(g_0\mu^{-\varepsilon},\varepsilon)\Big|_{g_0,\varepsilon} \tag{6.37'}$$

$$\gamma_m = -\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln m\Big|_{g_0,\varepsilon,m_0} = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_m(g_0\mu^{-\varepsilon},\varepsilon)\Big|_{g_0,\varepsilon} \tag{6.47}$$

以上三个公式中 $\varepsilon$ 最后都取趋于零的极限。这种形式的重整化群方程是在文献[7]中首先得到的。

我们来证明在这个方案下 $\beta,\gamma$ 和 $\gamma_m$ 的有限性。由于 $\beta,\gamma$ 和 $\gamma_m$ 都与 $m$ 无关,我们不妨先设 $m=0$。这时由式(6.35′)得到

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\frac{\partial}{\partial g}\right)\frac{\Gamma^{(4)}}{(\Gamma^{(2)})^2}=0$$

因此 $\beta$ 是有限的。由此得到 $\gamma$ 也是有限的,再在式(6.35′)中恢复 $m$ 项,即可得 $\gamma_m$ 也是有限的。因此 $\beta,\gamma$ 和 $\gamma_m$ 都只是 $g$ 的函数

$$\beta=\beta(g),\qquad \gamma=\gamma(g),\qquad \gamma_m=\gamma_m(g) \tag{6.42'}$$

如果我们代替正规顶角而考虑连通 Green 函数 $G^{(n)}(p_i,m,\mu,g)$,则重整化关系为

$$G^{(n)}(p_i,m,\mu,g)=Z^{-\frac{n}{2}}G_0^{(n)}(p_i,m_0,\varepsilon,g_0) \tag{6.48}$$

此时重整化群方程为

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\frac{\partial}{\partial g}-\gamma_m m\frac{\partial}{\partial m}+n\gamma\right)G^{(n)}(p_i,m,\mu,g)=0 \tag{6.49}$$

## 6.3　标度不变性的破缺

由式(6.43)及重整化方程(6.35′)得到

$$\left[p_{i\mu}\frac{\partial}{\partial p_{i\mu}}+(1+\gamma_m)m\frac{\partial}{\partial m}-(d_{\Gamma^{(n)}}-n\gamma)-\beta\frac{\partial}{\partial g}\right]\Gamma^{(n)}(p_i,m,\mu,g)=0 \tag{6.50}$$

同样可得

$$\left[p_{i\mu}\frac{\partial}{\partial p_{i\mu}}+(1+\gamma_m)m\frac{\partial}{\partial m}-(d_{G^{(n)}}+n\gamma)-\beta\frac{\partial}{\partial g}\right]G^{(n)}(p_i,m,\mu,g)=0 \tag{6.51}$$

重整化群方程在写成这样的形式后,可描述在动量标度变换下正规顶角和 Green 函数结构的变化。记住在欧氏空间中

$$G^{(n)}=\frac{\delta^n}{\delta J\cdots\delta J}Z_E[J]=\frac{\delta^n}{\delta J\cdots\delta J}\ln\int[\mathscr{D}\varphi]\exp\left\{\int d^4x[\mathscr{L}+J\varphi]\right\}$$

而 $\mathscr{L}$ 中含 $m$ 的项为

$$-\frac{1}{2}Z_m^2 Z m^2 \varphi^2$$

在与质量无关的重整化方案中,$Z_m$ 及 $Z$ 与 $m$ 无关,由此可得

$$m\frac{\partial}{\partial m}G^{(n)} = -m^2 G_{\varphi^2}^{(n)}\Big|_{p=0} \tag{6.52}$$

其中,$G_{\varphi^2}^{(n)}$ 为包含重整化复合算符 $N(\varphi^2)=Z_m^2 Z\varphi^2$ 的顶点的 Green 函数,由式(6.52)知道这样定义的复合算符是有限的。因此式(6.51)可写为

$$\left(p_{i\mu}\frac{\partial}{\partial p_{i\mu}} - (d_{G^{(n)}} + n\gamma) - \beta\frac{\partial}{\partial g}\right)G^{(n)}(p_i, m, \mu, g)$$
$$+ (1+\gamma_m)m^2 G_{\varphi^2}(0, p_i, m, \mu, g) = 0 \tag{6.53}$$

比较式(6.53)与(6.24)知道,由于重整化的影响,标度变换的 Ward 恒等式受到破坏,式(6.53)和(6.24)的差别可解释为:$\varphi$ 场有一个“反常量纲”$\gamma$,$\varphi^2$ 有一个“反常量纲”$-\gamma_m$。此外式(6.51)还多一个 $\beta$ 项。下面将可以看到,这项代表有效耦合常数随标度的变化。式(6.51)和(6.53)称为标度变换的反常 Ward 恒等式。

## 6.4 重整化群方程的解

考虑有欧氏动量 $\lambda p_i$ 的外线的正规顶角 $\Gamma^{(n)}(\lambda p_i, m, \mu, g)$。令 $t=\ln\lambda$。由式(6.50)得到

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (1+\gamma_m)m\frac{\partial}{\partial m} - (d_{\Gamma^{(n)}} - n\gamma) - \beta\frac{\partial}{\partial g}\right)\Gamma^{(n)}(e^t p_i, m, \mu, g) = 0 \tag{6.54}$$

引入函数 $\bar{g}(t,g)$ 及 $\bar{m}(t,g,m)$,它们满足方程组

$$\frac{\partial\bar{g}(t,g)}{\partial t}\Big|_g = \beta(\bar{g}), \qquad \bar{g}(0,g) = g \tag{6.55}$$

$$\frac{\partial\bar{m}(t,g,m)}{\partial t}\Big|_{m,g} = -\bar{m}(1+\gamma_m(\bar{g})), \qquad \bar{m}(0,g,m) = m \tag{6.56}$$

式(6.55)和(6.56)实际上是常微分方程组,由于我们想明显表示出 $\bar{g}$ 和 $\bar{m}$ 对初值 $g$ 和 $m$ 的依赖,所以用了偏微分的记号。它们是偏微分方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (1+\gamma_m)m\frac{\partial}{\partial m} - \beta\frac{\partial}{\partial g}\right)F(t, m, g) = 0 \tag{5.57}$$

的特征系统。在与质量无关的减除方案中,$\beta(\bar{g})$ 和 $\gamma_m(\bar{g})$ 与 $\bar{m}$ 无关。因此方程组(6.55)和(6.56)的解为

$$t=\int_{g}^{\bar{g}(t)}\frac{\mathrm{d}g'}{\beta(g')}\tag{6.58}$$

$$\begin{aligned}\bar{m}(t)&=me^{-t}\exp\left(-\int_{0}^{t}\gamma_m(\bar{g}(t'))\mathrm{d}t'\right)\\&=me^{-t}\exp\left(-\int_{g}^{\bar{g}(t)}\mathrm{d}g'\frac{\gamma_m(g')}{\beta(g')}\right)\end{aligned}\tag{6.59}$$

为了看清 $\bar{g}(t)$及 $\bar{m}(t)$的物理意义,我们先考虑一个函数 $F(e^tp_i,m,\mu,g)$,它是由一些正规顶角构成的无量纲也无反常量纲的组合,例如

$$F=\frac{\Gamma^{(4)}(p_i)}{(\Gamma^{(2)}(p))^2}(p^2+m^2)^2\tag{6.60}$$

则由式(6.54)知道,$F(e^tp_i,m,\mu,g)$满足方程(6.57)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+(1+\gamma_m)m\frac{\partial}{\partial m}-\beta\frac{\partial}{\partial g}\right)F(e^tp_i,m,\mu,g)=0\tag{6.57'}$$

由式(6.58)得

$$0=\frac{\partial\bar{g}(t,g)}{\partial g}\frac{1}{\beta(\bar{g})}-\frac{1}{\beta(g)}\tag{6.61}$$

由上式及式(6.55)并注意到 $\bar{g}$ 与 $m$ 无关,可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+(1+\gamma_m)m\frac{\partial}{\partial m}-\beta\frac{\partial}{\partial g}\right)\bar{g}(t,g)=0\tag{6.62}$$

相似地,由式(6.59)并利用式(6.61),可得

$$\left.\frac{\partial\bar{m}}{\partial g}\right|_{m,t}=\frac{1}{\beta(g)}(\gamma_m(g)-\gamma_m(\bar{g}))\bar{m}\tag{6.63}$$

由式(6.56)及上式可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+(1+\gamma_m)m\frac{\partial}{\partial m}-\beta\frac{\partial}{\partial g}\right)\bar{m}(t,g,m)=0\tag{6.64}$$

因此式(6.57′)的满足初始条件的解为

$$F(e^tp_i,m,\mu,g)=F(p_i,\bar{m}(t),\mu,\bar{g}(t))\tag{6.65}$$

式(6.65)表示动量放大 $e^t$ 倍时的$F$与原来的动量但耦合常数为$\bar{g}(t)$而质量为 $\bar{m}(t)$的 $F$ 相等。因此$\bar{g}(t)$和 $\bar{m}(t)$起着有效耦合常数和有效质量的作用。式(6.55)和(6.56)给出有效耦合常数和有效质量随着动量标度改变的流动。

现在解一般的正规顶角 $\Gamma^{(n)}$ 的重整化群方程。由上面的式(6.62)和(6.64)知道

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+(1+\gamma_m)m\frac{\partial}{\partial m}-\beta\frac{\partial}{\partial g}\right)\Gamma^{(n)}(p_i,\bar{m}(t),\mu,\bar{g}(t))=0$$

利用式(6.62)并注意到 $\beta$ 和 $\gamma$ 不依赖 $m$,可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+(1+\gamma_m)m\frac{\partial}{\partial m}-\beta\frac{\partial}{\partial g}\right)\exp\left[d_{\Gamma^{(n)}}t-n\int_0^t \mathrm{d}t'\gamma(\bar{g}(t'))\right]$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial t}+(1+\gamma_m)m\frac{\partial}{\partial m}-\beta\frac{\partial}{\partial g}\right)\exp\left[d_{\Gamma^{(n)}}t-n\int_g^{\bar{g}(t)}\mathrm{d}g'\frac{\gamma(g')}{\beta(g')}\right]$$
$$=(d_{\Gamma^{(n)}}-n\gamma)\exp\left[d_{\Gamma^{(n)}}t-n\int_g^{\bar{g}(t)}\mathrm{d}g'\frac{\gamma(g')}{\beta(g')}\right]$$

由以上两式得到重整化群方程(6.53)的解为

$$\Gamma^{(n)}(e^t p_i,m,\mu,g)=\exp\left[d_{\Gamma^{(n)}}t-n\int_0^t\mathrm{d}t'\gamma(\bar{g}(t'))\right]\Gamma^{(n)}(p_i,\bar{m}(t),\mu,\bar{g}(t))$$
$$=\exp\left[d_{\Gamma^{(n)}}t-n\int_g^{\bar{g}(t)}\mathrm{d}g'\frac{\gamma(g')}{\beta(g')}\right]\Gamma^{(n)}(p_i,\bar{m}(t),\mu,\bar{g}(t))\tag{6.66}$$

将式(6.66)与经典场的标度变换性质比较知道,$\gamma$ 确实起着反常量纲的作用。

重整化群方程的推论可以用来得到大的欧氏动量下($t\to\infty$)$\Gamma^{(n)}$ 的渐近性质,也可以用来得到零质量理论中 $\Gamma^{(n)}$ 的红外渐近性质($t\to-\infty$)。对确定渐近行为最重要的是,有效耦合常数 $\bar{g}(t)$ 在 $t\to\infty$ 或 $-\infty$ 时是否有极限。按照式(6.55),在 $t$ 改变时有效耦合常数 $\bar{g}(t)$ 的流动是受 $\beta$ 函数控制的。在 $\beta>0$ 的区域 $\bar{g}(t)$ 随 $t$ 增大而增大,在 $\beta<0$ 的区域 $\bar{g}(t)$ 随 $t$ 增大而减小,在 $\beta=0$ 处则停止不动。例如,设在 $g>0$ 处 $\beta(g)>0$,则当 $t$ 由零趋于 $\infty$ 时有效耦合常数 $\bar{g}(t)$ 将单调地趋于 $\infty$。如果 $\beta(\bar{g})$ 有一个零点 $g_f$,$\beta(g_f)=0$,且当 $t\to\infty$(或 $-\infty$)时 $\bar{g}(t)$ 向 $g_f$ 运动,则 $\lim\limits_{t\to{\infty \atop -\infty}}\bar{g}(t)=g_f$。$\beta(g)$ 的零点 $g_f$ 称为重整化群的不动点。在图 6.1 所示的情况下 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}g}\beta(g)\right|_{g=g_f}<0$。这时无论 $\bar{g}(0)<g_f$ 或 $\bar{g}(0)>g_f$(但小于可能存在的另一个不动点)$t$ 由零趋于 $\infty$ 时都有 $\bar{g}(t)\to g_f$,所以这时 $g_f$ 称为紫外稳定的不动点。与此相反,如图 6.2 所示的情况下 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}g}\beta(g)\right|_{g=g_f}>0$,这时当 $t\to-\infty$ 时,$\bar{g}(t)\to g_f$,$g_f$ 称为红外稳定的不动点。当存在紫外稳定的不动点时,如果积分 $\int_0^\infty \mathrm{d}t'(\gamma(\bar{g}(t'))-\gamma(g_f))$ 收敛,式(6.66)右方第一个因子等于

$$有限数\times\exp[(d_{\Gamma^{(n)}}-n\gamma(g_f))t]$$

如果在 $0<\bar{g}<g_f$ 之间 $\gamma_m(\bar{g})>-1$,则由式(6.59)知道

$$\lim_{t\to\infty}\bar{m}(t)=0$$

这时式(6.66)化为

$$\Gamma^{(n)}(e^t p_i,m,\mu,g)=有限数\times\exp[(d_{\Gamma^{(n)}}-n\gamma(g_f))t]\Gamma^{(n)}(p_i,0,\mu,g_f)\tag{6.67}$$

在写出上式时，我们注意到，当 $p_i$ 为欧氏动量[即 $p_i^2>0,(p_{i_1}+p_{i_2}+\cdots)^2>0$]时，零质量粒子理论的 Green 函数没有奇异，因此在等式右方可以取零质量极限。在这种情况下我们说，标度不变性在 $t\to\infty$ 时恢复了，只不过 $\varphi$ 场有一个反常量纲 $\gamma(g_f)$。如果积分

$$\int_0^\infty \mathrm{d}t'[\gamma(\bar{g}(t'))-\gamma(g_f)]$$

不收敛，则标度不变性有程度轻微的破坏。

由式(6.36′)知道，$g=0$ 一定是重整化群的一个不动点。在图 6.1 的情况下，$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}g}\beta(g)\right|_{g=0}>0$，因此 $g=0$ 是红外稳定而紫外不稳定的。在图 6.2 的情况，$g=0$ 是紫外稳定而红外不稳定的。在 $g=0$ 附近 $\beta(g)$ 可以用微扰论计算。在标量场 $\varphi^4$ 作用理论中，$\beta$ 函数在微扰论最低阶可以由第五章的式(5.93)得到，结果是

$$\begin{aligned}\beta(g)&=-g\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\ln\left(1+\frac{3g_0\mu^{-\varepsilon}}{16\pi^2\varepsilon}\right)+O(g_0^2)\right]\Bigg|_{g_0,\varepsilon}\\&=\frac{3g^2}{16\pi^2}+O(g^3)\end{aligned}$$

因此 $g=0$ 不是紫外稳定的不动点，以后我们将看到，对非 Abel 规范场，$g=0$ 是紫外稳定的不动点。至于图 6.1 中的 $g_f$，在微扰论计算中没有发现它存在的证据，假如它存在，$g_f$ 的值必须较大，不能用微扰论算出来。

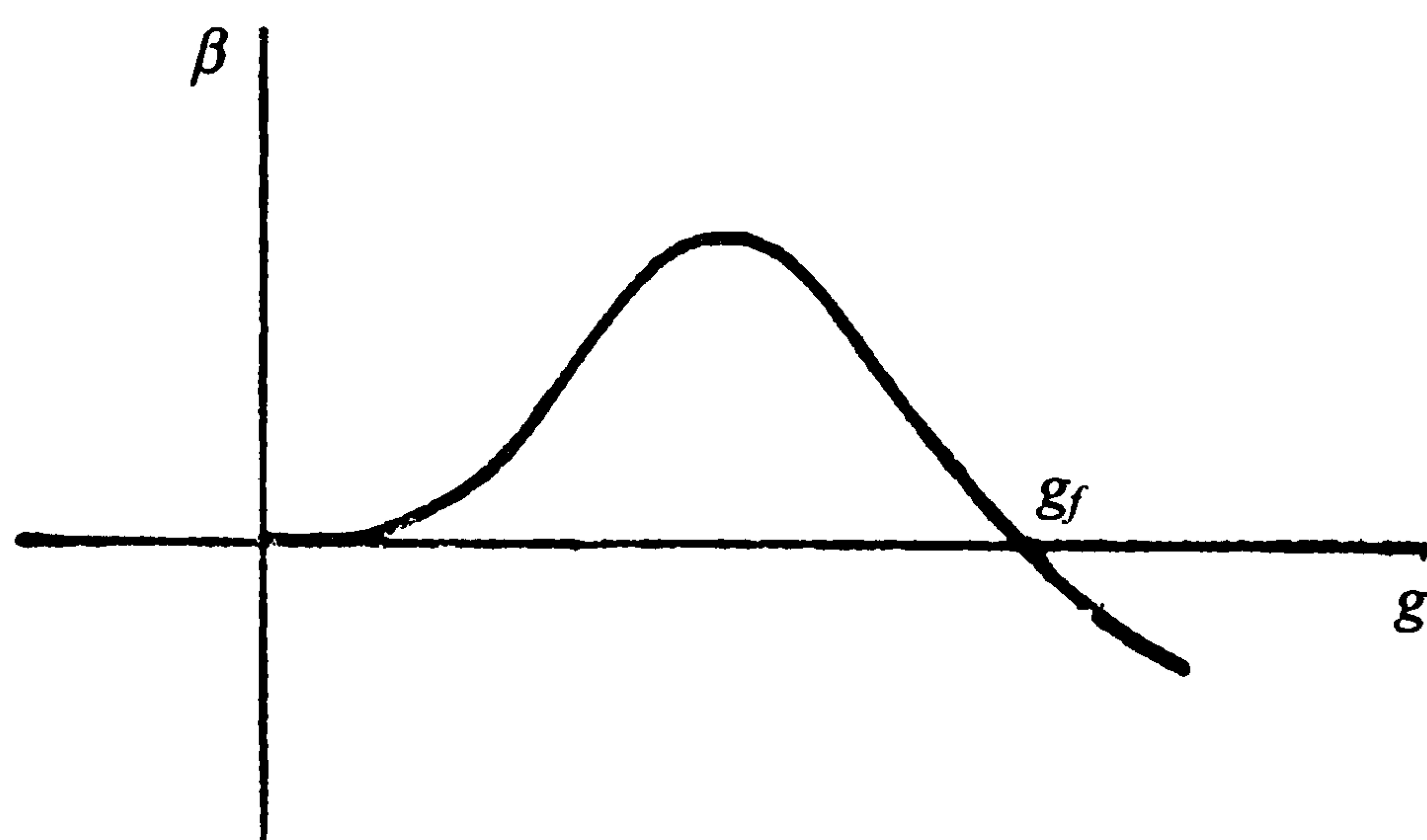



图 6.1

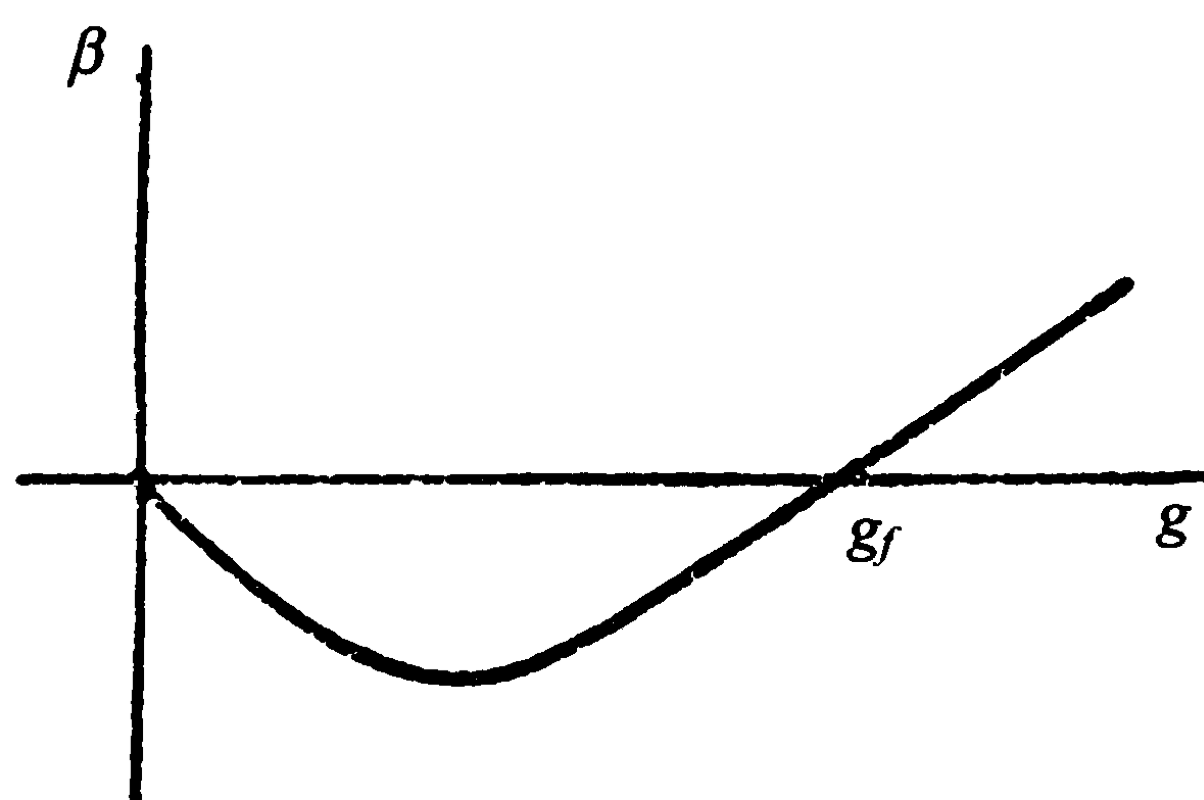



图 6.2

在式(6.66)和(6.59)中，$g'$ 的积分区间都是 $[g,\bar{g}(t)]$。因此如果限在 $g$ 和 $\bar{g}$ 小的范围内，用重整化群方程的结果，我们可以用微扰论计算 Callan-Symanzik 函数 $\beta,\gamma$ 和 $\gamma_m$。对标量场理论

$$\beta=b_0g^2+b_1g^3+b_2g^4+\cdots$$

$$b_0 = \frac{3}{16\pi^2}, \qquad b_1 = -\frac{17}{3}\frac{1}{(16\pi^2)^2} \tag{6.68}$$

由式(6.58)

$$\begin{aligned} t &= \int_g^{\bar{g}(t)} \frac{\mathrm{d}g'}{b_0 g'^2}\left(1 + \frac{b_1}{b_0}g' + \frac{b_2}{b_0}g'^2 + \cdots\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{b_0}\left(-g'^{-1} - \frac{b_1}{b_0}\ln g' + \frac{b_1^2 - b_2 b_0}{b_0^2} + O(g')\right)\Bigg|_g^{\bar{g}(t)} \end{aligned} \tag{6.69}$$

在微扰论最低阶

$$\bar{g}(t) = \frac{g}{1 - b_0 g t} \tag{6.70}$$

在式(6.69)中用微扰论的低阶结果作迭代,可以把 $\bar{g}(t)$展开为 $g$ 及 $gt$ 的双重级数。由于式(6.66)和(6.59)中 $g'$的积分都是 $g$ 和 $\bar{g}(t)$的函数,$\Gamma^{(n)}(e^t p_i, m, \mu, g)$除含 $e^{d_{\Gamma^{(n)}} t}$ 和 $me^{-t}$这样的可以由量纲分析得到的因子外,只是 $\bar{g}(t)$和 $g$ 的函数。因此 $\Gamma^{(n)}(e^t p_i, m, \mu, g)$可以展开为

$$\begin{aligned} \Gamma^{(n)}(e^t p_i, m, \mu, g) &= \exp(d_{\Gamma^{(n)}} t)\sum_{l,m} f_{lm}(p_i, e^{-t}m, \mu) g^l \bar{g}^m \\ &= \exp(d_{\Gamma^{(n)}} t)\sum_{l,m} f'_{lm}(p_i, e^{-t}m, \mu) g^l (gt)^m \end{aligned} \tag{6.71}$$

其中,对 $gt$ 的展开都来自 $\bar{g}(t)$的展开式,由于式(6.70)准确到 $O(g^2, g^3 t)$的项,利用重整化群方程的公式(6.66),只需要对 $\beta$, $\gamma$ 和 $\gamma_m$ 以及 $\Gamma^{(n)}(p_i, m, \mu, g)$的微扰论最低阶计算,就得到了部分求和式

$$\exp(d_{\Gamma^{(n)}} t)\sum_m f'_{l_0 m}(p_i, me^{-t}, \mu)(gt)^m g^{l_0} \tag{6.72}$$

其中,$l_0$ 是 $l$ 的最低值。重整化群方程的公式在动量的欧氏区把许多微扰论高阶图中由重整化产生的$(gt)^m \sim \left(g\ln\frac{p_i^2}{\mu^2}\right)^m$ 项全部求和了。因此在 $t \gg 1$, $\frac{g}{4\pi^2} \ll 1$, $\frac{\bar{g}(t)}{4\pi^2} \ll 1$ 时重整化群方程的结果是对微扰论的改进$\left[\text{由式(6.68)知微扰展开参数是}\frac{g}{4\pi^2}\right]$。

最后我们从另一个角度说明 $\bar{g}(t, g)$的意义。如果保持 $\varepsilon$ 不变,则固定 $g(\mu) = g$ 等价于固定 $g_0$。比较式(6.55)及 $\beta$ 的定义式(6.36′)可知,$\bar{g}(t, g)$实际上是在 $g(\mu) = g$的理论中把重整化标度参数 $\mu$ 改变为 $e^t\mu$ 时的耦合常数,$g(e^t\mu) = \bar{g}(t, g)$。

## 6.5　重整化群方程的一般形式

前面对重整化群方程的推导可以直接推广到包含几种场和几个耦合常数的情况。对规范理论有一个新的参数，在线性协变规范条件下，拉氏量中的规范固定项 $-\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\mu^a)^2$ 包含参数 $\alpha$。由第五章的式(5.221)知道 $\alpha$ 的重整化关系为

$$\alpha_0 = Z_\alpha \alpha = Z_A \alpha \tag{6.73}$$

其中，$Z_A$ 为规范势 $A_\mu$ 的重整化常数。在一般情况下，设理论中包含若干种场 $\varphi_l(l=1,2,\cdots,N)$，其质量为 $m_l$。$\varphi_l$ 中可有 $k$ 个单纯群 $G_k$ 的规范场 $A_\mu^{(k)}$ 和相应的 Fadeev-Popov 虚拟场。又设理论中包含若干个耦合常数 $g_a$，其中有 $k$ 个规范耦合常数，则有 $n_l$ 个 $\varphi_l$ 场顶点的正规顶角 $\Gamma^{(n_l)}$ 满足的重整化群方程，可写为

$$\begin{aligned}\Big(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta_a(g,\alpha)\frac{\partial}{\partial g_a} - \gamma_{ml}(g,\alpha)m_l\frac{\partial}{\partial m_l}\\ + \delta_k(g,\alpha)\frac{\partial}{\partial\alpha_k} - n_l\gamma_l(g,\alpha)\Big)\times\Gamma^{(n_l)}(p_i,m,\mu,g) = 0\end{aligned} \tag{6.74}$$

其中，$\beta_a,\gamma_l,\gamma_{ml}$ 的定义是式(6.36)′、(6.37′)及(6.47)的直接推广

$$\delta_k(g,\alpha) = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\alpha_k\Big|_{\alpha_{0k},g a_0,m_0,\varepsilon} = -2\alpha_k\gamma_{A^{(k)}} \tag{6.75}$$

$\alpha_k$ 是 $A_\mu^{(k)}$ 的规范固定参数，$\gamma_{A^{(k)}}$ 是 $A_\mu^{(k)}$ 的反常量纲。在取 Landau 规范时，规范固定参数 $\alpha_k=0$，在这个规范下，重整化群方程不含 $\frac{\partial}{\partial\alpha_k}$ 项。

对于包含复合场顶点的正规顶角，也可以得到重整化群方程。由 5.1 节中的讨论知道，复合场算符在重整化中一般要与量子数相同量纲也相同或较低的其他复合场相混合。令 $\Gamma_{O_i}^{(n_l)}$ 为包含一个正规乘积复合算符 $O_i$ 的顶点及 $n_l$ 个 $\varphi_l$ 场顶点的重整化正规顶角，$\Gamma_{O_i^0}^{(n_l)}$ 为相应的未重整顶角，则重整化关系为

$$\Gamma_{O_i}^{(n_l)}(m_l,\mu,g_a,\alpha_k) = Z_{ij}\prod_l Z_l^{\frac{1}{2}n_l}\Gamma_{O_j^0}^{(n_l)}(m_{0l},g_{0a},\alpha_{0k},\varepsilon) \tag{6.76}$$

因此重整化群方程为

$$\left[\delta_{ij}\Big(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta_a\frac{\partial}{\partial g_a} - \gamma_{m_l}m_l\frac{\partial}{\partial m_l} + \delta_k\frac{\partial}{\partial\alpha_k} - n_l\gamma_l\Big) + \gamma_{ij}\right]\Gamma_{O_j}^{(n_l)}(m_l,\mu,g_a,\alpha_k) = 0 \tag{6.77}$$

其中

$$\gamma_{ij} = \left(Z\mu \frac{\partial}{\partial \mu} Z^{-1}\right)_{ij}\Big|_{g_{0a},\epsilon} \tag{6.78}$$

$Z=(Z_{ij})$为复合算符的重整化常数矩阵。矩阵$(\gamma_{ij})$称为复合场的反常量纲矩阵。

如果我们代替正规顶角而考虑连通 Green 函数 $G_{O_i}^{(n_l)}$,则重整化关系是

$$G_{O_i}^{(n_l)} = Z_{ij}\prod_l Z_l^{-\frac{1}{2}n_l} G_{O_j 0}^{(n_l)} \tag{6.79}$$

由于复合场顶点没有外线,所以矩阵$(Z_{ij})$不取逆。此时重整化群方程为

$$\left[\delta_{ij}\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta_a\frac{\partial}{\partial g_a} - \gamma_{m_l} m_l \frac{\partial}{\partial m_l} + \delta_k\frac{\partial}{\partial \alpha_k} + n_l\gamma_l\right) + \gamma_{ij}\right] G_{O_j}^{(n_l)} = 0 \tag{6.80}$$

一般形式下的重整化群方程的解也可以仿照对式(6.35)的解法做出来。为简单起见,取 Landau 规范,由方程(6.74)得到

$$\begin{aligned}&\Gamma^{(n_l)}(e^t p_i, m_l, \mu, g_a)\\ &= \exp(d_\Gamma t)\exp\left[-\sum_l n_l\int_0^t \mathrm{d}t' \times \gamma_l(\bar{g}_a(t'))\right]\Gamma^{(n_l)}(p_i, \bar{m}_l, \mu, \bar{g}_a)\end{aligned} \tag{6.81}$$

其中

$$\bar{m}_l(t) = e^{-t} m_l \exp\left[-\int_0^t \mathrm{d}t' \gamma_{m_l}(\bar{g}(t'))\right] \tag{6.82}$$

而有效耦合常数 $\bar{g}_a$ 由如下的微分方程组决定

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \bar{g}_a(t, g_1, g_2, \cdots)}{\partial t}\Big|_{g_1, g_2\cdots} = \beta_a(\bar{g}_1(t), \bar{g}_2(t), \cdots)\\ &\bar{g}_a(0, g_1, g_2, \cdots) = g_a, \qquad a = 1,2,\cdots,A\end{aligned} \tag{6.83}$$

方程组(6.83)决定 $A$ 维耦合常数空间中一条单参数(即 $t$)曲线。在 $t\to\infty$或$-\infty$时方程组(6.83)的解的行为有如下几种可能性:①$\bar{g}_a(t)\to\infty$。②$\bar{g}_a(t)\to g_{af}(a=1,2,\cdots,A)$,其中 $g_{af}$满足$\beta_a(g_{1f}, g_{2f},\cdots)=0$。重整化群的不动点$(g_{af})$对其在$A$ 维参数空间中的邻域,可以是紫外吸引的或者是红外吸引的,也可能对一部分的邻域是紫外吸引的而对另一部分邻域是红外吸引的。在这种情况下,标度不变性可以恢复或只有轻度的破坏,但是场量具有反常量纲。原点$(g_a)=0$一定是一个不动点。③在 $t\to\pm\infty$时曲线$(\bar{g}_a(t))$趋于耦合常数空间中的一个环,称为极限环。这时顶角函数在 $t\to\pm\infty$时有振荡行为。④从微分方程的理论来看,曲线$(\bar{g}_a(t))$在 $t\to\pm\infty$的过程中也可能无限接近于耦合常数空间中的任何一点,这种行为称为各态历经。

## 6.6 Callan-Symanzik 函数的一些性质

上面得到的重整化群方程可适用于不同的重整化减除方案。例如,在维数正

规化范围内也可以采取与最小减除不同的所谓修改的最小减除方案(参看第八章末)。不同的减除方案相差一个有限的重整化。我们来讨论两种不同方案中 Callan-Symanzik 函数之间的关系[8]。令 $g$ 和 $g'$ 为两种方案中的重整化耦合常数,则有

$$g' = gf_g(g)$$

其中,$f_g(g)$为有限数。设两种减除方案都是与质量无关的,则由于 $f_g(g)$是无量纲数,它不能显含 $\mu$。由上式得到新的方案中的 $\beta$ 函数为

$$\beta'(g') = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} g' \bigg|_{g_0, \epsilon} = \beta(g) \frac{\partial g'}{\partial g} \tag{6.84}$$

相似地,令 $Z, Z_m$ 及 $Z', Z'_m$ 分别为两种方案中场及质量 $m$ 的重整化常数,则

$$Z'(g') = Z(g)f(g), \qquad Z'_m(g') = Z_m(g)f_m(g)$$

$f(s)$和 $f_m(g)$都不显含 $\mu$。由上式得到新方案中的场及质量 $m$ 的反常量纲为

$$\gamma'(g') = \frac{1}{2}\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z'(g') \bigg|_{g_0, \epsilon} = \gamma(g) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial g}\ln f(g)\right)\beta(g)$$

$$\gamma'_m(g') = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z'_m(g') \bigg|_{g_0, \epsilon} = \gamma_m(g) + \left(\frac{\partial}{\partial g}\ln f_m(g)\right)\beta(g) \tag{6.85}$$

由上面的结果可以导出如下一些结论。由式(6.84)得到,如果

$$\beta(g_f) = 0$$

则

$$\beta'(g'_f) = 0, \qquad g'_f = g_f f_g(g_f) \tag{6.86}$$

这表示,如果在原来的方案中 $\beta$ 函数有一个零点,则在新的方案中,它也有一个零点。由式(6.84)还可以得到

$$\frac{\partial \beta'(g')}{\partial g'}\bigg|_{g'=g'_f} = \left[\frac{\partial}{\partial g'}\left(\frac{\partial g'}{\partial g}\right)\beta(g) + \left(\frac{\partial g'}{\partial g}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial g'}\right)\frac{\partial \beta}{\partial g}\right]_{g=g_f} = \frac{\partial \beta}{\partial g}\bigg|_{g=g_f} \tag{6.87}$$

式(6.87)表示,$\beta$ 函数在零点处的斜率在两个方案中相同。由式(6.85)～(6.87)知

$$\gamma'(g'_f) = \gamma(g_f) \tag{6.88}$$

$$\gamma'_m(g'_f) = \gamma_m(g_f) \tag{6.89}$$

式(6.88)和(6.89)表示,在两种方案中,在 $\beta$ 函数的零点处场和质量的反常量纲是一样的。由 6.4 节的讨论我们知道 $g_f$ 的存在,$\frac{\partial \beta}{\partial g}\Big|_{g=g_f}$ 的符号及 $\gamma_m(g_f)$是有直

接物理意义的。因此这里得到的结果说明了理论的自洽性。

Callan-Symanzik 函数可以在微扰论中逐阶计算。设 $\beta(g)$ 的微扰展开式为

$$\beta(g) = b_0 g^{n_1} + b_1 g^{n_2} + b_2 g^{n_3} + \cdots \tag{6.90}$$

(对标量场理论 $n_1 = 2, n_i = n_{i-1} + 1$。对规范理论 $n_1 = 3, n_i = n_{i-1} + 2$)则 $g'$ 的微扰展开式的形式为

$$g' = g(1 + C_1 g^{n_1 - 1} + C_2 g^{n_2 - 1} + C_3 g^{n_3 - 1} + \cdots) \tag{6.91}$$

上式的逆为

$$g = g'(1 - C_1 g'^{n_1 - 1} + O(g'^{n_2 - 1})) \tag{6.92}$$

利用式(6.90)~(6.92)及(6.84)得到

$$\begin{aligned}
\beta'(g') &= (1 + n_1 C_1 g^{n_1 - 1} + O(g^{n_2 - 1}))(b_0 g^{n_1} + b_1 g^{n_2} + O(g^{n_3})) \\
&= (1 + n_1 C_1 g'^{n_1 - 1} + O(g'^{n_2 - 1}))(b_0 g'^{n_1} + b_1 g'^{n_2} - n_1 b_0 C_1 g'^{2n_1 - 1} + O(g'^{n_3})) \\
&= b_0 g'^{n_1} + b_1 g'^{n_2} + O(g'^{n_3})
\end{aligned} \tag{6.93}$$

比较式(6.90)及(6.93)得知,在两个与质量无关的减除方案中,$\beta$ 函数的微扰展开式前两项的系数相同。由式(6.84)和(6.85)知,$\gamma$ 和 $\gamma_m$ 的微扰论展开式的头一项在两个方案中是相同的。

在规范理论中 Callan-Symanzik 函数 $\beta(g,\alpha)$,$\gamma(g,\alpha)$ 和 $\gamma_m(g,\alpha)$ 一般是与规范参数 $\alpha$ 有关的。在最小减除方案中,耦合常数 $g$ 的重整化关系为

$$\begin{aligned}
g_0 &= \mu^{\varepsilon/2} g Z_g \\
Z_g &= \left(1 + \frac{Z_g^{(1)}}{\varepsilon} + \frac{Z_g^{(2)}}{\varepsilon^2} + \cdots\right)
\end{aligned} \tag{6.94}$$

注意,在这个减除方案中,$Z_g$ 的展开式的 $\varepsilon^0$ 阶项为 1。我们固定 $g_0$ 和 $\varepsilon$ 而讨论这些关系式随 $\mu$ 和 $\alpha$ 的变化。由式(6.94)得到

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln g\bigg|_{g_0,\varepsilon,\mu} &= \frac{\partial}{\partial\alpha}\ln(Z_g)\bigg|_{g_0,\varepsilon,\mu} \\
&= \left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial Z_g^{(1)}}{\partial\alpha} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial Z_g^{(2)}}{\partial\alpha} + \cdots\right)\left(1 + \frac{Z_g^{(1)}}{\varepsilon} + \frac{Z_g^{(2)}}{\varepsilon^2} + \cdots\right)^{-1}
\end{aligned} \tag{6.95}$$

但是 $g$ 是有限数,当 $\varepsilon \to 0$ 时与 $\varepsilon$ 无关。因此上式表示

$$\frac{\partial Z_g^{(1)}}{\partial\alpha} = 0$$

由上式及后面证明的式(6.105)知

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\beta(g,\alpha) = 0 \tag{6.96}$$

式(6.96)表示,在最小减除方案中,$\beta=\beta(g)$与规范参数 $\alpha$ 无关。相似地,自 $m_0=Z_m m$ 可证,在最小减除方案中,$\gamma_m$ 与 $\alpha$ 无关。但是场的反常量纲 $\gamma$ 还是与 $\alpha$ 有关的。这里得到的结果与前面的结果结合起来说明,$g_f$ 的存在、$\left.\frac{\partial\beta}{\partial g}\right|_{g=g_f}$ 和 $\gamma_m(g_f)$ 的值以及 $\beta$ 的微扰展开式的前两项在与质量无关的减除方案中都是与规范参数 $\alpha$ 无关的。

一类重要的复合场算符是与对称性相应的守恒流或部分守恒流。部分守恒流 $J_\mu$ 满足方程

$$\partial_\mu J_\mu = \Delta \tag{6.97}$$

其中,$\Delta$ 含量纲小于4的算符。$J_\mu$ 的量纲等于或大于3,因此 $\Delta$ 显含质量。例如,在规范理论中

$$\gamma_\mu(\partial_\mu - \mathrm{i}gA_\mu^a T_a)\psi + m\psi = 0$$

轴矢流 $J_{5\mu}^a=\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5 T_a\psi$ 满足方程(如果没有第十章中讨论的反常)

$$\partial_\mu J_{5\mu}^a = 2\mathrm{i}m\bar{\psi}\gamma_5 T_a\psi \tag{6.98}$$

我们来证明守恒流的反常量纲 $\gamma_J=0$,而部分守恒流的反常量纲在与质量无关的减除方案中也是零。由于这些流的荷是对称群的生成元,它们满足对易关系

$$[J_0(x),\phi(y)]\delta(x_0-y_0)=\delta\phi(x)\delta^4(x-y) \tag{6.99}$$

其中,$\delta\phi$ 是 $\phi$ 场在对称群下的改变量。由式(6.99)可以得到连通 Green 函数的 Ward 恒等式

$$\begin{aligned}&\partial_\mu\langle 0\mid T(J_\mu(x)\phi_1(y_1)\phi_2(y_2)\cdots\phi_n(y_n))\mid 0\rangle\\ =&\langle 0\mid T(\Delta(x)\phi_1(y_1)\cdots\phi_n(y_n))\mid 0\rangle\\ &+\sum_i\langle 0\mid T(\phi_1(y_1)\cdots\delta\phi_i(y_i)\cdots\phi_n(y_n))\mid 0\rangle\delta^4(x-y_i)\end{aligned} \tag{6.100}$$

以算符

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta_a\frac{\partial}{\partial g_a}-\gamma_{m_l}m_l\frac{\partial}{\partial m_l}+\delta\frac{\partial}{\partial\alpha}$$

作用于式(6.100)并利用式(6.77)得到(设 $\delta\phi$ 为 $\phi_i$ 的一次式)

$$\begin{aligned}&-\gamma_J\partial_\mu\langle 0\mid T(J_\mu(x)\phi_1(y_1)\cdots\phi_n(y_n))\mid 0\rangle\\ =&\left\langle 0\right|T\left(\left(-\gamma_\Delta-\gamma_{m_l}m_l\frac{\partial}{\partial m_l}\right)\Delta(x)\phi_1(y_1)\cdots\phi_n(y_n)\right)\left|0\right\rangle\end{aligned} \tag{6.101}$$

对守恒流 $\Delta=0$,由式(6.101)立即得到

$$\gamma_J = 0 \tag{6.102}$$

对部分守恒流 $\Delta(x)$中显含有质量量纲的参数 $m_l$。由于在与质量无关的减除方案中 $\gamma_J$ 与 $m_l$ 无关,为求 $\gamma_J$ 可在式(6.101)中取 $m_l=0$,这样也得到式(6.102)。同时还可得到

$$\gamma_\Delta \Delta = -\gamma_{m_l} m_l \frac{\partial}{\partial m_l}\Delta$$

例如,对轴矢流 $J_{5\mu}^a$,由上式及式(6.98)可得

$$\gamma_{J_{5\mu}} = -\gamma_m \tag{6.103}$$

我们来讨论在维数正规化最小减除方案下计算 $\beta$ 函数和反常量纲 $\gamma$ 的方法。考虑规范理论的情况。由重整化关系式 $g\mu^{\frac{\varepsilon}{2}} = Z_g^{-1}(g,\varepsilon)g_0$,$g$ 是$g_0\mu^{-\frac{\varepsilon}{2}}$和 $\varepsilon$ 的函数,可写为 $g=g\left(g_0\mu^{-\frac{\varepsilon}{2}},\varepsilon\right)$。先保持 $\varepsilon\neq0$,引入函数

$$\beta(g,\varepsilon) = -g\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_g\left(g\left(g_0\mu^{-\frac{\varepsilon}{2}}\right),\varepsilon\right)_{g_0,\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2}g$$

$\beta(g)$是 $\beta(g,\varepsilon)$在 $\varepsilon\to0$ 时的极限,上式中脚标'$g_0,\varepsilon$'表示保持不变。由上式及

$$\begin{aligned} &g\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_g\left(g\left(g_0\mu^{-\frac{\varepsilon}{2}},\varepsilon\right),\varepsilon\right)_{g_0,\varepsilon} \\ &= g\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}g\right)_{g_0,\varepsilon} Z_g^{-1}\frac{\partial}{\partial g}Z_g = g\beta(g,\varepsilon)Z_g^{-1}\frac{\partial}{\partial g}Z_g(g,\varepsilon)\end{aligned}$$

得到

$$\left[\beta(g,\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}g + g\beta(g,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial g}\right]Z_g(g,\varepsilon) = 0 \tag{6.104}$$

在微扰论计算中到 $L$ 圈图一级,$Z_g$ 最多有 $\varepsilon$ 的 $L$ 阶极点,因此可写为

$$Z_g = 1 + \sum_{i=1}^{L}\frac{Z_g^{(i)}(g)}{\varepsilon^i}$$

因 $\varepsilon\to0$ 时 $\beta(g,\varepsilon)\to\beta(g)$为有限数,故可设

$$\beta(g,\varepsilon) = \beta(g) + \sum_{i=1}^{\infty}\beta^{(i)}(g)\varepsilon^i$$

在式(6.104)左方,$\beta^{(i)}(i>L)$的项当 $\varepsilon\to0$ 时都各自趋于零。因$\frac{\partial}{\partial g}Z_g\propto\frac{1}{\varepsilon}$,将上面两个展开式代入式(6.104)可得

$$\beta^{(L)} = \beta^{(L-1)} = \cdots = \beta^{(2)} = 0, \qquad \beta^{(1)} = -\frac{g}{2}$$

$$\beta(g,\varepsilon) = \beta(g) - \frac{\varepsilon}{2}g \tag{6.105}$$

将上式再代入式(6.104)得到

$$\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}(gZ_g(g,\varepsilon))-\frac{\varepsilon}{2}g^2\frac{\partial}{\partial g}Z_g(g,\varepsilon)=0$$

由上式中 $\varepsilon^{-1}$各阶项的系数得到

$$\beta(g)=\frac{1}{2}g^2\frac{\mathrm{d}Z_g^{(1)}}{\mathrm{d}g} \tag{6.106}$$

$$\frac{1}{2}g^2\frac{\mathrm{d}Z_g^{(i+1)}}{\mathrm{d}g}=\beta(g)\frac{\mathrm{d}(gZ_g^{(i)})}{\mathrm{d}g},\qquad i\geqslant 1 \tag{6.107}$$

式(6.106)表示,在维数正规化最小减除方案中 $\beta(g)$只与 $Z_g$ 的一阶极点项有关。式(6.107)表示,$Z_g$ 的高阶极点项都由一阶极点项决定。此式可以用来检验高圈图计算的正确性。

公式(6.106)把 $\beta(g)$作为 $\mu$ 的隐函数的微商换为在 $g$ 的幂级数中对 $g$ 做微商,计算较为简便。对反常量纲 $\gamma$ 也有类似的公式。由 $\gamma$ 的定义得到方程

$$\left[\gamma(g,\varepsilon)-\frac{1}{2}\beta(g,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial g}\right]Z(g,\varepsilon)=0$$

由上式、式(6.105)及展开式

$$Z(g,\varepsilon)=1+\sum_{i=1}^{L}\frac{Z^{(i)}(g)}{\varepsilon^i}$$

得到,在最小减除方案中

$$\gamma(g)=-\frac{1}{4}g\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}g}Z^{(1)}(g) \tag{6.106$'$}$$

同样,$Z(g,\varepsilon)$的高阶极点项是由一阶极点项决定的。对应于上式,复合算符的反常量纲矩阵有公式

$$[\gamma_O]_{ij}=-\frac{1}{2}g\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}g}[Z_O^{(1)}(g)]_{ij} \tag{6.106$''$}$$

上式与式(6.106′)系数的差别是由于场的反常量纲和复合算符的反常量纲在定义式中有一个系数$\frac{1}{2}$的差别。

## 6.7　渐 近 自 由

在 6.4 节中已经指出对只有一个耦合常数的理论 $g=0$ 一定是重整化群的一个不动点。那里还指出了对标量场 $\varphi^4$ 作用理论这个不动点是红外稳定而不是紫外稳定的。显然,在有 $A$ 个耦合常数 $g_a$ 的理论中,$g_a=0(a=1,2,\cdots,A)$一定是重整化群的不动点。研究这个不动点的性质只需做微扰论最低阶的计算就可以

了。

作为 Abel 规范理论的量子电动力学只有一个耦合常数 $e$。它的电荷和波函数重整化常数为

$$Z_g = Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-\frac{1}{2}} = Z_3^{-\frac{1}{2}}$$

$$Z_3^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{e^2}{12\pi^2 \varepsilon} + O(e^4)$$

由上式及式(6.105)得到

$$\beta_e = \frac{e^3}{12\pi^2} + O(e^5) \tag{6.108}$$

由于$\left.\frac{\mathrm{d}\beta_e}{\mathrm{d}e}\right|_{e\simeq 0} > 0$,在量子电动力学中 $e=0$ 不是紫外稳定的不动点。相似地,在标量电动力学中,由真空极化的标量场单圈图得到

$$\beta_e = \frac{e^3}{48\pi^2} + O(e^5) \tag{6.109}$$

$e=0$ 也不是紫外稳定点。

从物理上说,关于量子电动力学的这个结果是容易理解的。在量子电动力学中电子在它的周围产生真空极化,它的电荷为邻近的极化电荷所屏蔽。因此愈接近电子应当观察到愈大的电荷。而大的欧氏动量相应于小的距离,因此 $t$ 增大时有效电荷也增大。一般的 Abel 规范场论的 $\beta$ 函数是各种与规范场作用的粒子的真空极化圈图的贡献之和,因此规范耦合常数的零点不是 Abel 规范场的紫外稳定点。

在文献[8],[9]中对所有可重整的场论进行了研究,这包括多种标量场的相互作用,标量场与 Dirac 场的汤川型作用以及规范作用。他们发现,对所有不包含非 Abel 规范场的理论,耦合常数 $g_1 = g_2 = \cdots = g_A = 0$ 都不是紫外稳定的不动点。非 Abel 规范理论是唯一的例外[10]。

先考虑纯非 Abel 规范场的情况。此时 $\beta(g)$的展开式有如下的形式

$$\beta(g) = b_0 g^3 + b_1 g^5 + O(g^7) \tag{6.110}$$

由第五章式(5.138)及(6.106)得到

$$b_0 = -\frac{1}{8\pi^2}\frac{11}{6}C_2(A) \tag{6.111}$$

其中,$C_2(A)$为规范群伴随表示的 Casimir 算符。由于

$$\left.\frac{\mathrm{d}\beta(g)}{\mathrm{d}g}\right|_{g\simeq 0} < 0$$

纯非 Abel 规范场论中 $g=0$ 是紫外稳定的不动点。因此在纯非 Abel 规范理论中

当 $t\to\infty$ 时有效耦合常数 $\bar{g}(t)\to 0$，这意味着，在小距离处场的耦合变弱。这种性质称为渐近自由。非 Abel 规范场论是已知的场论中唯一具有这种性质的理论。从物理上说，这表示在小距离处非 Abel 规范场的自作用有一种反屏蔽性。在文献[11]中利用 Landau 反磁性理论对非 Abel 规范场的这一性质做了物理的解释。

进一步考虑与规范场作用的 Fermi 子。加入 Fermi 子后，由第五章式(5.149)得

$$b_0 = -\frac{1}{8\pi^2}\left[\frac{11}{6}C_2(A) - \frac{2}{3}T(\psi)\right] \tag{6.112}$$

其中

$$\delta_{ab}T(R) = \mathrm{Tr}(T_a(R)T_b(R))$$

$T_a(R)$ 为生成元在表示 $R$ 中的矩阵。$T(\psi)$ 为 Fermi 子所属表示的 $T$ 值。由式(6.112)可以看到，Fermi 子与规范场的作用趋向于破坏渐近自由。

设 $r$ 为李代数的维数，$d(R)$ 为表示 $R$ 的维数，则由于

$$C_2(R)\delta_{ij} = \sum_a (T_a T_a)_{ij}$$

我们有关系式

$$rT(R) = d(R)C_2(R)$$

对规范群为 SU($N$)的情况

$$C_2(A) = T(A) = N \tag{6.113}$$

对 SU($N$)群的 $N$ 维基础表示

$$T(N) = \frac{1}{2}, \qquad C_2(N) = \frac{N^2-1}{2N} \tag{6.114}$$

因此如理论中包含 $N_f$ 个 SU($N$)群基础表示的 Fermi 子多重态，则

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{8\pi^2}\left(\frac{11N}{6} - \frac{N_f}{3}\right) + O(g^5) \tag{6.115}$$

在

$$N_f < \frac{11}{2}N \tag{6.116}$$

时规范理论是渐近自由的。在作为强作用规范理论的量子色动力学中，规范群为 SU(3)，此时在基础表示的 Fermi 子多重态数不大于 16 时理论是渐近自由的。

在非 Abel 规范理论中包含标量场时情况复杂得多，标量场的作用一方面是出现在真空极化图中，它对 $\beta(g)$ 的 $b_0$ 系数的贡献是

$$\Delta b_0 = \frac{1}{16\pi^2}\frac{1}{3}T(\phi) \tag{6.117}$$

其中，$T(\phi)$是标量场所属表示的 $T$ 值。式(6.117)只有处于相同表示的 Fermi 子的贡献的 1/4，所以不是严重的问题。但是引入标量场后理论中就出现了它们互相作用的耦合常数，而标量场的自耦合是趋向于紫外不稳定的。

为了简单，先考虑理论中只有一个标量场自耦合常数的情况，用 $g_1$ 表示这个耦合常数。拉氏量中标量场自作用项为

$$-\frac{1}{2}g_1(\phi^\dagger\phi)^2, \qquad g_1 > 0$$

仍用 $g$ 表示规范耦合常数。这时耦合常数的流动方程有如下的形式

$$\frac{\mathrm{d}\bar{g}}{\mathrm{d}t} = \beta(\bar{g},\bar{g}_1) = b_0\bar{g}^3 + b'_0\bar{g}^3\bar{g}_1 + \cdots \tag{6.118}$$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{g}_1}{\mathrm{d}t} = \beta_1(\bar{g},\bar{g}_1) = a_1\bar{g}_1^2 + a_2\bar{g}_1\bar{g}^2 + a_3\bar{g}^4 + \cdots \tag{6.119}$$

其中，$a_1$ 项来自纯标量场单圈图，$a_2$ 项和 $a_3$ 项分别来自图 6.3 和 6.4 中的 Feynman 图(图中虚线代表标量场，波纹线代表规范场)。计算结果 $a_1>0$，$a_2<0$，$a_3>0$。我们设 $b_0<0$ 的条件没有破坏，因此如 $\bar{g}_1(t)\to 0$ 则 $\bar{g}(t)\to 0$ 没有问题。但是由于 $a_1$ 和 $a_3$ 大于零，要使曲线$(\bar{g}^2(t),\bar{g}_1(t))$在 $\bar{g}^2$-$\bar{g}_1$ 平面上趋于原点它只能在 $\bar{g}_1 = O(\bar{g}^2)$ 的范围内$\left(\left|\frac{a_2}{a_1}\right|,\left|\frac{a_2}{a_3}\right|\text{看作 }O(1)\text{阶的量}\right)$。令 $r = g_1/g^2$，则由式(6.118)及(6.119)得

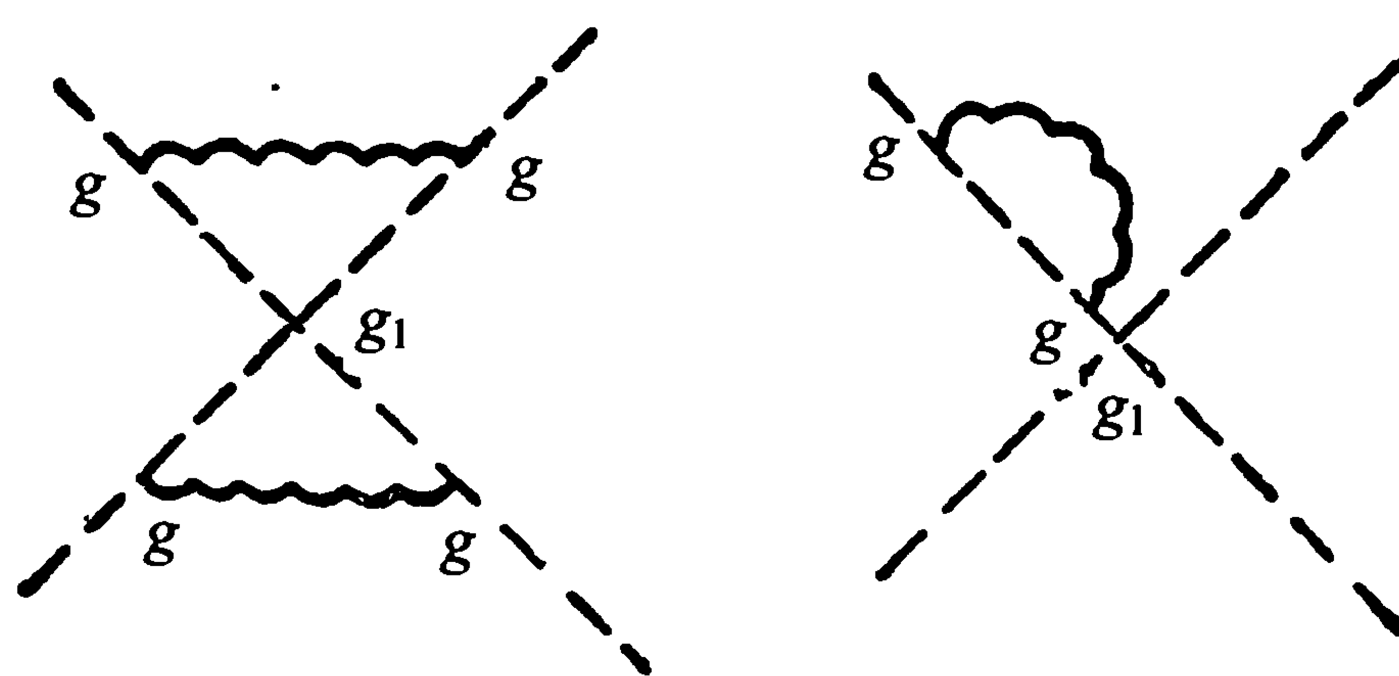



图 6.3

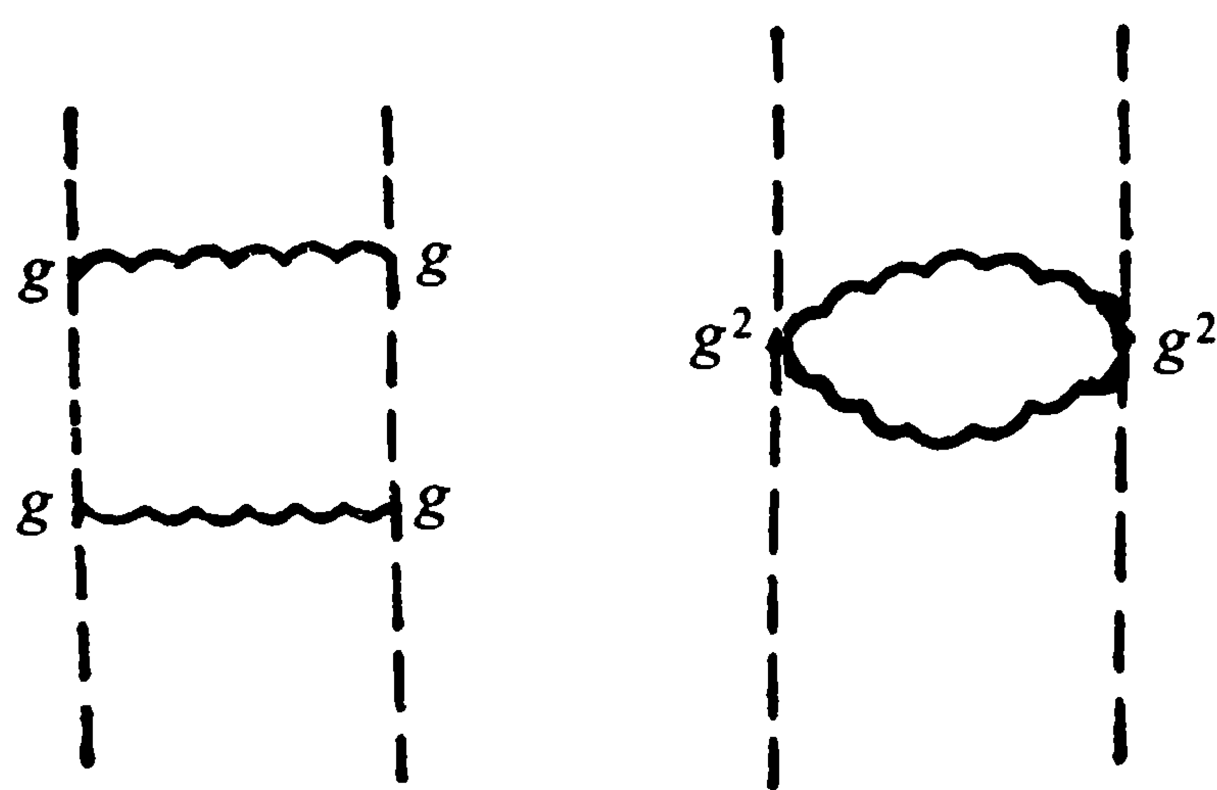



图 6.4

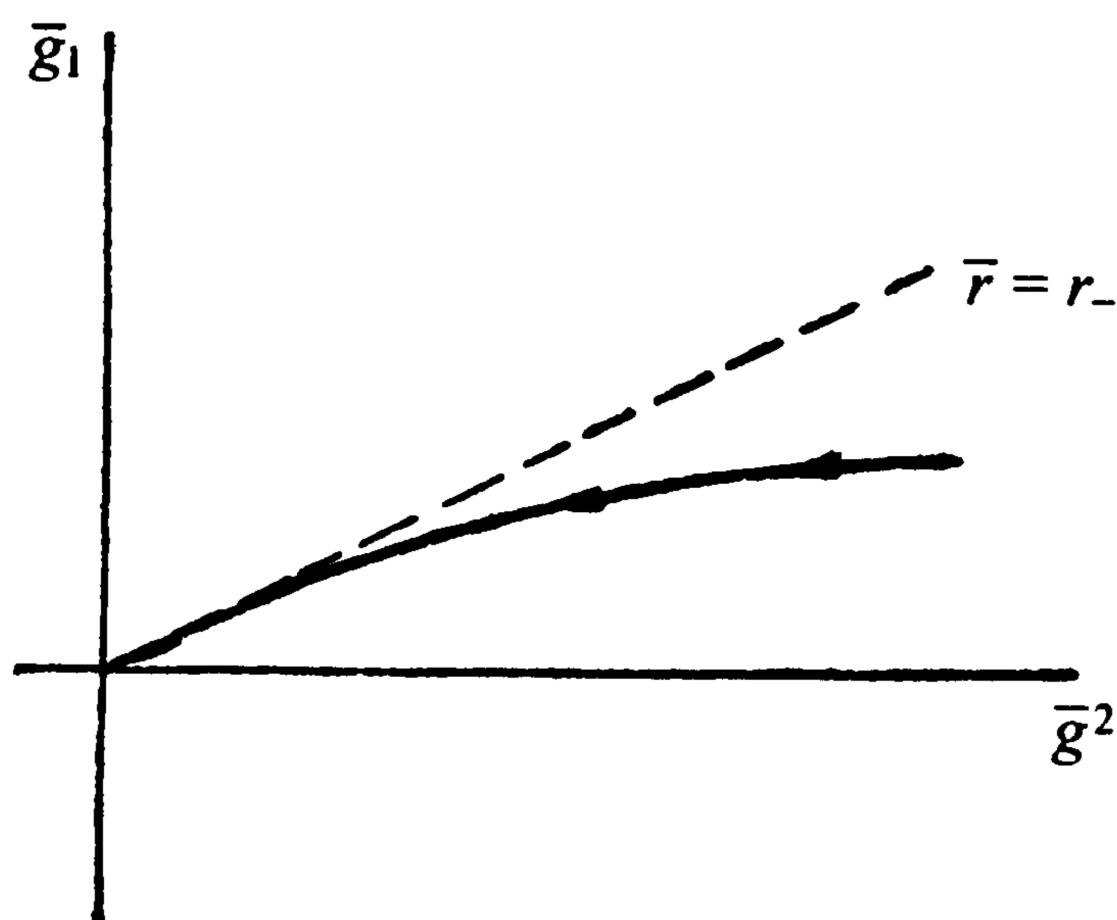



图 6.5

$$\frac{\mathrm{d}\bar{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{-2\bar{g}_1\dfrac{\mathrm{d}\bar{g}}{\mathrm{d}t}+\bar{g}\dfrac{\mathrm{d}\bar{g}_1}{\mathrm{d}t}}{\bar{g}^3}=O(\bar{g}^2)\to 0$$

这表示原点是紫外稳定点的必要条件是 $\bar{r}$ 有紫外稳定的不动点。这个条件显然也是充分的。由式(6.118)和(6.119)可得

$$\frac{\mathrm{d}\bar{r}}{\mathrm{d}t}=\beta_r(\bar{r},\bar{g})=\bar{g}^2[a_1\bar{r}^2+(a_2+b_0)\bar{r}+a_3] \tag{6.120}$$

在重整化群的不动点处上式必须等于零。$\beta_r$ 可写为

$$\beta_r=\bar{g}^2a_1(\bar{r}-r_-)(\bar{r}-r_+)$$

其中

$$r_\pm=\frac{1}{2a_1}\left[-(a_2+b_0)\pm\sqrt{(a_2+b_0)^2-4a_1a_3}\right]$$

如 $r_\pm$ 为二次式的两个实根，则在较小的一个实根 $r_-$ 处

$$\left.\frac{\mathrm{d}\beta_r}{\mathrm{d}\bar{r}}\right|_{\bar{r}=r_-}<0$$

这个点是紫外稳定点。考虑到 $a_2<0, b_0<0$，得到 $g_1=g=0$ 是紫外稳定的不动点的条件

$$a_2+b_0<-\sqrt{4a_1a_3} \tag{6.121}$$

对 SU($N$)群的实际计算结果，如果有 $s$ 个 $N$ 维表示的标量场，则

$$a_1=\frac{1}{8\pi^2}(N+4)s$$

$$a_2=-\frac{3}{8\pi^2}\frac{N^2-1}{N}$$

$$a_3=\frac{3}{8\pi^2}\frac{(N-1)(N^2+2N-2)}{4N^2} \tag{6.122}$$

在标量场的多重态数 $s$ 大时，条件式(6.121)很难满足。在 $N$ 足够大时条件式(6.121)化为

$$8\pi^2b_0-3N<-\sqrt{3s}N$$

因此 $s<3$。

一般的情况有几个标量场耦合常数，分析起来非常复杂。但在所有研究过的情况中得到的结论与上述简单情况相似[8,9]，为保持非 Abel 规范场论的渐近自由的性质，标量场多重态数受到限制，以致没有足够多的 Higgs 粒子使得规范不变性完全破缺。这就是说，不能得到一个既有渐近自由又没有无质量的规范粒子(除光

子外)的理论。

上面的讨论还没有考虑标量场与 Fermi 场的汤川型作用 $f\bar{\psi}\phi\psi$。在考虑了这种作用后,Fermi 子圈图对 $\beta_1$ 有如下形式的贡献

$$\Delta\beta_1 = A\bar{g}_1\bar{f}^2 + B\bar{f}^4 \tag{6.123}$$

它们分别来自如图 6.6 的两个图形。计算结果 $A$ 和 $B$ 都是负数,因此有可能改善 $\bar{g}_1$ 趋于零的条件。但是 $\bar{f}$ 满足如下形式的流动方程

$$\frac{\mathrm{d}\bar{f}}{\mathrm{d}t} = A'\bar{f}^3 - B'\bar{f}\,\bar{g}^2 \tag{6.124}$$

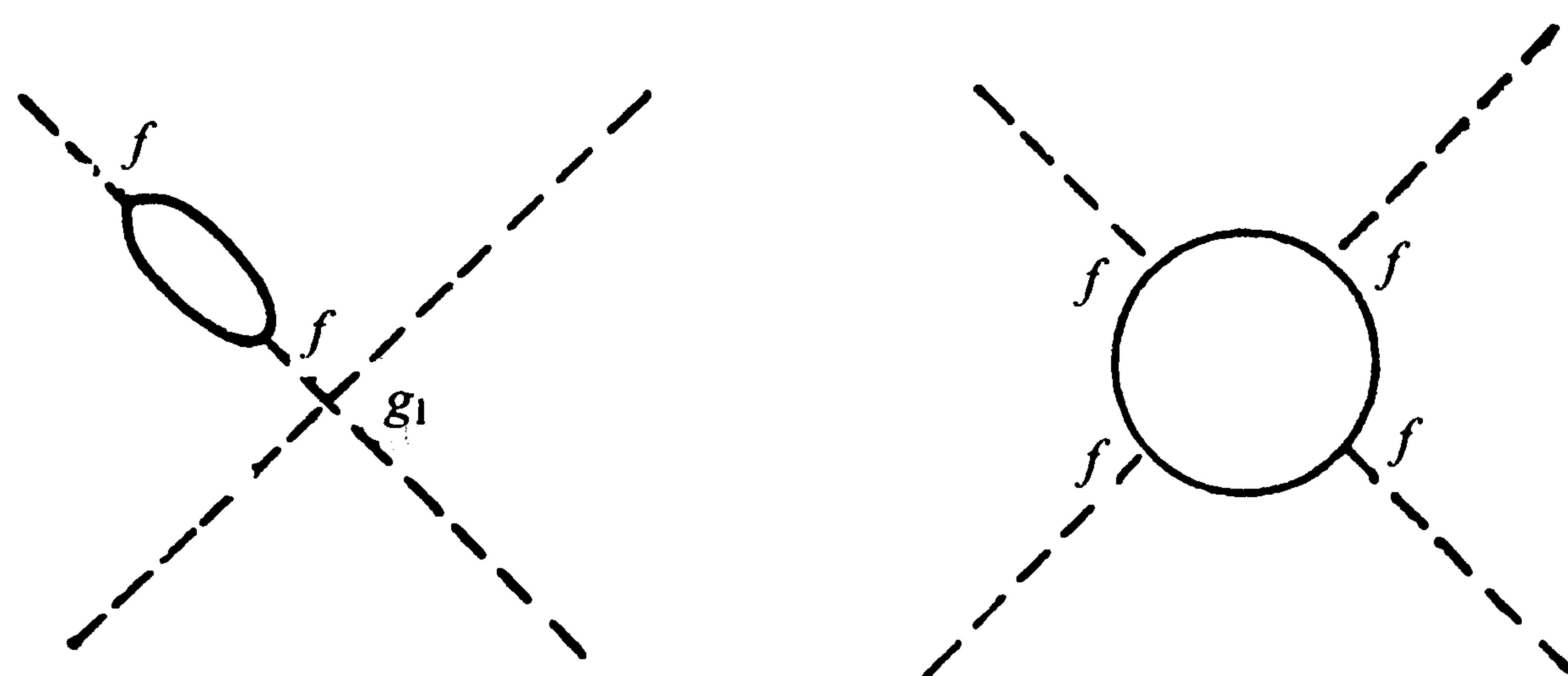



图 6.6

其中,$A'>0$,$B'>0$。如果初始值 $\bar{f}(0)=f$ 和 $\bar{g}(0)=g$ 在

$$\bar{f}^2(0) > \frac{B'}{A'}\bar{g}^2(0)$$

的范围内,则 $\bar{f}(t)$ 不趋于零。相反,如果 $\bar{f}^2(0)<\frac{B'}{A'}\bar{g}^2(0)$,则发现 $\bar{f}(t)$ 趋于零的速度比 $\bar{g}(t)$ 快,此时式(6.123)对式(6.119)的修正小,不足以改善 $\bar{g}_1(t)$ 趋于零的条件。研究结果发现,只有初始值 $f$,$g$ 和 $g_1$ 满足完全确定的关系时,才能得到渐近自由的理论[8,9]。人们已经找到一些这样的模型[12]。这种理论如果对描述自然界有用,应当有一个物理原理来保证耦合常数之间的这种确定的关系。

## 6.8　非 Abel 规范场论的渐近行为

现在回到非 Abel 规范场与 Fermi 子作用的情况。在非 Abel 规范场论中规范势 $A_\mu$ 的反常量纲 $\gamma_3$、Fadeev-Popov 虚拟场的反常量纳 $\tilde{\gamma}_3$、Fermi 场的反常量纲 $\gamma_2$ 及 Fermi 子质量的反常量纲 $\gamma_m$ 的展开式分别有如下的形式

$$\gamma_3 = C_0 g^2 + C_1 g^4 + O(g^6)$$

$$\tilde{\gamma}_3 = \tilde{C}_0 g^2 + \tilde{C}_1 g^4 + O(g^6)$$

$$\gamma_2 = C'_0 g^2 + C'_1 g^4 + O(g^6)$$

$$\gamma_m = d_0 g^2 + d_1 g^4 + O(g^6) \tag{6.125}$$

由式(6.37′)、(6.47)及第五章的公式(5.130)、(5.140)、(5.144)和(5.141)得

$$C_0 = -\frac{1}{32\pi^2}\left[C_2(A)\left(\frac{13}{3} - \alpha\right) - \frac{8}{3}T(\psi)\right] \tag{6.126}$$

$$\tilde{C}_0 = -\frac{1}{64\pi^2}C_2(A)\left(3 - \frac{1}{2}\alpha\right) \tag{6.127}$$

$$C'_0 = \frac{1}{16\pi^2}C_2(\psi)\alpha \tag{6.128}$$

$$d_0 = \frac{3}{8\pi^2}C_2(\psi) \tag{6.129}$$

由两圈图的计算得到 $\beta$ 函数微扰展开式的第二项的系数

$$b_1 = \frac{1}{(16\pi^2)^2}\left[-\frac{34}{3}(C_2(A))^2 + \frac{20}{3}C_2(A)T(\psi) + 4C_2(\psi)T(\psi)\right] \tag{6.130}$$

在 6.6 节中已经证明了，在与质量无关的减除方案范围内 $\gamma$ 和 $\gamma_m$ 展开式的第一项及 $\beta$ 的展开式的前两项是与减除方案无关的。

由 $b_0$ 和 $b_1$ 的表示式可以看出规范理论中 $\beta$ 函数的微扰展开参数是$\frac{g^2}{4\pi^2}$。在 $\frac{g^2}{4\pi^2}\ll 1$，$\frac{\bar{g}^2(t)}{4\pi^2}\ll 1$ 的条件下，利用 $\beta$ 函数展开式的前两项得到

$$t = \int_{g^2}^{\bar{g}^2(t)} \frac{\mathrm{d}x}{2b_0 x^2}\left(1 - \frac{b_1}{b_0}x + O(x^2)\right)$$

$$\bar{g}^2(t) = \frac{g^2}{1 - 2b_0 g^2 t - \frac{b_1}{b_0}g^2\ln(1 - 2b_0 g^2 t) + O(g^4 t^0)} \tag{6.131}$$

当渐近自由的理论$\frac{g^2}{4\pi^2}\ll 1$ 时，$\frac{\bar{g}^2(t>0)}{4\pi^2}\ll 1$ 自动满足。由 6.4 节末的讨论知道，在渐近自由的理论中，$g^2(\mu)$随 $\mu$ 的增大而减小。因此在选择足够大的 $\mu$ 时，$\frac{g^2}{4\pi^2}\ll 1$总可以满足，这时式(6.131)适用于任意正的 $t$ 值。

对于量子电动力学，也可以得到形式如(6.131)的公式。在量子电动力学中 $b_0>0$，如果忽略 $b_1$ 项，则式(6.131)在

$$t = (2b_0 g^2)^{-1}$$

处有极点。Landau 曾经用不同的方法得到

$$\bar{g}^2(t) = \frac{g^2}{1 - 2b_0 g^2 t}$$

他注意到极点的存在,并由此得出量子电动力学不自洽的结论。但是由上面的推导过程知道,这个公式只能用于$\frac{\bar{g}^2(t)}{4\pi^2} \ll 1$的范围,公式中极点的存在只是表示对量子电动力学这里所用的方法只适用于 $t \ll (2b_0 g^2)^{-1}$处。微扰论不能回答极点是否存在的问题。

对非 Abel 规范理论 $b_0<0$,由式(6.131)可以看到在 $t\to\infty$时 $\bar{g}^2(t)$趋于零。它不像标量场或 Abel 规范场的情况,公式(6.131)在 $t>0$ 处没有奇点,只要$\frac{g^2}{4\pi^2} \ll 1$,这个公式可以用于任意大的正 $t$ 值。由这个公式还可以看到 $\bar{g}^2(t)$趋于零是对数性的。因此在渐近自由的理论中,有效耦合常数趋于零的速度是很缓慢的。

式(6.131)可以写成更方便的形式。记住 $\bar{g}^2(0)=\bar{g}^2(\mu^2)$,由 6.4 节末的讨论知道,如令

$$2t \equiv \ln \frac{Q^2}{\mu^2}$$

则

$$\bar{g}^2(t) = g^2(Q^2) \tag{6.132}$$

令

$$\Lambda^2 \equiv \mu^2 \exp\left[\frac{1}{b_0 g^2(\mu^2)} - \frac{b_1}{b_0^2}\ln(-b_0 g^2(\mu^2))\right] \tag{6.133}$$

则式(6.131)可改写为

$$g^2(Q^2) = -\frac{1}{b_0 \ln Q^2/\Lambda^2} - \frac{b_1}{b_0^3}\frac{\ln \ln Q^2/\Lambda^2}{\ln^2 Q^2/\Lambda^2} + O\left(\frac{1}{\ln^3 Q^2/\Lambda^2}\right) \tag{6.134}$$

因此 $\Lambda$ 是理论本身固有的一个能量标度,在 $Q^2 \simeq \Lambda^2$ 时,$\frac{g^2(Q^2)}{4\pi^2}$变大,耦合变强。在公式(6.134)中用一个有量纲的参数 $\Lambda$ 代替一个无量纲的参数 $g$ 作为规范理论的参数。注意,在 $\Lambda$ 改变数值时式(6.134)右方第一项的改变是$(\ln^2 Q^2/\Lambda^2)^{-1}$的量级,因此只有考虑到 $b_1$ 项时 $\Lambda$ 才有确定的值。

由以上讨论还可以看到,在 $t$ 变为负数时,也就是在大距离处,有效耦合常数变大,非 Abel 规范场论的红外行为是强耦合性质的,这时微扰论的计算不能用了。从重整化群的角度说,它的红外行为取决于 $t\to-\infty$时 $\bar{g}(t)$是否趋于$\infty$或趋于一个红外稳定的不动点。但是现在还没有计算这个区域的 $\beta$ 函数的方法。场的耦合在小距离处变弱而在大距离处变强,这是非 Abel 规范场区别于其他可重整场论

的一个特点。由前面对标量场的影响的讨论知道，除了一些非常特殊的模型外一般只有在非 Abel 规范对称没有完全被 Higgs 机制破缺时它才能保持这个特点。

在渐近自由的规范场与 Fermi 子作用的理论中，正规项角或 Green 函数的紫外渐近形式可以由重整化群方程的解得到。为简单起见我们取 Landau 规范，这时可以用式(6.81)和(6.82)。式(6.82)中的指数因子可以算出，得到

$$\exp\left(-\int_0^t \mathrm{d}t'\gamma_m(\bar{g}(t'))\right) = \exp\left(-\int_g^{\bar{g}(t)} \mathrm{d}g' \frac{\gamma_m(g')}{\beta(g')}\right)$$
$$= \exp\left(-\frac{d_0}{b_0}\int_g^{\bar{g}(t)} \frac{\mathrm{d}g'}{g'}\right) = \left(\frac{\bar{g}^2(t)}{g^2}\right)^{-d_0/2b_0} \sim t^{d_0/2b_0} \tag{6.135}$$

其中，$d_0$ 是式(6.125)中 $\gamma_m$ 的展开式第一项的系数，因此对渐近自由的理论，式(6.82)中的有效质量 $\bar{m}(t)$ 肯定趋于零。记住在欧氏区 $p_i^2>0,(p_{i_1}+p_{i_2}+\cdots)^2>0$，零质量理论的顶角没有红外发散，我们可以在式(6.81)右方取 $\bar{m}(t)=0$。我们还可以得到

$$\exp\left[-\int_0^t \mathrm{d}t'\gamma_3(\bar{g}(t'))\right] \sim \left(\frac{\bar{g}^2(t)}{g^2}\right)^{-c_0/2b_0} \tag{6.136}$$

$$\exp\left[-\int_0^t \mathrm{d}t'\gamma_2^{(l)}(\bar{g}(t'))\right] \sim \left(\frac{\bar{g}^2(t)}{g^2}\right)^{-c_0^{(l)}/2b_0} \tag{6.137}$$

其中，$\gamma_2^{(l)}$ 是第 $l$ 种 Fermi 子的反常量纲，$c_0$ 和 $c_0^{(l)}$ 分别是 $\gamma_3$ 和 $\gamma_2^{(l)}$ 的展开式的第一项的系数。因此由式(6.81)得到包含 $n$ 个规范粒子、$n_l$ 个第 $l$ 种 Fermi 子外线的顶角 $\Gamma^{(n,n_l)}$ 的渐近形式为

$$\Gamma^{(n,n_l)}(e^t p_i, m_l, \mu, g) = \mathrm{e}^{d_\Gamma t}\left(\frac{\bar{g}^2}{g^2}\right)^{-\frac{1}{2b_0}(nc_0+\Sigma n_l c_0^{(l)})} \cdot \Gamma^{(n,n_l)}(p_i, 0, \mu, \bar{g}(t)) \tag{6.138}$$

由式(6.138)可以看到，在渐近自由的理论中，在大的欧氏动量区，标度不变性只有对数性质的破坏，破坏标度不变性的因子正比于 $t=\ln\lambda$ 的幂次。

我们设所有由外动量组成的不变量 $p_i^2, p_i\cdot p_j$ 都有相同的量级。这时顶角函数 $\Gamma^{(n,n_l)}(p_i,0,\mu,\bar{g}(t))$ 的微扰论展开式中不会出现大的系数。在 $t$ 充分大时，$\bar{g}^2(t)/4\pi^2$ 很小，微扰论的领头项是好的近似。这时利用式(6.138)只要做微扰论的低阶计算，就能得出各种顶角在 $t\to\infty$ 时的渐近形式。与标量场的情况略有不同的是，在规范理论中，$\bar{g}^2(t)$ 是 $g^2$ 和 $g^2t$(而不是 $gt$)的函数，因此正规顶角可以展开为 $\frac{g^2}{4\pi^2}$ 和 $\frac{g^2}{4\pi^2}t$ 的双重级数

$$\Gamma^{(n,n_l)}(e^t p_i, m_l, \mu, g) = e^{d_\Gamma t}\left(\frac{\bar{g}^2(t)}{g^2}\right)^{-\frac{1}{2b_0}(nc_0+\sum_l n_l c_0^{(l)})} \cdot \sum_m f_m(p_i, 0, \mu)\bar{g}^{m_0+2m}(t)$$

$$= e^{d_\Gamma t}\sum_{lm} f_{lm}(p_i, 0, \mu) g^{m_0+2m}(g^2 t)^l \quad (6.139)$$

因此可以看出，只需对 $\beta, \gamma_2^{(l)}, \gamma_3$ 和 $\Gamma^{(n,n_l)}$ 做微扰论的最低阶计算，重整化群的公式(6.138)就把全部微扰论图中含 $g^{m_0}$ 阶的所有$(g^2 t)^l$ 项求和了。与非渐近自由的理论不同，只要$\frac{g^2}{4\pi^2}\ll 1$，这个方法可以用于大的 $g^2 t$ 值。

上一段的结论只是对欧氏动量 $p_i^2>0, (p_{i_1}+p_{i_2}+\cdots)^2>0$ 说的，如果有某几个动量的和的平方为零，则在取 $\bar{m}\to 0$ 极限时可能有红外发散。这样的动量称为例外动量。这时 $\Gamma(p_i, \bar{m}_l, \mu, \bar{g})$ 的微扰论级数中可能包含有因子

$$\bar{g}^2(t)\ln^2\frac{p_i^2}{\bar{m}_l^2} \sim \bar{g}^2(t)t^2$$

的项(参看第八章关于红外发散的讨论)。这种项不可以用前面叙述的重整化群方程求和。与此有关的是，如果各个 $p_i^2$ 和 $p_i\cdot p_j$ 型的 Lorentz 不变量有不同的量级，$\Gamma(p_i, 0, \mu, \bar{g})$ 的微扰论展开式中可能出现 $\ln\frac{p_i^2}{p_j^2}$ 形式的大系数。例如，对有两个动量为 $p_1$ 和 $p_2$ 的 Fermi 子和一个动量为 $q$ 的规范粒子的外线的顶角，当$\frac{q^2}{p_1^2}\gg 1$，$\frac{q^2}{p_2^2}\gg 1$ 时，在微扰论计算中出现

$$\bar{g}^2(t)\ln\frac{q^2}{p_1^2}\ln\frac{q^2}{p_2^2} \quad (6.140)$$

的幂次(参看第八章)。这种项的存在反映 $p_i^2\to 0$ 的零质量理论存在红外发散，如果式(6.140)为 1 的量级则微扰展开式的前几项不是好的近似。这类有不同量级的 Lorentz 不变量 $p_i\cdot p_j$ 的问题可以用更复杂的重整化群方法处理。

## 参 考 文 献


1 C G Callan, S Coleman and R Jackiw. Ann of Phys. New York: 1970, 59:42
2 S Weinberg. Phys Rev. 1960, 118:838
3 E C G Stueckelberg and A Peterman. Helv Phys Acta. 1953, 26:449
4 M Gell-Mann and F E Low. Phys Rev. 1954, 95:1300
5 N N Bogolubov and D V Shirkov. Introduction to the Theory of Quantized Fields. Interscience, New York: 1959
6 C G Callan. Phys Rev. 1970, D2:1541; K Symanzik. Comm Math Phys. 1970, 18:227

7　G't Hooft. Nucl Phys. 1973,B61:455; S Weinberg. Phys. Rev. 1973,D8:3497

8　D J Gross. in Methods In Field Theory. Session 28 of Les Houches 1975, Eds. Roger Balian and Jean Zinn-Justin. North-Holland Publishing Company, 1976

9　S Coleman and D J Gross. Phys Rev Letters. 1973,31:851; A Zee. Phys Rev. 1973,D7:3630; D J Gross and F Wilczek. Phys Rev. 1973,D8:3633

10　D J Gross and F Wilczek. Phys Rev Letters. 1973,30:1343; H P Politzer. Phys Rev Letters. 1973,30:1346

11　N K Nielsen. Am Jour Phys, 1981,49:1171; K Johnson. in Asymptotic Realms of Physics, Eds. A Guth, K Huang and R I Jaffe. Cambridge: MIT Press, 1983; Kerson Huang. Quarks Leptons and Gange Fields, Chapter 12. World Scientific Publishing Company, 1982

12　N P Chang, A Das and J Perez-Mercader. Phys Letters. 1980, 93B: 137; E S Fradkin, O K Kalashnikov and S E Konstein. Lett Nuovo Cimento. 1978,21:5; O K Kalashnikov and S E Konstein. Nucl Phys. 1980,B166:507

# 第七章 量子色动力学 I

## 7.1 层子、夸克模型及量子色动力学的物理基础

按照层子模型的观念,实验上观察到的几百种强子是由少数几种组元组成的复合粒子。这一点是统一描述强子的相互作用性质的基础。在层子模型中,重子由三个自旋为$\frac{1}{2}$的层子组成,介子由一个层子和一个反层子组成。在 1973 年发现 J/ψ 粒子以前,发现的强子都可以由三种层子组成。关于层子所带的内部量子数,成功的方案是 Gell-Mann 和 Zweig 最早提出的夸克方案。$u,d,s$ 三种夸克的同位旋 $I$、同位旋分量 $I_3$、重子数 $B$、电荷 $Q$、奇异数 $s$ 和超荷 $Y=B+s$ 等性质列在下表中

| | $I$ | $I_3$ | $B$ | $Q$ | $s$ | $Y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ |
| $d$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ |
| $s$ | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-1$ | $-\frac{2}{3}$ |

它们满足 Gell-Mann-Nishijima 法则

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y$$

文献中称 $u,d,s$ 为夸克的不同的"味"。强作用在 $u,d,s$ 三种夸克态的内部空间中有近似的 $SU(3)_F$ 对称性。这里脚标 $F$ 表示"味"。令

$$\psi = (\psi^\alpha) = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}, \qquad \alpha = 1,2,3$$

$SU(3)_F$ 变换为

$$\psi^\alpha \to \exp\left(-\mathrm{i}\alpha^i \frac{\lambda_i}{2}\right)_{\alpha\beta} \psi^\beta, \qquad i = 1,2,\cdots,8$$

$\frac{\lambda_i}{2}$为 Gell-Mann 所用的八个 SU(3)群生成元矩阵。$SU(3)_F$ 群包括同位旋 $SU(2)_I$

子群和超荷 $U(1)_Y$ 子群。$SU(2)_I \times U(1)_Y$ 是比 $SU(3)_F$ 更好的对称性。

赝标介子组成 $SU(3)_F$ 八重态，它们属于 SU(3)群的伴随表示，各种介子的组成如下

$$\pi^+ = \bar{d}u, \qquad \pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u - \bar{d}d), \qquad \pi^- = \bar{u}d$$

$$K^+ = \bar{s}u, \qquad K^0 = \bar{s}d, \qquad \bar{K}^0 = \bar{d}s, \qquad K^- = \bar{u}s$$

$$\eta^0 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s)$$

自旋 $\frac{1}{2}$ 的重子组成 $SU(3)_F$ 八重态

$$p = udu, n = udd$$

$$\Sigma^+ = suu, \qquad \Sigma^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}s(ud + du), \qquad \Sigma^- = sdd$$

$$\Xi^0 = ssu, \qquad \Xi^- = ssd$$

$$\Lambda^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}s(ud - du)$$

自旋 $\frac{3}{2}$ 的重子组成 $SU(3)_F$ 十重态，它们属于 SU(3)群的三阶对称张量表示

$$\Delta^{++} = uuu, \qquad \Delta^+ = uud, \qquad \Delta^0 = udd, \qquad \Delta^- = ddd$$

$$\Sigma^{*+} = suu, \qquad \Sigma^{*0} = sud, \qquad \Sigma^{*-} = sdd$$

$$\Xi^{*0} = ssu, \qquad \Xi^{*-} = ssd$$

$$\Omega = sss$$

为了组成 1973 年后发现的新粒子，至少还需要称为 $c$ 和 $b$ 的两种味的夸克。

在夸克模型的基础上发展了流代数理论，由夸克场 $\psi$ 可以组成矢量流和轴矢流

$$V_\mu^i = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_\mu \frac{\lambda_i}{2}\psi, \qquad A_\mu^i = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5 \frac{\lambda_i}{2}\psi$$

它们的时间分量在正则对易关系下构成的代数就称为流代数。对自由的夸克场矢量流 $V_\mu$ 是守恒的，而轴矢量 $A_\mu$ 在忽略夸克质量时也守恒

$$\partial_\mu V_\mu^i = 0, \qquad \partial_\mu A_\mu^i = 0 + \text{质量项}$$

如果认为对有相互作用的夸克场矢量流守恒仍旧成立，而轴矢流守恒自发破缺，则由第二章中的讨论可知，轴矢流将与 Goldstone 赝标介子耦合。这时

$$\partial_\mu A_\mu^i = f_\varphi m_{\varphi^i}^2 \varphi^i$$

这里，$\varphi^i(i=1,2,\cdots,8)$是赝标介子八重态。上式就是轴矢流部分守恒(PCAC)的公式。

量子色动力学(缩写为 QCD)是一个强作用的规范理论。强作用的理论需要一个被称为“色”的自由度，这一点最早是在强子模型的理论中提出来的。对重子中质量最小的 $SU(3)_F$ 八重态和十重态，它们内部的夸克波函数在坐标、自旋和味的空间中一起考虑是全对称的。例如，自旋为$\frac{3}{2}$的重子的自旋波函数自然是全对称的，它们的 $SU(3)_F$ 波函数也是全对称的，作为基态它们的轨道波函数也是全对称的。为了满足自旋和统计的关系，人们提出夸克有另一个内部自由度，用文献中的术语说，每种味的夸克有“红”、“黄”、“蓝”三种“颜色”，强作用在色空间中有 $SU(3)_c$对称性。重子内部波函数是由三种不同色的夸克组成的全反对称组合 $\epsilon_{abc}q^aq^bq^c$，这里 $a,b,c=1,2,3$ 表示三种色。这是一个 $SU(3)_c$ 群的单态，因此强子可说是白色的。这样就满足了自旋和统计的关系，这也使得人们较易理解为什么已知的重子都可以认为是由三个夸克组成的。

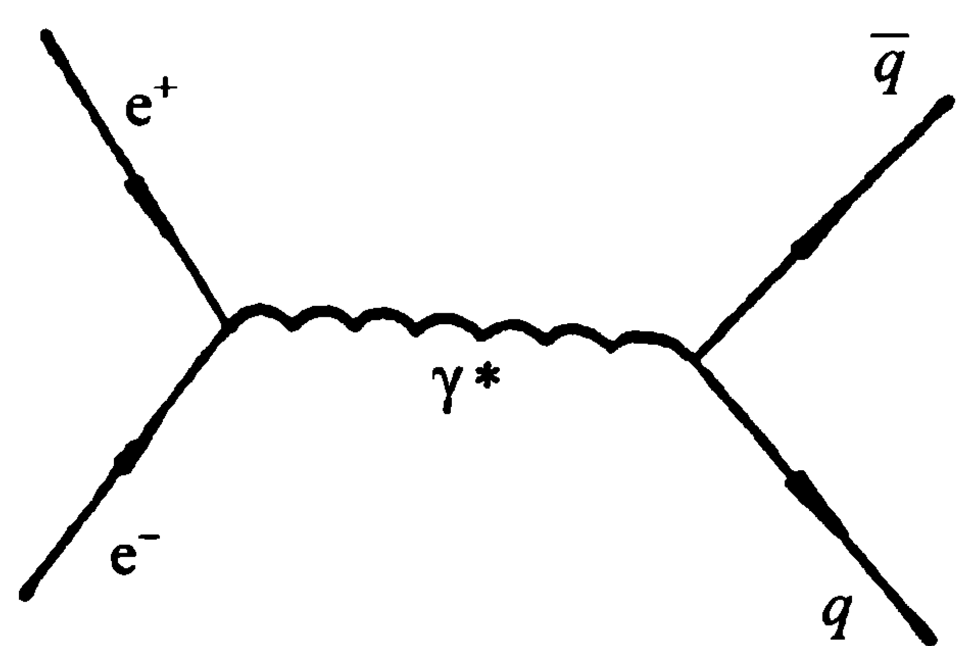



图 7.1

除强子谱以外，三种颜色的存在还有以下两个根据。

第一个是关于 $e^+ + e^- \to \gamma^* \to$强子过程。按照部分子模型，在虚光子的动量 $-q^2$ 大时可以认为虚光子先转变成一对夸克-反夸克，然后再演化成一些强子，夸克-反夸克对演化成强子的概率假定为 1。因此这个过程的总截面可以直接由图 7.1 中的 Feynman 图形计算，这样可得到如下的截面公式

$$\sigma(e^+ + e^- \to \gamma^* \to \text{强子}) \xrightarrow[-q^2\to\infty]{} \frac{4\pi\alpha^2}{-3q^2}\sum_\alpha (Q^\alpha)^2 \tag{7.1}$$

其中，$Q^\alpha$ 为第$\alpha$种夸克的电荷。这与 $e^+ + e^- \to \gamma^* \to \mu^+ + \mu^-$ 过程的截面只差一个因子$\sum_\alpha (Q^\alpha)^2$，因此得到

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+ + e^- \to \gamma^* \to \text{强子})}{\sigma(e^+ + e^- \to \gamma^* \to \mu^+ + \mu^-)} \xrightarrow[-q^2\to\infty]{} \sum_\alpha (Q^\alpha)^2 \tag{7.2}$$

在产生含 $c$ 夸克的 $D$ 介子对的阈能以下$\left(\sqrt{-q^2}<4\text{GeV}\right)$，只有 $u,d,s$ 三种味的夸克起作用，考虑到夸克有三种颜色，得到

$$\sum_\alpha (Q^\alpha)^2 = 3\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right) = 2$$

在产生 $D,\bar{D}$ 对的阈能以上

$$\sum_{\alpha}(Q^{\alpha})^2 = 3\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\right)=\frac{10}{3}$$

理论与实验相差不远。如果没有三种颜色则理论与实验完全不符。

三种颜色存在的第二个根据来自 $\pi^0 \to \gamma + \gamma$ 衰变过程。令 $k, k_1, k_2$ 分别为 $\pi^0$ 及两个 $\gamma$ 的动量。由 Lorentz 协变性，这个过程的振幅 $M_{\mu\nu}$ 可写为

$$M_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_{1\rho} k_{2\sigma} (2\pi)^4 M \tag{7.3}$$

$\pi^0$ 介子的寿命 $\tau$ 为

$$\tau^{-1} = \frac{m_\pi^3}{64\pi} \mid M \mid^2$$

按照 LSZ 约化公式

$$M_{\mu\nu} = (2\pi)^4 \lim_{-k^2 \to m_\pi^2} (k^2 + m_\pi^2) e^2 \int \mathrm{d}^4 x \mathrm{d}^4 y \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1 x - \mathrm{i}k_2 y} \times \langle 0 \mid T(J_\mu(x) J_\nu(y) \pi^0(0)) \mid 0 \rangle \tag{7.4}$$

其中，$J_\mu$ 为强子的电磁流。引入 Green 函数

$$\Gamma_{\mu\nu}(k_1, k_2) = c^2 \int \mathrm{d}^4 x \mathrm{d}^4 y \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1 x - \mathrm{i}k_2 y} \langle 0 \mid T(J_\mu(x) J_\nu(y) \cdot \partial_\lambda J_{5\lambda}^3(0)) \mid 0 \rangle \tag{7.5}$$

其中，$J_{5\lambda}^i$ 为强子的轴矢流。式(7.5)有一个 $\pi$ 介子中间态的极点项，它可以用图 7.2 表示，其中 $\pi$ 介子衰变常数 $f_\pi$ 由下式定义(用协变归一化的态)

$$\langle 0 \mid J_{5\mu}^3(0) \mid \pi^0(k) \rangle \equiv \mathrm{i} f_\pi k_\mu \tag{7.6}$$

由此得到

$$\frac{1}{(2\pi)^4} M_{\mu\nu} = \lim_{-k^2 \to m_\pi^2} \frac{k^2 + m_\pi^2}{f_\pi m_\pi^2} \Gamma_{\mu\nu}(k_1, k_2)_{k_1^2 = k_2^2 = 0} \tag{7.7}$$

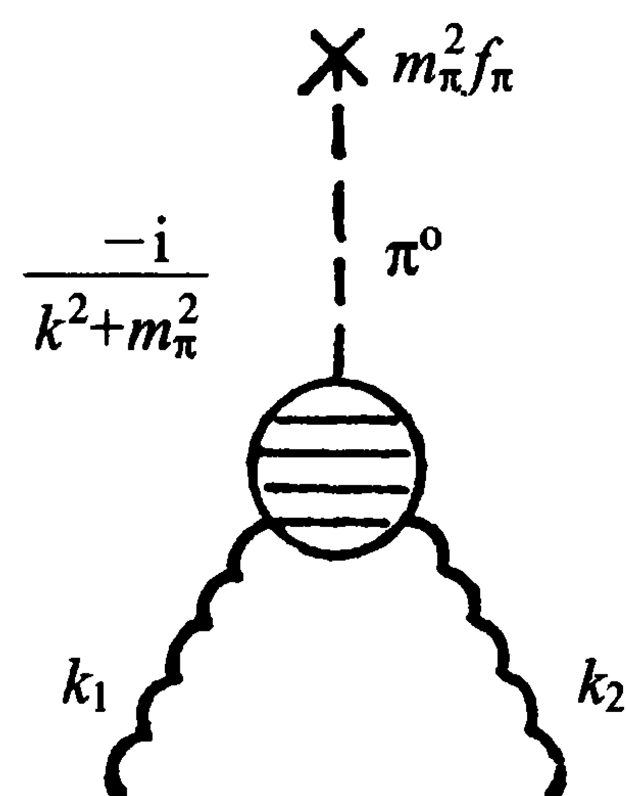


图 7.2

$\Gamma_{\mu\nu}$ 中除 $\pi$ 介子极点项以外的项对式(7.7)右方没有贡献。

按照 2.2 节中的讨论，强相互作用有近似的 $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 对称性。这种对称性自发破缺，$J_{5\mu}^i$ 是自发破缺的守恒流，$\pi^i$ 是相应的 Goldstone 粒子，因此有式(2.96)的轴矢流部分守恒(PCAC)方程式。

通常的 PCAC 近似认为，由于 $m_\pi^2$ 很小，在 $|k^2| \lesssim O(m_\pi^2)$ 时，只有 $\pi$ 介子极点项对 $\Gamma_{\mu\nu}$ 是重要的。因此 $(k^2 + m_\pi^2)\Gamma_{\mu\nu}(k_1, k_2)$ 是缓变函数，即使 $k^2$ 脱离质壳，在 $|k^2| \lesssim O(m_\pi^2)$ 时它仍能由图 7.2 计算，这等价于算符等式

$$\partial_\mu J_{5\mu}^i = f_\pi m_\pi^2 \pi^i \tag{7.8}$$

在缓变假设下，由式(7.7)得到

$$\frac{1}{(2\pi)^4}M_{\mu\nu} \simeq \frac{1}{f_\pi}\lim_{k^2\to 0}\Gamma_{\mu\nu}(k_1,k_2)|_{k_1^2=k_2^2=0} \tag{7.9}$$

引入 Green 函数

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2) = e^2\int d^4x d^4y e^{-ik_1x-ik_2y}\langle 0 \mid T(J_\mu(x)J_\nu(y)\cdot J^3_{5\lambda}(0))\mid 0\rangle \tag{7.10}$$

在夸克模型中

$$J_\mu = i\sum_i Q_i\bar{\psi}^i\gamma_\mu\psi^i, \qquad J^3_{5\mu} = i\bar{\psi}\frac{\tau_3}{2}\gamma_\mu\gamma_5\psi$$

其中,$Q_i$ 为夸克场 $\psi^i$ 的电荷。利用正则对易关系,可以得到

$$[J_0(x),J_\mu(0)]_{x_0=0} = 0$$

$$[J^3_{50}(z),J_\mu(0)]_{z_0=0} = 0, \qquad [J^3_{5\lambda}(z),J_0(0)]_{z_0=0} = 0$$

利用这些对易关系可以把式(7.5)中的微分号$\partial_\lambda$ 移到括号之外,由此得到 Ward 恒等式

$$ik_\lambda\Gamma_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2) = \Gamma_{\mu\nu}(k_1,k_2) \tag{7.11}$$

由 Lorentz 协变性,$\Gamma_{\mu\nu\lambda}$ 可以分解为

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu\lambda} &= A_1\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}k_{1\alpha}k_{2\beta}(k_1+k_2)_\lambda + A_2k_{1\nu}k_{1\alpha}k_{2\beta}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\lambda} + A_3\varepsilon_{\alpha\beta\mu\lambda}k_{2\nu}k_{1\alpha}k_{2\beta}\\ &\quad + A_4k_{2\mu}k_{1\alpha}k_{2\beta}\varepsilon_{\alpha\beta\nu\lambda} + A_5k_{1\mu}k_{1\alpha}k_{2\beta}\varepsilon_{\alpha\beta\nu\lambda} + A_6k_{1\alpha}\varepsilon_{\alpha\mu\nu\lambda} + A_7k_{2\alpha}\varepsilon_{\alpha\mu\nu\lambda}\end{aligned}$$

由光子的 Bose 对称性,在 $k_{1\mu}\leftrightarrow k_{2\nu}$ 互换时,$\Gamma_{\mu\nu\lambda}$ 不变,因此有

$$A_2(k_1,k_2) = -A_4(k_2,k_1), \qquad A_3(k_1,k_2) = -A_5(k_2,k_1)$$

$$A_6(k_1,k_2) = -A_7(k_2,k_1)$$

规范不变性要求

$$k_{1\mu}\Gamma_{\mu\nu\lambda} = k_{2\nu}\Gamma_{\mu\nu\lambda} = 0 \tag{7.12}$$

利用上式可以将 $A_6,A_7$ 用 $A_2,A_3,A_4$ 和 $A_5$ 表示如下

$$A_4k_1\cdot k_2 + A_5k_1^2 = A_7, \qquad A_2k_1\cdot k_2 + A_3k_2^2 = A_6$$

由此可以得到,在 $k_1^2 = k_2^2$ 时

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu\lambda} &= A_1\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}k_{1\alpha}k_{2\beta}(k_1+k_2)_\lambda + A_2[\varepsilon_{\alpha\beta\mu\lambda}k_{1\alpha}k_{2\beta}k_{1\nu} - \varepsilon_{\alpha\beta\nu\lambda}k_{1\alpha}k_{2\beta}k_{2\mu}\\ &\quad - \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}k_1\cdot k_2(k_1-k_2)_\rho] + A_3(\varepsilon_{\alpha\beta\mu\lambda}k_{1\alpha}k_{2\beta}k_{2\nu} - \varepsilon_{\alpha\beta\nu\lambda}k_{1\alpha}k_{2\beta}k_{1\mu}\\ &\quad + \varepsilon_{\alpha\mu\nu\lambda}(k_1-k_2)_\alpha k_1^2)\end{aligned} \tag{7.13}$$

由上式得到

$$k_\lambda \Gamma_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2) = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_{1\rho} k_{2\sigma} \Gamma(k^2, k_1^2, k_2^2) \tag{7.14}$$

其中

$$\Gamma(k^2, k_1^2, k_2^2) = k^2 A_1 + 2k_1 \cdot k_2 A_2 + 2k_1^2 A_3$$

因此有

$$\Gamma(0,0,0) = 0 \tag{7.15}$$

利用式(7.14)、(7.15)、(7.11)、(7.9)及(7.3)可以得到 $M=0$，而这将导致在 PCAC 近似下 $\tau^{-1}(\pi^0 \to 2\gamma)$ 为零的结论，实验上 $\pi^0 \to 2\gamma$ 过程的概率并未压低，这就产生了矛盾。

上述矛盾在考虑到第十章中所讨论的三角图反常后可以得到解决。$\Gamma_{\mu\nu\lambda}$ 是一个轴矢流和两个矢量流的 Green 函数，它包含夸克单圈三角图的贡献。根据那里得到的结论，Ward 恒等式(7.11)应当修改。由式(7.5)和(7.10)定义的 $\Gamma_{\mu\nu}$ 和 $\Gamma_{\mu\nu\lambda}$ 与第十章中定义的 $\Gamma_{\mu\nu}$ 和 $\Gamma_{\mu\nu\lambda}$ 是相似的，唯一的差别是这里 $J_\mu$ 和 $J_{5\mu}^3$ 的定义中有因子 $Q_i$ 及 $\frac{\tau_3}{2}$。因此，相应于式(10.23)可以得到在 $k_1^2 = k_2^2 = 0$ 时

$$-\mathrm{i}k_\lambda \Gamma_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2) = \Gamma_{\mu\nu}(k_1, k_2) - \mathrm{i}(2\pi^2)^{-1} e^2 S\, k_{1\rho} k_{2\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \tag{7.16}$$

这里，$S = \sum_i Q_i^2 I_{3i}$，$I_{3i}$ 是第 $i$ 种夸克的同位旋 3 分量。在 PCAC 关系式中只有三种颜色的 $u$，$d$ 夸克的贡献，因此

$$S = 3 \times \left[\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right] = \frac{1}{2} \tag{7.17}$$

将式(7.16)代入式(7.9)并利用式(7.15)，得到

$$M = \frac{1}{f_\pi} \frac{2\alpha}{\pi} S \tag{7.18}$$

由式(7.17)、(7.18)及 $f_\pi$ 的实验值 93MeV 得到

$$\tau^{-1}(\pi^0 \to 2\gamma) = 7.6\mathrm{eV}$$

这个结果与实验值$(7.95 \pm 0.55)$eV 符合得很好，而如果没有三种颜色理论与实验就不能符合。

W-S 模型中夸克三角图与轻子三角图反常的消去也是对三种颜色存在的一个支持。

以上说明了三种颜色的存在和色空间 $SU(3)_c$ 对称性的根据。如果进一步假设这个 $SU(3)_c$ 对称性是定域的，就导致 $SU(3)_c$ 定域规范理论。在这个理论中，强相互作用的来源被认为是夸克与 $SU(3)_c$ 规范场的相互作用。令 $\psi^{a\alpha}$ 为夸克场算符，其中 $\alpha$ 标志夸克不同的味 $u, d, s, c, \cdots$，$a = 1,2,3$ 标志夸克的三种颜色，则拉氏函数密度为

$$\mathscr{L} = -\bar{\psi}\gamma_\mu\left(\partial_\mu - \mathrm{i}g\frac{\lambda_\rho}{2}B_\mu^\rho\right)\psi - \bar{\psi}m\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^\rho F_{\mu\nu}^\rho \tag{7.19}$$

在式(7.19)中 $B_\mu^\rho(\rho=1,2,\cdots,8)$表示八个规范场,它们分别相应于 $SU(3)_c$ 群的八个生成元。

$\lambda_\rho$ 为通常 SU(3)理论中所用的 Gell-Mann 所引入的八个 3×3 矩阵

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_2 = \begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}&0\\\mathrm{i}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_5 = \begin{pmatrix}0&0&-\mathrm{i}\\0&0&0\\\mathrm{i}&0&0\end{pmatrix},\quad \lambda_6 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\mathrm{i}\\0&\mathrm{i}&0\end{pmatrix},\quad \lambda_8 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&0\\0&0&-\frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

它们满足对易关系

$$\left[\frac{\lambda_\rho}{2},\frac{\lambda_\sigma}{2}\right] \equiv \mathrm{i}f_{\rho\sigma\eta}\frac{\lambda_\eta}{2}$$

$f_{\rho\sigma\eta}$为 SU(3)群的结构常数

$$F_{\mu\nu}^\rho = \partial_\mu B_\nu^\rho - \partial_\nu B_\mu^\rho + gf_{\rho\sigma\eta}B_\mu^\sigma B_\nu^\eta \tag{7.20}$$

式(7.19)中

$$\bar{\psi}\lambda_\rho\psi \equiv \bar{\psi}^{a\alpha}(\lambda_\rho)_{ab}\psi^{b\alpha}$$

其中,包含对不同的味求和。$m$ 是一个对角的质量矩阵,在色空间中,它正比于单位矩阵,即

$$\bar{\psi}m\psi = \sum_\alpha m_\alpha\bar{\psi}^{a\alpha}\psi^{a\alpha}$$

容易验证,式(7.19)在定域 $SU(3)_c$ 规范变换下是不变的。

由式(7.19)描述的理论是一种没有破缺的非 Abel 规范理论。在第六章中已经证明,这种理论具有渐近自由的性质,并且在已知的可重整化的场论中,除了包含某些相当人为的条件的个别特例外,它是唯一具有这种性质的[1]。在本章中,我们将看到,这种渐近自由的性质至少在定性上可以解释在轻子-核子深度非弹性散

射、高能 $e^+ + e^- \to$ 强子等过程中观察到的近似的标度性。

此外,在 $u, d$ 和 $s$ 三种夸克的质量小时,式(7.19)有在这三种味的夸克之间变换的(非定域的)$SU(3)_F$ 近似对称性,它也有左手和右手 $u, d, s$ 三种夸克分别变换的 $SU(3)_{LF} \times SU(3)_{RF}$ 的近似手征对称性,在这种变换下

$$\psi_L^{a\alpha} \to \exp\left(-i\alpha_L^i \frac{\lambda_i}{2}\right)_{\alpha\beta} \psi_L^{a\beta}$$

$$\psi_R^{a\alpha} \to \exp\left(-i\alpha_R^i \frac{\lambda_i}{2}\right)_{\alpha\beta} \psi_R^{a\beta} \tag{7.21}$$

与这个变换相应的 Noether 流

$$J_{L\mu}^i = i\bar{\psi}_L \gamma_\mu \frac{\lambda_i}{2} \psi_L, \qquad J_{R\mu}^i = i\bar{\psi}_R \gamma_\mu \frac{\lambda_i}{2} \psi_R$$

满足通常流代数的对易关系

$$[J_{L0}^i(x), J_{L0}^j(y)]_{x_0 = y_0} = i f_{ijk} J_{L0}^k(x) \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$

$$[J_{R0}^i(x), J_{R0}^j(y)]_{x_0 = y_0} = i f_{ijk} J_{R0}^k(x) \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$

$$[J_{L0}^i(x), J_{R0}^j(y)]_{x_0 = y_0} = 0$$

如果假设复合算符 $\bar{\psi}\psi \equiv \bar{\psi}^{a\alpha}\psi^{a\alpha}$ 的真空平均值 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle_0 \neq 0$,则按照第二章中的讨论,由于 $\bar{\psi}\psi$ 不是手征变换的不变量,$SU(3)_{LF} \times SU(3)_{RF}$ 手征对称性自发破缺,只有其子群非手征的 $SU(3)_F$ 对称性(限制于 $\alpha_L^i = \alpha_R^i$)还保持着。这时理论有轴矢流 $J_{5\mu}^i = i\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5 \frac{\lambda_i}{2}\psi$ 的部分守恒,这些都是在强作用中相当成功的对称性理论。注意,由于手征对称性的自发破缺,即使拉氏量中的夸克质量参数 $m_\alpha = 0$,夸克也不是无质量的,因此 $m_\alpha$ 不是通常层子模型或非相对论夸克模型中组元夸克的质量,而只是拉氏量中表征 $SU(3)_{LF} \times SU(3)_{RF}$ 手征对称明显破坏的参数,它们也称为流代数夸克质量或流夸克质量。通常取组元夸克的质量约为核子质量的 $\frac{1}{3}$,即约 300MeV。而流夸克质量 $m_u, m_d$ 和 $m_s$ 要小得多,否则得不到 PCAC 的结果。

现在我们由质量最小的 $\pi, K, \eta$ 八个赝标介子是 Goldstone 粒子出发,估计夸克的流质量。考虑如下的 Green 函数

$$M_{\mu\nu}^{ud}(k) = i\int d^4x e^{-ikx} \langle 0 \mid T(J_{5\mu}^{ud}(x) J_{5\nu}^{du}(0)) \mid 0 \rangle$$

其中

$$J_{5\mu}^{ud} = i\bar{u}\gamma_\mu\gamma_5 d = (J_{5\mu}^1 + iJ_{5\mu}^2)$$

$$\langle 0 \mid J_{5\mu}^{ud}(0) \mid \pi^-(k) \rangle = \sqrt{2} i f_\pi k_\mu$$

$\pi^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi^1 - \mathrm{i}\varphi^2)$。由弱作用的理论(见第九章)知道 $\pi \to \mu + \nu$ 衰变过程的振幅正比于上式左方的矩阵元,因此 $f_\pi$ 可以由实验确定。我们有

$$\begin{aligned}k_\mu k_\nu M_{\mu\nu}^{ud}(k) = & k_\nu \int \mathrm{d}^4 x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \langle 0 \mid T(\partial_\mu J_{5\mu}^{ud}(x) J_{5\nu}^{du}(0)) \mid 0 \rangle \\ & - \mathrm{i}k_\nu \int \mathrm{d}^4 x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \delta(x_0) \langle 0 \mid [J_{54}^{ud}(x), J_{5\nu}^{du}(0)] \mid 0 \rangle \\ = & - \mathrm{i}k_\nu \int \mathrm{d}^4 x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \delta(x_0) \langle 0 \mid [J_{54}^{ud}(x), J_{5\nu}^{du}(0)] \mid 0 \rangle \\ & + \mathrm{i} \int \mathrm{d}^4 x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \langle 0 \mid T(\partial_\mu J_{5\mu}^{ud}(x) \partial_\nu J_{5\nu}^{du}(0)) \mid 0 \rangle \\ & + \int \mathrm{d}^4 x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \delta(x_0) \langle 0 \mid [J_{54}^{ud}(x), \partial_\nu J_{5\nu}^{du}(0)] \mid 0 \rangle\end{aligned}$$

利用 PCAC 方程

$$\partial_\mu J_{5\mu}^{ud} = \sqrt{2} f_\pi m_\pi^2 \varphi_\pi$$

和由运动方程得到的关系式$\partial_\nu J_{5\nu}^{ud} = \mathrm{i}(m_u + m_d)\bar{u}\gamma_5 d$,可将前式写为

$$\begin{aligned}& k_\mu k_\nu M_{\mu\nu}^{ud} + \mathrm{i}k_\nu \int \mathrm{d}^4 x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \delta(x) \langle 0 \mid [J_{54}^{ud}(x), J_{5\nu}^{du}(0)] \mid 0 \rangle \\ & = (m_u + m_d) \int \mathrm{d}^4 x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \delta^4(x) \langle 0 \mid \bar{u}(x) u(x) + \bar{d}(x) d(x) \mid 0 \rangle \\ & + 2\mathrm{i} f_\pi^2 m_\pi^4 \int \mathrm{d}^4 x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \langle 0 \mid T(\varphi_\pi \varphi_\pi^\dagger) \mid 0 \rangle\end{aligned}$$

取 $k \to 0$ 极限,上式左边趋于 0,得到

$$\begin{aligned}& (m_u + m_d) \langle 0 \mid \bar{u}(0) u(0) + \bar{d}(0) d(0) \mid 0 \rangle \\ & = - 2\mathrm{i} f_\pi^2 m_\pi^4 \int \mathrm{d}^4 x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \langle 0 \mid T(\varphi_\pi(x) \varphi_\pi^\dagger(0)) \mid 0 \rangle \Big|_{k \to 0}\end{aligned}$$

上式中的积分是 $\pi$ 介子的全传播子 $-\mathrm{i}\Delta'_F(k^2)$,由于 $m_\pi$ 特别小,在 $k \to 0$ 时,它趋于物理质量处的极点项 $-\frac{\mathrm{i}}{k^2 + m_\pi^2} \to -\frac{\mathrm{i}}{m_\pi^2}$。忽略 $-\mathrm{i}\Delta'_F(k^2)$ 的色散关系中其他中间态的贡献我们得到

$$(m_u + m_d) \langle 0 \mid \bar{u}(0) u(0) + \bar{d}(0) d(0) \mid 0 \rangle = - 2 f_\pi^2 m_\pi^2$$

注意,上式中 $m_\pi$ 是 $\pi$ 介子的物理质量。如果忽略流夸克质量不等产生的 $\mathrm{SU}(3)_V$ 破坏,可得 $\langle 0 | \bar{\psi}^{a\alpha}(0) \psi^{a\beta}(0) | 0 \rangle = \delta_{\alpha\beta} v$,且八个赝标介子有相同的衰变常数 $f_\pi$。这时,由上式和相似的推导可得

$$v(m_u + m_d) = - f_\pi^2 m_{\pi^\pm}^2 = - f_\pi^2 m_{\pi 0}^2, \qquad v(m_u + m_s) = - f_\pi^2 m_{K^\pm}^2$$

$$v(m_d + m_s) = -f_\pi^2 m_{K^0}^2, \qquad \frac{1}{3}v(m_d + m_u + 4m_s) = -f_\pi^2 m_\eta^2 \quad (7.22)$$

上式中没有包括电磁作用对质量的修正。电磁作用拉氏量密度 $eJ_\mu^{em}(x)A_\mu(x)$破坏了 $SU(3)_V$ 和 $SU(3)_A$ 对称,但仍保持一些子群的对称性。由 $J_\mu^{em} = i\bar{\psi}Q\gamma_\mu\psi$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

当 $i=3,6,7,8$ 时$[Q,\lambda_i]=0$,可证 $i=3,6,7,8$ 的手征变换式(7.21)仍是拉氏量的对称性。因此,与自发破缺流 $J_{5\mu}^i(i=3,6,7,8)$对应的四个中性赝标介子 $\pi^0$,$K^0$,$\overline{K}^0$ 和 $\eta$ 在夸克质量趋于0时仍是严格的Goldstone粒子。这表示它们的电磁质量正比于相应的夸克质量与精细结构常数$\frac{\alpha}{4\pi}$的乘积,因而可以忽略。另外,$\frac{\lambda_6}{2}$,$\frac{\lambda_7}{2}$和它们的对易子构成一个SU(2)群的生成元,相应的 $SU(2)_V$ 是没有破缺的对称性。$K^+(K^-)$和 $\pi^+(\pi^-)$是这个 $SU(2)_V$ 的二重态,因此,这四个带电的赝标介子的电磁质量是相等的。由上述结果可以得到如下的介子质量关系

$$3m_\eta^2 + 2m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2 = 2m_{K^+}^2 + 2m_{K^0}^2$$

上式即Gell-Mann-Okubo质量公式,与实验符合较好。还可以得到夸克质量比

$$\frac{m_u}{m_s} = \frac{2m_{\pi^0}^2 - m_{K^0}^2 - m_{\pi^+}^2 + m_{K^+}^2}{m_{K^0}^2 - m_{\pi^+}^2 + m_{K^+}^2}, \qquad \frac{m_d}{m_s} = \frac{m_{\pi^+}^2 - m_{k^+}^2 + m_{k^0}^2}{m_{K^0}^2 - m_{\pi^+}^2 + m_{K^+}^2}$$

由上式和 $m_{\pi^+} = 139.57$MeV, $m_{\pi^0} = 134.98$MeV, $m_{K^+} = 493.68$MeV 及 $m_{K^0} = 497.67$MeV的实验值得到$\frac{m_s}{m_d}\approx 20$,$\frac{m_d}{m_u}\approx 1.9$。如果设一个强子(不是Goldstone粒子)和由把它的一个 $u$(或 $d$)夸克用一个 $s$ 夸克替换而成的强子的质量差(例如$\frac{1}{2}(\rho+\omega)-K^*$,$N-\Lambda(\Sigma)$,$\Sigma-\Xi$,$\Xi-\Omega$),主要来自 $m_u$(或 $m_d$)$-m_s$,则 $m_s$ 值在120～180MeV之间,$m_d\leqslant 9$MeV,$m_u\leqslant 4.7$MeV。由此得到$-v\approx(200\text{MeV})^3$。夸克流质量和真空平均值有比这里更精确的方法确定,我们不在此讨论,但指出 $m_d$,$m_u$ 比QCD非微扰效应的典型能标300～500MeV(见以后的讨论)小很多。因此,$SU(2)_L\times SU(2)_R$ 是拉氏量的很好的对称性。$SU(3)_L\times SU(3)_R$ 对称性则差一些,但仍是有用的。

由于前面叙述的原因,由式(7.19)所描述的 $SU(3)_c$ 规范理论在20世纪70

年代后期开始受到人们很大的注意，被认为是强作用基本理论的最有希望的候选者。

由于在这个理论中 $SU(3)_c$ 规范对称没有破缺，八个规范粒子都是零质量的。因此这个理论是基于 $U(1)_Q$ 规范不变的量子电动力学(QED)在非 Abel 群 SU(3) 情况下的推广，所以被称为量子色动力学，简称为 QCD。在 QCD 中，规范场 $B_\mu^\rho$ 传递夸克间相互作用，它可以产生不同色的夸克之间的转换，此外 $B_\mu$ 还有自作用项，所以与 QED 中光子不带电的情况不同，这里规范场 $B_\mu^\rho$ 是带色的。如果 QCD 是强作用的正确理论，由 $B_\mu^\rho$ 传递的作用应当是几个夸克结合成强子的原因，所以相应于 $B_\mu^\rho$ 的八种规范粒子也称为胶子。

在 QCD 中规范粒子没有质量，但是实验上除光子外没有观察到零质量的矢量粒子，此外夸克质量如果很小，它应当已在实验中观察到，而实验给出自由夸克的质量下限为几十个 $\mathrm{GeV}/c^2$。因此，或则由于某种动力学的原因，自由胶子和自由夸克的质量比流夸克质量和组元夸克质量大很多，或则有某种动力学机制使夸克和胶子这样的带色的粒子绝对不能逸出强子之外，这就是所谓部分的或绝对的“色禁闭”。微扰论的研究没有给出色禁闭的结论，与渐近自由相联系，QCD 理论的相互作用在大距离处变强，因此色禁闭问题属于非微扰论的范围。已经有不少工作从不同的物理图像出发探讨 QCD 中的色禁闭问题，但所有这些工作都没有给出 QCD 中确实存在色禁闭的证明。对色禁闭最强的支持来自格点规范理论[16]。在这种理论中用离散的点阵代替连续的时空，Fermi 子和规范场分别定义在点阵和联结相邻点的键上。在点阵的间隔趋于零时格点规范理论趋于连续时空的 QCD。已经证明，在强耦合极限下，格点理论有色禁闭的性质。这时夸克和反夸克之间的规范场力线收缩成一根弦，由于弦的张力使夸克和反夸克不能分开到大的距离，它们只能结合为色单态。在点阵的间隔趋于零时耦合变弱，格点理论趋于渐近自由的微扰论 QCD。在中间耦合的区域，没有可靠的解析计算方法，但是用电子计算机做 Monte Carlo 模拟计算的结果倾向于在耦合由强变弱时不存在解除色禁闭的相变。这可以理解为 QCD 同时具有在大距离处的色禁闭和小距离处的渐近自由两种性质。作为色单态的强子的结构与色禁闭有关，强子结构和强子谱以及手征对称性自发破缺的问题属于非微扰的范围，还没有可靠的精确计算方法，目前只有用半唯象半理论的方法和电子计算机的 Monte Carlo 方法所做的计算。色禁闭、手征对称性自发破缺和强子结构问题是 QCD 理论中尚未解决的基本问题。在本章的其余部分及下一章中我们将限于微扰论可以应用的问题，即渐近自由起作用的现象。

## 7.2　深度非弹性过程的运动学及部分子模型的计算

我们将把本章的其余部分用于讨论轻子核子深度非弹性散射过程，在于 7.4 节中讨论量子色动力学关于这个过程的结论之前，作为准备知识，我们将在本节中叙述深度非弹性过程的运动学及部分子模型对这个过程的结论。7.3 节将叙述算符乘积展开的数学工具。

首先，考虑轻子 $l$($e$ 或 $\mu$)与核子的非弹性散射过程

$$l+N\to l+\text{强子}$$

这个过程由图 7.3 表示。令 $k$ 及 $k'$ 分别代表始态及末态的轻子的动量，$P$ 代表核子的动量，$P'$ 代表末态强子的总动量，$P'_j$ 代表末态每个强子的动量，$q=k-k'=P'-P$。忽略轻子的质量，此过程的单举截面可写为

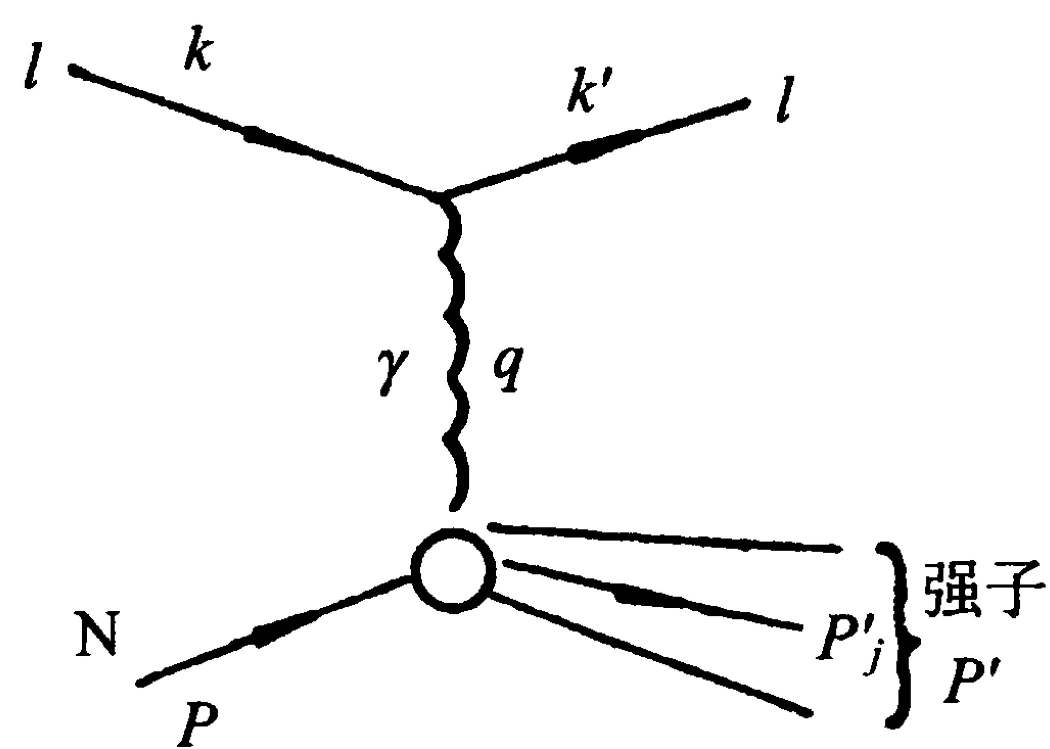



图 7.3

$$\frac{\mathrm{d}^3\sigma^{(lN)}}{\mathrm{d}^3k'}=(2\pi)^{-3}\left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2\frac{m_P}{P_0}W_{\mu\nu}m_{\mu\nu}\tag{7.23}$$

其中

$$\begin{aligned}m_{\mu\nu}&=\pm\frac{1}{2}\sum_{s_l,s'_l}(\bar{u}^l(k')\gamma_\mu u^l(k))^*(\bar{u}^l(k')\gamma_\nu u^l(k))\\&=\frac{1}{2EE'}(k'_\mu k_\nu+k'_\nu k_\mu-\delta_{\mu\nu}(k\cdot k'))\end{aligned}\tag{7.23$'$}$$

上式中的 ± 号，对 $\mu=1,2,3$ 取正号，对 $\mu=4$ 取负号，$E\equiv k_0$，$E'\equiv k'_0$，$s_l$ 及 $s'_l$ 分别为始态及末态轻子的自旋分量。如果靶核没有极化

$$\begin{aligned}W_{\mu\nu}=&\frac{(2\pi)^4}{2}\sum_{s,s_j}\int\prod_j\frac{\mathrm{d}^3P'_j}{(2\pi)^3 2P'_{j0}}\delta^4(P'-P-q)\\&\times\langle P,s\mid\bar{J}^{\mathrm{em}}_\mu(0)\mid P'_j,s'_j\rangle\cdot\langle P'_j,s'_j\mid J^{\mathrm{em}}_\nu(0)\mid P,s\rangle\end{aligned}\tag{7.24}$$

其中，$J^{\mathrm{em}}_\mu$ 为强子电流，$s$ 为始态核子的自旋分量，$s'_j$ 为末态第 $j$ 个强子的自旋分量。式(7.24)右方的因子 $\frac{1}{2P'_{j0}}$ 是对 Bose 子写的，对 Fermi 子应取 $\frac{m_j}{P'_{j0}}$。利用平移不变性可将式(7.24)改写为

$$W_{\mu\nu}=\frac{(2\pi)^4}{2}\sum_{s,s'_j}\int\prod_j\frac{\mathrm{d}^3P'_j}{(2\pi)^3 2P'_{j0}}$$

$$\times \int \frac{\mathrm{d}^4 x}{(2\pi)^4} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} \langle P,s \mid \bar{J}_\mu^{\mathrm{em}}(x) \mid P_j', s_j' \rangle \langle P_j', s_j' \mid J_\nu^{\mathrm{em}}(0) \mid P,s \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \sum_s \int \mathrm{d}^4 x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} \langle P,s \mid \bar{J}_\mu^{\mathrm{em}}(x) J_\nu^{\mathrm{em}}(0) \mid P,s \rangle \tag{7.25}$$

由于核子是质量最小的具有重子数的态，而且 $q^2 > 0$，$-P\cdot q > 0$，$(P-q)^2 > -m_P^2$，故有

$$\sum_n \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}^4 x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} \langle P \mid J_\nu^{\mathrm{em}}(0) \mid n \rangle \langle n \mid \bar{J}_\mu^{\mathrm{em}}(x) \mid P \rangle$$

$$= \sum_n \delta^4 (P - P_n - q) \langle P \mid J_\nu^{\mathrm{em}}(0) \mid n \rangle \langle n \mid \bar{J}_\mu^{\mathrm{em}}(0) \mid P \rangle = 0$$

由上式及式(7.25)得到

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_s \int \mathrm{d}^4 x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x} \langle P,s \mid [\bar{J}_\mu^{\mathrm{em}}(x), J_\nu^{\mathrm{em}}(0)] \mid P,s \rangle \tag{7.26}$$

因此$\frac{1}{2} e_\mu e_\nu W_{\mu\nu}$是动量为$q$ 极化矢量为$e_\mu$ 的虚光子和核子的朝前散射振幅的虚部。由 Lorentz 协变性和规范不变性条件 $q_\mu W_{\mu\nu} = q_\nu W_{\mu\nu} = 0$，$W_{\mu\nu}$可以写成如下的形式

$$\frac{m_P}{2\pi} W_{\mu\nu} = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) W_1(q^2, \nu) + \left(P_\mu - q_\mu \frac{P\cdot q}{q^2}\right)\left(P_\nu - q_\nu \frac{P\cdot q}{q^2}\right) W_2(q^2, \nu) \tag{7.27}$$

其中，$\nu = -P\cdot q$。在实验室系中

$$\frac{\nu}{m_P} = (E - E') = (P_0' - m_P) \tag{7.28}$$

为能量的传递。由于 $q_\mu m_{\mu\nu} = q_\nu m_{\mu\nu} = 0$，式(7.27)中含 $q_\mu$ 的项在截面$\frac{\mathrm{d}^3\sigma^{(lN)}}{\mathrm{d}^3 k'}$中无贡献。

将式(7.23′)和(7.27)代入式(7.23)并利用式(7.28)及

$$q^2 \simeq 2EE'(1 - \cos\theta)$$

$$\mathrm{d}^3 k' \simeq \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\cos\theta E'^2 \mathrm{d}E'$$

得到用实验室系的能量 $E$，$E'$及散射角$\theta$表示的截面公式

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{(lN)}}{\mathrm{d}E' \mathrm{d}\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{2m_P E^2 \sin^4\theta/2}\left[\cos^2\frac{\theta}{2} m_P^2 W_2 + 2\sin^2\frac{\theta}{2} W_1\right] \tag{7.29}$$

利用实验室系中的关系式

$$\mathrm{d}E' \mathrm{d}\cos\theta = \frac{1}{2m_P EE'} \mathrm{d}q^2 \mathrm{d}\nu \tag{7.30}$$

还可得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{(lN)}}{\mathrm{d}q^2\mathrm{d}\nu}=\frac{4\pi\alpha^2}{(q^2)^2}\left[\left(1-\frac{\nu}{P\cdot k}-\frac{m_P^2q^2}{4(P\cdot k)^2}\right)W_2+\frac{1}{2}\frac{q^2}{(P\cdot k)^2}W_1\right]\tag{7.31}$$

式(7.29)和(7.31)中出现两个不变函数 $W_1$ 和 $W_2$,这是与虚光子有横向和标量两种有贡献的极化方式有关的。考虑动量为 $q$ 的虚光子在核子上的散射。按照光学定理,散射总截面与朝前散射振幅的虚部相联系。因此,散射总截面用实验室系的入射动量表示可写为

$$\sigma^{(\gamma N)}=\frac{e^2}{2\mid\boldsymbol{q}\mid}e_\mu e_\nu W_{\mu\nu}\tag{7.32}$$

其中,$e_\mu$ 为虚光子的极化矢量。用不变量表示$|\boldsymbol{q}|=\left(q^2+\frac{\nu^2}{m_P^2}\right)^{\frac{1}{2}}$。对横向极化光子 $e^t\cdot q=0, e_0^t=0$,这时由式(7.27)及(7.32)得到横向虚光子的截面

$$\sigma_t=\frac{\pi e^2}{m_P\mid\boldsymbol{q}\mid}W_1\tag{7.33}$$

对标量虚光子,由 $e^s\cdot e^t=0, e^s\cdot q=0$ 得到

$$e_0^s=\mid\boldsymbol{q}\mid/\sqrt{q^2},\qquad e_3^s=q_0/\sqrt{q^2}$$

因此标量光子的截面为

$$\sigma_s=\frac{\pi e^2}{m_P\mid\boldsymbol{q}\mid}\left[\left(m_P^2+\frac{\nu^2}{q^2}\right)W_2-W_1\right]\tag{7.34}$$

定义

$$R\equiv\sigma_s/\sigma_t$$

则由式(7.33)和(7.34)得到

$$\frac{W_1}{W_2}=\left(m_P^2+\frac{\nu^2}{q^2}\right)\left(\frac{1}{1+R}\right)\tag{7.35}$$

式(7.29)可以写为

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{(lN)}}{\mathrm{d}E'\mathrm{d}\cos\theta}=\frac{\alpha}{\pi}\frac{\mid\boldsymbol{q}\mid E'}{q^2E(1-\varepsilon)}(\sigma_t+\varepsilon\sigma_s)\tag{7.36}$$

其中

$$\varepsilon=\left[1+2\tan^2\frac{\theta}{2}\left(1+\frac{\nu^2}{m_P^2q^2}\right)\right]^{-1}\tag{7.37}$$

引入函数(常称为结构函数)

$$F_2=\nu W_2,\qquad F_1=W_1\tag{7.38}$$

$F_{1,2}$是无量纲的量,它们可以写为

$$F_{1,2}=F_{1,2}\left(x,\frac{q^2}{m^2}\right)$$

其中，$m$ 为某一有质量量纲的数

$$x = \frac{q^2}{2\nu} \tag{7.39}$$

由$(P+q)^2 \leqslant -m_P^2$ 知 $0 \leqslant x \leqslant 1$。

以上是轻子核子非弹性散射截面的一般讨论。所谓深度非弹性是指 $q^2$ 和 $\nu$ 都很大，这表示在实验室系中动量和能量的传递都很大。进一步的研究需要知道 $F_{1,2}$ 的性质，由 Bjorken 提出的标度性假设说，在深度非弹性极限

$$q^2 \to \infty, \qquad \nu \to \infty, \qquad \frac{q^2}{2\nu} = x = \text{常数} \tag{7.40}$$

下，$F_{1,2}$ 的极限只与 $x$ 有关

$$F_{1,2}\left(x, \frac{q^2}{m^2}\right) \to F_{1,2}(x) \tag{7.41}$$

对 $F_{1,2}$ 的更具体的知识需要用到部分子模型。部分子模型的基本假设如下[2~4]：核子是由一些点粒子(部分子)组成的。在核子高速运动的参考系中，由于相对论的时间变慢效应，这些部分子由于互相作用而改变其运动状态的过程变慢了。而深度非弹性过程是在电子非常接近一个部分子时产生的，因此碰撞发生在很短的时间内。在这个很短的时间中可以忽略部分子之间的相互作用而把它们看作是自由的。这个想法基本上是通常量子力学中所用的冲击近似。部分子模型中还假设核子中的部分子的横向动量很小。轻子和核子的深度非弹性散射可以分为两步。第一步是轻子与核子中的自由部分子做弹性散射，碰撞后的部分子近似地可看作在质壳上，这是一个时间极短的过程。第二步是末态的部分子通过强相互作用和重新组合转化为一些强子。在深度非弹性散射时被撞击的部分子得到很大的横向动量，电子和不同的部分子散射的波函数很少重迭，因此电子在各个部分子上的散射看作是非相干的。此外，如果由于某种原因(如色禁闭)，自由的部分子不能在末态中出现，则末态中部分子转化为强子的概率为 1。因此深度非弹性单举截面是轻子与部分子弹性散射截面之和

$$\frac{\mathrm{d}^3\sigma^{(lN)}}{\mathrm{d}^3k'} = \sum_j \frac{\mathrm{d}^3\sigma^{(lj)}}{\mathrm{d}^3k'} \tag{7.42}$$

由式(7.23)的形式及上式可得

$$\frac{m_P}{P_0} W_{\mu\nu} = \sum_j \frac{m_j}{p_{j0}} W^j_{\mu\nu} \tag{7.43}$$

其中，$p_j$ 及 $m_j$ 分别为第 $j$ 个部分子的四动量及质量。相应于式(7.24)有

$$W^j_{\mu\nu} = (2\pi)^4 \frac{1}{2} \sum_{s_j, s_j'} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_j'}{(2\pi)^3} \frac{m_j}{p_{j0}'} \delta^4(p_j' - p_j - q)$$

$$\times\langle p_j,s_j\mid \bar{J}^{\text{em}}_\mu(0)\mid p'_j,s'_j\rangle\langle p'_j,s'_j\mid J^{\text{em}}_\nu(0)\mid p_j,s_j\rangle$$

$$=2(2\pi)m_j\,\frac{1}{2}\sum_{s_j,s'_j}\delta((p_j+q_j)^2+m_j^2)$$

$$\times\langle p_j,s_j\mid \bar{J}^{\text{em}}_\mu(0)\mid p'_j,s'_j\rangle\langle p'_j,s'_j\mid J^{\text{em}}_\nu(0)\mid p_j,s_j\rangle \qquad (7.44)$$

假设核子中部分子的横动量的量级约为$\langle p_{\perp j}\rangle\approx\frac{1}{r}\lesssim 400\text{MeV}$,其中 $r$ 为核子半径。在核子以高速运动的参考系中,如果$|\boldsymbol{p}_j|\gg m_j,|\boldsymbol{p}_{\perp j}|$,则有

$$p_j\simeq\xi_j P \qquad (7.45)$$

这里,$\xi_j$ 是第$j$ 个部分子的动量与核子全部动量的比,因此有$\sum_j\xi_j=1$。

如部分子为自旋$\frac{1}{2}$的粒子,电流 $J^{\text{em}}_\mu$ 的形式为

$$J^{\text{em}}_\mu=\mathrm{i}\sum_\alpha Q_\alpha\bar{\psi}^\alpha\gamma_\mu\psi^\alpha \qquad (7.46)$$

其中,$Q_\alpha$ 为第$\alpha$ 种部分子的电荷。令 $\rho^\alpha(\xi^\alpha)\mathrm{d}\xi^\alpha$ 表示动量$p_\alpha$ 在$\xi^\alpha P$ 至$(\xi^\alpha+\mathrm{d}\xi^\alpha)P$ 之间的第 $\alpha$ 种部分子的数目,则由式(7.43)和(7.44)和自由部分子假设

$$W_{\mu\nu}=\sum_\alpha 2(2\pi)\frac{m_\alpha}{m_P}\int\frac{\mathrm{d}\xi^\alpha}{\xi^\alpha}\rho^\alpha(\xi^\alpha)Q_\alpha^2\,\frac{1}{2}$$

$$\times\sum_{s_\alpha,s'_\alpha}\delta(p'^2_\alpha+m_\alpha^2)(\bar{u}(p'_\alpha)\gamma_\mu u(p_\alpha))^*(\bar{u}(p'_\alpha)\gamma_\mu u(p_\alpha))$$

$$=(2\pi)\frac{1}{m_P}\sum_\alpha\int\frac{\mathrm{d}\xi^\alpha}{\xi^\alpha}\rho^\alpha(\xi^\alpha)\cdot Q_\alpha^2(p'_{\alpha\mu}p_{\alpha\nu}+p'_{\alpha\nu}p_{\alpha\mu}-\delta_{\mu\nu}(p_\alpha\cdot p'_\alpha))\delta(p'^2_\alpha+m_\alpha^2)$$

$$(7.47)$$

其中,$p'_\alpha=p_\alpha+q$,$p_\alpha=\xi^\alpha P$(这里用的部分子旋量波函数是协变归一化的)。按照上面叙述的部分子模型的假设$|p_\alpha^2+m_\alpha^2|\leqslant\Lambda^2$,$\Lambda$ 可取为几百个 MeV 的量级。式(7.47)中已近似地把 $p_\alpha$ 取在质壳上,这在 $q^2\gg\Lambda^2$ 时是可行的。因此

$$\delta(p'^2_\alpha+m_\alpha^2)=\delta((\xi^\alpha P+q)^2+m_\alpha^2)=\frac{1}{2\nu}\delta(\xi^\alpha-x) \qquad (7.48)$$

将式(7.48)代入式(7.47)得到

$$F_1^{(lN)}=W_1^{(lN)}=\frac{1}{2}\sum_\alpha Q_\alpha^2\rho^\alpha(x)$$

$$F_2^{(lN)}=\nu W_2^{(lN)}=\sum_\alpha Q_\alpha^2 x\rho^\alpha(x) \qquad (7.49)$$

式(7.49)满足标度性假设及

$$F_2^{(lN)}(x)=2xF_1^{(lN)}(x) \qquad (7.50)$$

上式称为 Callan-Gross 关系，由它和式(7.35)知道，当 $\nu \gg m_P^2$ 时，$R \approx 0$。这是自旋 $\frac{1}{2}$ 的部分子的特殊性质，对于自旋为 0 的部分子得到的 $F_2$ 与式(7.49)相同，但是 $F_1 = 0$。实验支持式(7.50)。

现在我们来讨论中微子深度非弹性散射过程(参看第九章)

$$\nu_\mu + N \to \mu^- + \text{强子} \tag{7.51}$$

$$\bar{\nu}_\mu + N \to \mu^+ + \text{强子} \tag{7.51$'$}$$

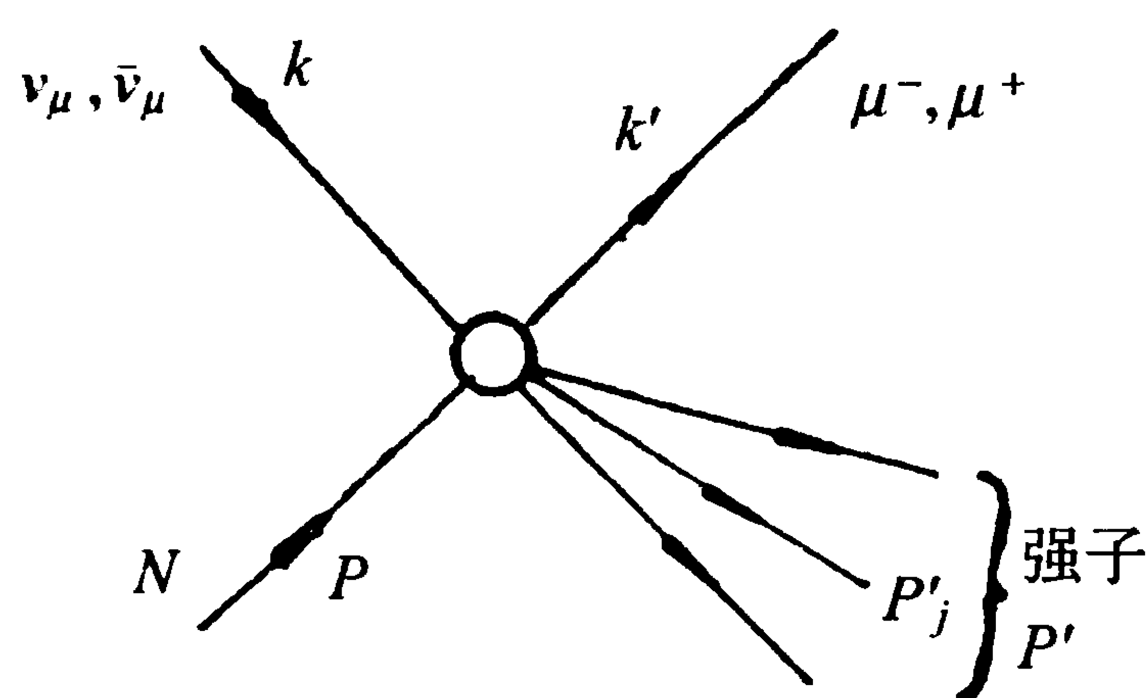



图 7.4

这个过程由图 7.4 表示，图中注明了各个粒子动量的符号。这是一个弱作用过程，其等效拉氏函数密度可取为

$$\mathscr{L}_{\text{int}} = \frac{G}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2}j_\mu)(2\sqrt{2}\bar{J}_\mu) \tag{7.52}$$

其中，$j_\mu$ 为轻子弱作用流

$$2\sqrt{2}j_\mu = \mathrm{i}\bar{\mu}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu_\mu$$

$J_\mu$ 为强子弱作用流。过程式(7.51)的单举微分截面可以写为

$$\frac{\mathrm{d}^3\sigma^{(\nu N)}}{\mathrm{d}^3k'} = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{m_P}{P_0}\frac{G^2}{2}m_{\mu\nu}^{(\nu N)}W_{\mu\nu}^{(\nu N)} \tag{7.53}$$

其中

$$\begin{aligned} m_{\mu\nu}^{(\nu N)} &= \pm\sum_{s_l}(\bar{u}^l(k')\gamma_\mu(1+\gamma_5)u^\nu(k))^*(\bar{u}^l(k')\gamma_\nu(1+\gamma_5)u^\nu(k)) \\ &= \frac{1}{EE_l}[k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu - \delta_{\mu\nu}(k\cdot k') + \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}k'_\rho k_\sigma] \end{aligned} \tag{7.54}$$

上式中，$E \equiv k_0$ 为入射中微子的能量，$E_l \equiv k'_0$ 为末态轻子的能量，$s_l$ 为它的自旋分量

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^{(\nu N)} &= (2\pi)^4\frac{1}{2}\sum_{s,s_j}\int\prod_j\frac{\mathrm{d}^3P'_j}{(2\pi)^3 2P'_{j0}}\delta^4(P'-P-q) \\ &\quad\times\langle P,s\mid 2\sqrt{2}J_\mu(0)\mid P'_j,s'_j\rangle\cdot\langle P'_j,s'_j\mid 2\sqrt{2}\bar{J}_\nu(0)\mid P,s\rangle \\ &= \frac{1}{2}\sum_s 8\int\mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\langle P,s\mid[J_\mu(x),\bar{J}_\nu(0)]\mid P,s\rangle \end{aligned} \tag{7.55}$$

其中，$q = k - k'$。由 Lorentz 协变性，$W_{\mu\nu}$ 可以写为如下的形式

$$\frac{m_P}{2\pi}W_{\mu\nu}^{(\nu N)} = \delta_{\mu\nu}W_1 + P_\mu P_\nu W_2 - \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}q_\rho P_\sigma W_3 + \cdots \tag{7.56}$$

上式中忽略了正比于 $q_\mu$ 或 $q_\nu$ 的项,这些项在 $\frac{\mathrm{d}^3\sigma^{(\nu N)}}{\mathrm{d}^3k'}$ 中的贡献正比于轻子质量,在深度非弹性过程中可以忽略。

引进不变量

$$q^2 = (k-k')^2 \simeq -2k\cdot k', \nu = -P\cdot q$$

及无量纲量

$$x = \frac{q^2}{2\nu}, \qquad y = -\frac{\nu}{P\cdot k} \tag{7.57}$$

在实验室系中

$$y = \frac{E-E_l}{E} = \frac{E_k - M_P}{E} \tag{7.58}$$

故有 $0\leqslant y\leqslant 1$。将式(7.54)和(7.56)代入式(7.53)并利用

$$\mathrm{d}^3k' \simeq \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\cos\theta(E')^2\mathrm{d}E' \simeq \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}q^2\frac{E_l}{2m_PE}\mathrm{d}\nu = \mathrm{d}\varphi E_l\nu\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{7.59}$$

得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{(\nu N)}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = -\frac{G^2P\cdot k}{\pi}\left[F_2^{\nu N}(1-y) + 2xF_1^{\nu N}\frac{y^2}{2} - xF_3^{\nu N}y\left(1-\frac{y}{2}\right)\right] \tag{7.60}$$

其中,$F_1 = W_1, F_{2,3} = \nu W_{2,3}$。上式中忽略了 $\frac{m_P^2xy}{2P\cdot k}F_2$ 项。

对反中微子深度非弹性散射过程式(7.51′),式(7.54)应改为

$$m_{\mu\nu}^{(\bar{\nu}N)} = \pm\sum_{s_l}(\bar{v}^\nu(-\boldsymbol{k})\gamma_\mu(1+\gamma_5)v^l(-\boldsymbol{k}'))^*(\bar{v}^\nu(-\boldsymbol{k})\gamma_\nu(1+\gamma_5)v^l(-\boldsymbol{k}'))$$

$$= \frac{1}{EE_l}[k'_\mu k_\nu + k_\mu k'_\nu - \delta_{\mu\nu}(k\cdot k') - \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}k'_\rho k_\sigma] \tag{7.61}$$

式(7.55)中 $J_\mu$ 应由 $J_\mu^\dagger$ 代替,其他计算都不变。因此得到过程式(7.51)′的单举微截面为

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{(\bar{\nu}N)}}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = -\frac{G^2P\cdot k}{\pi}\left[F_2^{\bar{\nu}N}(1-y) + 2xF_1^{\bar{\nu}N}\frac{y^2}{2} + xF_3^{\bar{\nu}N}y\left(1-\frac{y}{2}\right)\right] \tag{7.62}$$

在实验室系中 $-P\cdot k = m_PE$,因此单举截面式(7.60)和(7.62)与实验室系入射能量成正比。

以上是单举截面的一般形式。$F_a(a=1,2,3)$称为结构函数,它们是由 $q^2$ 和 $\nu$ 组成的无量纲函数,故可写为

$$F_a = F_a\left(x,\frac{q^2}{m^2}\right)$$

按照 Bjorken 标度性假设,它们在深度非弹性极限式(7.40)下只与 $x$ 有关。

部分子模型对中微子深度非弹单举截面的计算也可以仿照前面对带电轻子深度非弹性单举截面的计算进行。如部分子为自旋$\frac{1}{2}$的粒子,$J_\mu$ 中包含如下的左手流

$$2\sqrt{2}J_{\mu L} = i\sum_{\alpha}(c_\alpha\bar{\psi}^\beta\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi^\alpha) \tag{7.63}$$

相应于式(7.47),四动量为 $p_\alpha$ 的第$\alpha$ 种部分子对 $W_{\mu\nu}$ 的贡献为

$$\begin{aligned} &2(2\pi)\frac{m_\alpha}{m_P}(c_\alpha)^2\int\frac{d\xi}{\xi}\rho^\alpha(\xi)\frac{1}{2}\sum_{s_\alpha,s_\beta}\delta((p_\alpha+q)^2+m_\beta^2) \\ &\times[(\bar{u}^\beta\gamma_\mu(1+\gamma_5)u^\alpha)^*(\bar{u}^\beta\gamma_\nu(1+\gamma_5)u^\alpha)] \\ &= 4\pi\frac{1}{m_P}c_\alpha^2\int\frac{d\xi}{\xi}\rho^\alpha(\xi)[p'_{\alpha\mu}p_{\alpha\nu}+p'_{\alpha\nu}p_{\alpha\mu} \\ &\quad -\delta_{\mu\nu}(p_\alpha\cdot p'_\alpha)+\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p'_{\alpha\rho}p_{\alpha\sigma}]\delta((p_\alpha+q)^2+m_\beta^2) \end{aligned} \tag{7.64}$$

其中,$p'_\alpha=p_\alpha+q$。如果 $q^2\gg|m_\beta^2-m_\alpha^2|$,则

$$\delta((p_\alpha+q)^2+m_\beta^2)\simeq\frac{1}{2\nu}\delta(\xi-x)$$

对反部分子 $\bar{\alpha}$ 的贡献进行同样的计算得到左手流式(7.63)对 $W_{\mu\nu}$ 的贡献为

$$\frac{m_P}{2\pi}W_{\mu\nu,L}^{\alpha,\bar{\alpha}} = (c_\alpha)^2\rho^{\alpha,\bar{\alpha}}(x)\left[\delta_{\mu\nu}+P_\mu P_\nu\frac{2x}{\nu}\pm\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}q_\rho P_\sigma\right] \tag{7.65}$$

同样,对于右手流

$$2\sqrt{2}J_{\mu R} = i\sum_\alpha c'_\alpha i\bar{\psi}^\beta\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi^\alpha \tag{7.66}$$

得到

$$\frac{m_P}{2\pi}W_{\mu\nu,R}^{\alpha,\bar{\alpha}} = (c'_\alpha)^2\rho^{\alpha,\bar{\alpha}}(x)\left[\delta_{\mu\nu}+P_\mu P_\nu\frac{2x}{\nu}\mp\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}q_\rho P_\sigma\right] \tag{7.67}$$

由此得到

$$F_2^{\alpha,\bar{\alpha}}(x) = 2xF_1^{\alpha,\bar{\alpha}}(x) \quad \text{(Callan-Gross 关系)} \tag{7.68}$$

$$F_2^{\alpha,\bar{\alpha}}(x) = \mp xF_3^{\alpha,\bar{\alpha}}(x) \tag{7.69}$$

$$F_2^{\alpha,\bar{\alpha}}(x) = 2[(c_\alpha)^2+(c'_\alpha)^2]x\rho^{\alpha,\bar{\alpha}}(x) \tag{7.70}$$

式(7.69)中-(+)号分别对左(右)手的部分子和反部分子。将式(7.68)~(7.70)代入式(7.60)及(7.62),得到

$$\frac{d^2\sigma^{(\nu N)}}{dxdy} = -\frac{G^2(P\cdot k)}{\pi}[F_{左}^{(\nu N)}(x)+F_{右}^{(\nu N)}(x)(1-y)^2] \tag{7.71}$$

$$\frac{d^2\sigma^{(\bar{\nu}N)}}{dxdy} = -\frac{G^2(P\cdot k)}{\pi}[F_{右}^{(\bar{\nu}N)}(x)+F_{左}^{(\bar{\nu}N)}(x)(1-y)^2] \tag{7.72}$$

其中

$$F_{右}(x) = 2x\sum_{\alpha}[(c'_{\alpha})^2\rho^{\alpha}(x) + (c_{\alpha})^2\rho^{\bar{\alpha}}(x)] \tag{7.73}$$

$$F_{左}(x) = 2x\sum_{\alpha}[(c_{\alpha})^2\rho^{\alpha}(x) + (c'_{\alpha})^2\rho^{\bar{\alpha}}(x)] \tag{7.74}$$

$F_{左}$ 和 $F_{右}$ 分别为左手部分子(反部分子)和右手部分子(反部分子)的贡献。

$$F_2 = F_{左} + F_{右} \tag{7.75}$$

注意到中微子是左旋的,由式(7.71)及(7.72)可以看到螺旋性相同的粒子散射时

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}y} \sim 常数$$

螺旋性相反的粒子散射时

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}y} \sim (1-y)^2$$

这种行为是角动量守恒的结果。在部分子和中微子系统的质心系中,令 $\theta_{cm}$ 为散射角则 $y=\frac{1}{2}(1-\cos\theta_{cm})$,角动量守恒禁戒螺旋性相反的粒子向后散射,因此 $\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}y}\right|_{y=1}=0$。

由式(7.71)和(7.72)得到单举总截面

$$\sigma^{(\nu N)} = \frac{G^2 m_P E}{\pi}\int \mathrm{d}x\left[F_{左}^{(\nu N)}(x) + \frac{1}{3}F_{右}^{(\nu N)}(x)\right] \tag{7.76}$$

$$\sigma^{(\bar{\nu} N)} = \frac{G^2 m_P E}{\pi}\int \mathrm{d}x\left[\frac{1}{3}F_{左}^{(\bar{\nu} N)}(x) + F_{右}^{(\nu N)}(x)\right] \tag{7.77}$$

通常假设核子的部分子分为三个价夸克,夸克-反夸克对的海及一些对电磁作用和弱作用都无贡献的中性胶子三个部分。在夸克模型中质子的价夸克包含两个 $u$ 和一个 $d$,中子的价夸克包含两个 $d$ 和一个 $u$。海夸克主要分布在 $x$ 小处。假设海夸克为同位旋 SU(2)对称或 SU(3)对称。因此分布函数可写为

$$\begin{aligned}\rho^{u}(x) &= u_v(x) + \eta(x)\\ \rho^{d}(x) &= d_v(x) + \eta(x)\\ \rho^{\bar{u}}(x) &= \rho^{\bar{d}}(x) = \eta(x)\\ \rho^{s}(x) &= \rho^{\bar{s}}(x)(在\ \mathrm{SU}(3)\ 对称下等于\ \eta(x))\end{aligned} \tag{7.78}$$

由于 $u$ 的电荷为$\frac{2}{3}$,$d$ 和 $s$ 的电荷为 $-\frac{1}{3}$。由式(7.49)得到

$$F_2^{(lN)}(x) = x\left[\frac{4}{9}\rho_N^{u}(x) + \frac{1}{9}\rho_N^{d}(x) + \frac{1}{9}\rho_N^{s}(x)\right] + u,d,s \to \bar{u},\bar{d},\bar{s}\ 项 \tag{7.79}$$

在弱-电相互作用的 W-S 模型中,$J_\mu$ 中只有左手流。由式(9.68)可以定出式(7.63)中的常数 $c_\alpha$,代入式(7.70)可以求出 W-S 模型中的 $F_左$ 和 $F_右$。在产生含 $c$ 夸克的强子的阈能以下,可以求得

$$F_左^{(\nu N)}(x) = 2x(\cos^2\theta_c\rho_N^d(x) + \sin^2\theta_c\rho_N^s(x)) \tag{7.80}$$

$$F_右^{(\nu N)}(x) = 2x\cos^2\theta_c\rho_N^{\bar{u}}(x) \tag{7.81}$$

$$F_左^{(\bar{\nu} N)}(x) = 2x\cos^2\theta_c\rho_N^{\bar{u}}(x) \tag{7.82}$$

$$F_右^{(\bar{\nu} N)}(x) = 2x(\cos^2\theta_c\rho_N^{\bar{d}}(x) + \sin^2\theta_c\rho_N^{\bar{s}}(x)) \tag{7.83}$$

在产生含 $c$ 夸克的强子的阈能以上

$$F_左^{(\nu N)}(x) = 2x(\rho_N^d(x) + \rho_N^s(x)) \tag{7.84}$$

$$F_右^{(\nu N)}(x) = 2\cos^2\theta_c x\rho_N^{\bar{u}}(x) \tag{7.85}$$

$$F_左^{(\bar{\nu} N)}(x) = 2\cos^2\theta_c x\rho_N^{u}(x) \tag{7.86}$$

$$F_右^{(\bar{\nu} N)}(x) = 2x(\rho_N^{\bar{d}}(x) + \rho_N^{\bar{s}}(x)) \tag{7.87}$$

由电荷对称,中子 $n$ 与质子 $p$ 的部分子密度有关系式

$$\rho_p^u(x) = p_n^d(x), \qquad \rho_p^d(x) = \rho_n^u(x) \tag{7.88}$$

由上述部分子模型中结构函数表达式可以得到如下的一系列求和规则和关系式:

(1) Adler 求和规则

$$\int_0^1 dx(F_1^{(\bar{\nu}P)} - F_1^{(\nu P)}) = \int_0^1 \frac{dx}{2x}(F_2^{(\bar{\nu}P)} - F_2^{(\nu P)})$$

$$= \int_0^1 dx(\rho_P^u - \rho_P^{\bar{u}} - \rho_P^d + \rho_P^{\bar{d}}) = 2I_3 = 1 \tag{7.89}$$

其中,$I_3$ 为同位旋第三分量,而质子的 $I_3$ 等于$\frac{1}{2}$。关于 $F_2$ 的求和规则也可以由流代数导出,因此不限于深度非弹性极限。

(2) Gross-Llewellyn Smith 求和规则

$$\int_0^1 dx(F_3^{(\nu P)} + F_3^{(\bar{\nu}P)}) = \int_0^1 dx(F_3^{(\nu n)} + F_3^{(\bar{\nu}n)}) = -2\int_0^1 dx(\rho_P^u + \rho_P^d - \rho_P^{\bar{u}} - \rho_P^{\bar{d}})$$

$$= -2\int_0^1 dx[(\rho_P^u + \rho_P^d + \rho_P^s - \rho_P^{\bar{u}} - \rho_P^{\bar{d}} - \rho_P^{\bar{s}}) - (\rho_P^s - \rho_P^{\bar{s}})$$

$$= -6B + 2s = -6 \tag{7.90}$$

其中,$B$,$s$ 分别为重子数及奇异数。此式也可以由流代数得到。

(3)
$$F_3^{(\nu P)} - F_3^{(\bar{\nu}P)} = 12(F_1^{(eP)} - F_1^{(en)}) \tag{7.91}$$

此式依赖于夸克模型。

(4)
$$\frac{1}{4}\leqslant F_2^{(en)}/F_2^{(eP)}\leqslant 4 \tag{7.92}$$

此式依赖于夸克模型的分数电荷。对整数电荷 $F_2^{(en)}/F_2^{(eP)}\geqslant\frac{1}{2}$。

(5)
$$F_2^{(\nu P)}+F_2^{(\nu n)}\leqslant\frac{18}{5}(F_2^{(eP)}+F_2^{(en)}) \tag{7.93}$$

上式中等号在核子中无 $s$ 夸克时成立。上式右方的系数$\frac{18}{5}$依赖于分数电荷。

(6) 动量求和规则

由于$\int_0^1 \mathrm{d}x\cdot\rho_N^\alpha(x)$代表核子中 $\alpha$ 部分子所带的动量与核子动量之比,可以得到

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\left[\frac{9}{2}(F_2^{(eP)}+F_2^{(en)})-\frac{3}{4}(F_2^{(\nu P)}+F_2^{(\nu n)})\right]=1-a \tag{7.94}$$

其中,$a$ 为核子中除夸克外其他部分子所带的动量与核子动量之比。

上述标度性假设及部分子模型的预言与深度非弹性散射的实验比较好地符合,证明它可以作为零级近似。实验对这些预言也有偏离,特别是由实验得到的结构函数 $F_a$ 与 $q^2$ 有关,不仅是 $x$ 的函数。但是,$F_a$ 对 $q^2$ 的依赖是较弱的。在 $q^2=2\sim16\mathrm{GeV}^2$之间 $F_1^{(lN)}$ 和 $F_2^{(lN)}$ 的变化不超过20%,而在同一区间弹性散射的形状因子下降了两个数量级。

实验上 $R=\frac{\sigma_s}{\sigma_t}$比较小,支持 Callan-Gross 关系式(7.50)。上面已经说明 $R\to0$ 表示带电的部分子是 Fermi 子。关于式(7.94)中 $a$ 的值,实验结果约为$\frac{1}{2}$。这是需要假设核子中含有不参与电磁和弱作用的中性胶子的原因。实验也支持式(7.92),在 $x\sim1$ 处 $F_2^{(en)}/F_2^{(eP)}\sim\frac{1}{4}$有利于分数电荷的夸克模型,并且在式(7.93)中对于大部分的 $x$ 值等号近似成立,这既是对夸克模型的支持也表示 $s$ 夸克及其他海夸克只分布在$x$ 很小处。

关于部分子模型的实验检验可参看文献[4]。

## 7.3　算符乘积展开

部分子模型中假设核子中的部分子是自由的并且具有有限的横动量。这些假设在量子场论中不可能严格成立。为了用量子场论研究深度非弹性散射,我们来证明,在量子场论中,这个过程的截面决定于两个电流的乘积在光锥附近的行为。在 $W_{\mu\nu}$ 的表示式(7.26)中包含指数因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}$

$$-q\cdot x=\frac{1}{2}(q_0+q_3)(x_0-x_3)+\frac{1}{2}(q_0-q_3)(x_0+x_3)-\boldsymbol{q}_\perp\cdot\boldsymbol{x}_\perp$$

在实验室中 $p=(0,0,0,m_p)$,$q=m_p^{-1}(0,0,\sqrt{\nu^2+m_p^2q^2},\nu)$。在深度非弹性极限下

$$q_0+q_3\sim m_p^{-1}2\nu$$

$$q_3-q_0=m_p^{-1}\left(-\nu+\sqrt{\nu^2+m_p^2q^2}\right)\sim\frac{m_pq^2}{2\nu}$$

如果式(7.26)中电流对易子的矩阵元是缓变的,则积分的主要贡献在

$$x_0-x_3=O(m_p\nu^{-1})$$

$$x_0+x_3=O(m_pq^2/4\nu)^{-1}$$

即

$$x_0^2-x_3^2=O(q^2)^{-1}$$

的区域。由于式(7.26)中的对易子在 $x^2>0$ 处为零,因此积分的主要贡献在 $O(1/q^2)=x_0^2-x_3^2\geqslant x_0^2-x_3^2-x_\perp^2>0$ 处,也就是在光锥附近。在这个测度很小的区域中,只有电流对易子的奇异项有显著的贡献。

现在我们就来研究算符乘积在光锥附近的奇异性质,考虑两个由标量场 $\phi(x)$ 组成的算符 $A$ 和 $B$ 的乘积 $A(x)B(0)$ 在小距离 $x_\mu\sim0$ 处的行为。在量子场论中,两个同一时空点的算符的乘积是奇异的。Wilson 首先引入算符乘积在小距离处的展开[5]

$$A(x)B(0)\underset{x_\mu\to0}{\sim}\sum_n c^{(n)}(x^2)O^{(n)}(0)\tag{7.95}$$

其中,$O^{(n)}(x)$是一个不含奇异的定域算符,$c^{(n)}(x^2)$是一个奇异函数。下面将证明在自由场的情况下小距离展开式(7.95)确实是成立的。考虑如下的 Green 函数

$$\langle 0\mid T(\phi(y_1)\cdots\phi(y_n)A(x)B(0))\mid 0\rangle\equiv G(y_1\cdots y_n;x,0)$$

式(7.95)表示

$$G(y_1\cdots y_n;x,0)\underset{x_\mu\to0}{\sim}\sum_n c^{(n)}(x^2)\cdot\langle 0\mid T(\phi(y_1)\cdots\phi(y_n)O^{(n)}(0))\mid 0\rangle\tag{7.96}$$

在文献[6]中进一步引入了算符乘积在光锥 $x^2=0$ 附近的展开,在标量场的情况下,这个展开式可写为

$$A(x)B(0)\underset{x^2\to0}{\sim}\sum_{n,s}c_s^{(n)}(x^2)(\mathrm{i})^s x_{\mu_1}\cdots x_{\mu_s}O^{(n)}_{\mu_1\cdots\mu_s}\tag{7.97}$$

其中,$O^{(n)}_{\mu_1\cdots\mu_s}(x)$为不含奇异的定域算符。下面将证明式(7.97)在自由场情况下是成立的。在文献[7]中证明了式(7.95)和(7.97)对可重整的场论在微扰论任意

阶是成立的。

考虑自由标量场 $\phi(x)$，令 $\phi^{(+)}(x)$和 $\phi^{(-)}(x)$分别为 $\phi$ 场的正频和负频部分

$$\phi^{(+)}(x) = \sum_{k} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{ik\cdot x} a(\boldsymbol{k})$$

$$\phi^{(-)}(x) = \sum_{k} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{-ik\cdot x} a^{\dagger}(\boldsymbol{k})$$

上式中，$\omega=\sqrt{k^2+m^2}$。算符乘积 $J(x)\equiv\phi^2(x)$是奇异的，表现在它的真空平均值

$$\langle 0 \mid \phi^2(x) \mid 0\rangle = \langle 0 \mid \phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(x) \mid 0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3\boldsymbol{k}}{2\omega} = \infty \qquad (7.98)$$

可以定义一个二次的定域的非奇异算符，这就是正规乘积

$$J(x) \equiv :\phi(x)\phi(x):$$

按照正规乘积的定义

$$J(x) \equiv \phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(x) + 2\phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(x) \quad (7.99)$$

如所周知，由式(7.99)定义的正规乘积减除了算符乘积 $\phi^2(x)$中的奇异项使得 $\langle 0|J(x)|0\rangle=0$为有限。现在再考虑两个复合算符 $J(x)$和 $J(0)$的时序乘积

$$T(J(x)J(0)) = \theta(x_0):\phi^2(x)::\phi^2(0): + \theta(-x_0):\phi^2(0)::\phi^2(x):$$

上式不是按正规顺序排列的，它包含在 $x=0$ 处为奇异的项，我们来把它的奇异因子分离出来。利用 Wick 定理及

$$\langle 0 \mid T(\phi(x)\phi(0)) \mid 0\rangle = -i\Delta_F(x,m^2) = -\frac{i}{(2\pi)^4}\int \frac{e^{ik\cdot x}}{k^2+m^2} d^4x \qquad (7.100)$$

可得

$$T(J(x)J(0)) = -2[\Delta_F(x,m^2)]^2 - 4i\Delta_F(x,m^2):\phi(x)\phi(0): + :\phi^2(x)\phi^2(0): \qquad (7.101)$$

上式中的正规乘积不再有 $x=0$ 处的奇异。利用

$$\Delta_F(x,m^2) \underset{x^2\to 0}{\sim} \frac{i}{4\pi^2}\frac{1}{x^2+i\varepsilon}[1+O(m^2x^2)] \qquad (7.102)$$

得到

$$T(J(x)J(0)) \underset{x^2\to 0}{\sim} \frac{I}{8\pi^4(x^2+i\varepsilon)^2} + \frac{:\phi(x)\phi(0):}{\pi^2(x^2+i\varepsilon)} + :\phi^2(x)\phi^2(0): \qquad (7.103)$$

其中，$I$ 为单位算符。利用算符的泰勒展开式

$$:\phi(x)\phi(0):=:\phi^2(0):+x_\mu:(\partial_\mu\phi(0))\phi(0):$$
$$+\frac{1}{2}x_{\mu_1}x_{\mu_2}:\left(\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\phi(0)\cdot\phi(0)\right):+\cdots$$
$$\equiv J(0)+x_\mu J_\mu(0)+\frac{1}{2}x_{\mu_1}x_{\mu_2}J_{\mu_1\mu_2}(0)+\cdots$$

可将式(7.103)化为

$$T(J(x)J(0))\underset{x^2\to 0}{\sim}\frac{I}{8\pi^4(x^2+\mathrm{i}\varepsilon)^2}+\frac{1}{\pi^2(x^2+\mathrm{i}\varepsilon)}[J(0)+$$
$$x_\mu J_\mu(0)+x_{\mu_1}x_{\mu_2}J_{\mu_1\mu_2}(0)+\cdots]\tag{7.104}$$

在 $x_\mu\to 0$ 时，由上式得到

$$T(J(x)J(0))\underset{x_\mu\to 0}{\sim}\frac{I}{8\pi^4(x^2+\mathrm{i}\varepsilon)^2}+\frac{1}{\pi^2(x^2+\mathrm{i}\varepsilon)}J(0)+:\phi^4(0):\tag{7.105}$$

式(7.105)及(7.104)分别为小距离展开式(7.95)和光锥展开式(7.97)的形式，其中奇异因子都已分离在展开式各项的系数函数中。

除编时算符乘积外，其他形式的算符乘积也可以写成类似的展开式，利用对易关系式

$$[\phi^+(x),\phi^-(0)]=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^4k\delta(k^2+m^2)\theta(k_0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\equiv\mathrm{i}\Delta_+(x,m^2)$$
$$[\phi^+(0),\phi^-(x)]=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^3k\delta(k^2+m^2)\theta(k_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}\equiv-\mathrm{i}\Delta_-(x,m^2)\tag{7.106}$$

把算符乘积换到正规的顺序可以得到

$$J(x)J(0)=-2\Delta_+(x,m^2)^2+4\mathrm{i}\Delta_+(x,m^2):\phi(x)\phi(0):+:J(x)J(0):$$
$$J(0)J(x)=-2\Delta_-(x,m^2)^2-4\mathrm{i}\Delta_-(x,m^2):\phi(x)\phi(0):+:J(x)j(0):\tag{7.107}$$

利用式(7.107)及 $T(J(x)J(0))=\theta(x_0)J(x)J(0)+\theta(-x_0)J(0)J(x)$ 及

$$-\Delta_F(x,m^2)=\theta(x_0)\Delta_+(x,m^2)-\theta(-x_0)\Delta_-(x,m^2)$$

可以重新得到式(7.101)。利用式(7.107)及

$$\Delta(x,m^2)=\Delta_+(x,m^2)+\Delta_-(x,m^2)$$

可以得到

$$[J(x),J(0)]=-2[\Delta_+(x,m^2)^2-\Delta_-(x,m^2)^2]$$

$$+4\mathrm{i}\Delta(x,m^2):\phi(x)\phi(0): \tag{7.108}$$

函数 $\Delta_\pm(x,m^2)$ 和 $\Delta(x,m^2)$ 在光锥附近有如下的行为

$$\Delta_\pm(x,m^2)\underset{x^2\sim 0}{\sim}\mp\frac{\mathrm{i}}{4\pi^2}\frac{1}{x^2\pm \mathrm{i}\varepsilon x_0}(1+O(m^2x^2))$$

$$\Delta(x,m^2)=\frac{1}{2\pi}\varepsilon(x_0)\delta(x^2)-\frac{m^2}{4\pi}\varepsilon(x_0)\theta(-x^2)$$

$$\times J_1\left(m\sqrt{-x^2}\right)/(m\sqrt{-x^2})\underset{x^2\to 0}{\sim}\frac{1}{2\pi}\varepsilon(x_0)\delta(x^2)(1+O(m^2x^2)) \tag{7.109}$$

利用式(7.108)、(7.109)及关系式

$$\left(\frac{1}{x^2+\mathrm{i}\varepsilon x_0}\right)^n-\left(\frac{1}{x^2-\mathrm{i}\varepsilon x_0}\right)^n=\frac{2\pi \mathrm{i}}{(n-1)!}(-1)^n\delta^{(n-1)}(x^2)\varepsilon(x_0)$$

可以得到

$$[J(x),J(0)]\underset{x^2\to 0}{\sim}-\frac{2\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\delta'(x^2)\varepsilon(x_0)I+\frac{2\mathrm{i}}{\pi}\varepsilon(x_0)\delta(x^2):\phi(x)\phi(0): \tag{7.110}$$

由式(7.110)可以写出对易子 $[J(x),J(0)]$ 的光锥展开式和小距离展开式。

由式(7.103)和(7.110)可以看到，在自由场论的小距离展开式和光锥展开式中的奇异函数 $c^{(n)}(x^2)$ 和 $c_s^{(n)}(x^2)$ 的形式决定于算符乘积的类型，例如在时序乘积中出现 $\frac{1}{x^2+\mathrm{i}\varepsilon}$，在对易子中则出现 $\varepsilon(x_0)\delta(x^2)$。此外 $c^{(n)}(x^2)$，$c_s^{(n)}(x^2)$ 与质量无关，因此这些函数的奇异的阶数是由它们的量纲决定的。令 $d(A)$，$d(B)$ 和 $d(O^{(n)})$ 分别为算符 $A$，$B$ 和 $O^{(n)}$ 的量纲，则

$$c^{(n)}(x^2)\underset{x_\mu\to 0}{\sim}x^{-\lambda_n} \tag{7.111}$$

其中，$\lambda_n=d(A)+d(B)-d(O^{(n)})$，这里 $\delta(x^2)$ 的奇异阶数看作 $\frac{1}{x^2}$。式(7.111)表示在小距离展开式的各项中量纲最小的定域算符 $O^{(n)}$ 的系数有最强的奇异性。同样有

$$c_s^{(n)}(x^2)\underset{x^2\to 0}{\sim}x^{-\lambda_{n,s}} \tag{7.112}$$

其中，$\lambda_{n,s}=d(A)+d(B)-d(O_s^{(n)})+s$，$d(O_s^{(n)})-s$ 即定域算符 $O_s^{(n)}$ 的量纲减去它的自旋称为这个算符的扭度(twist)。由式(7.112)可以看到，在光锥展开式中，扭度最小的定域算符 $O^{(n)}_{\mu_1\cdots\mu_s}$ 项的系数奇异性最强。以上由量纲分析所得的结论在自由场的情况下对旋量场和零质量矢量场也成立，因为自由场论中的奇异函

数 $\Delta_F(x)$,$\Delta(x)$,$S_F(x)$及 $S(x)$等在光锥附近的行为都与质量无关。

现在讨论有相互作用的情况,考虑 Green 函数

$$\langle 0 \mid T(\phi(y_1)\phi(y_2)J(x)J(0)) \mid 0\rangle = \langle 0 \mid T\left\{\exp\left[\mathrm{i}\int \mathscr{L}_{\mathrm{int}}(\phi_{\mathrm{in}}(z))\mathrm{d}z\right]\right.$$

$$\left.\cdot\, \phi_{\mathrm{in}}(y_1)\phi_{\mathrm{in}}(y_2)J_{\mathrm{in}}(x)J_{\mathrm{in}}(0)\right\} \mid 0\rangle$$

其中,指标 in 表示相互作用表象的算符,$\mathscr{L}_{\mathrm{int}}$为相互作用拉氏函数。上式含有如图 7.5(a)和 7.5(b)所示的图形。

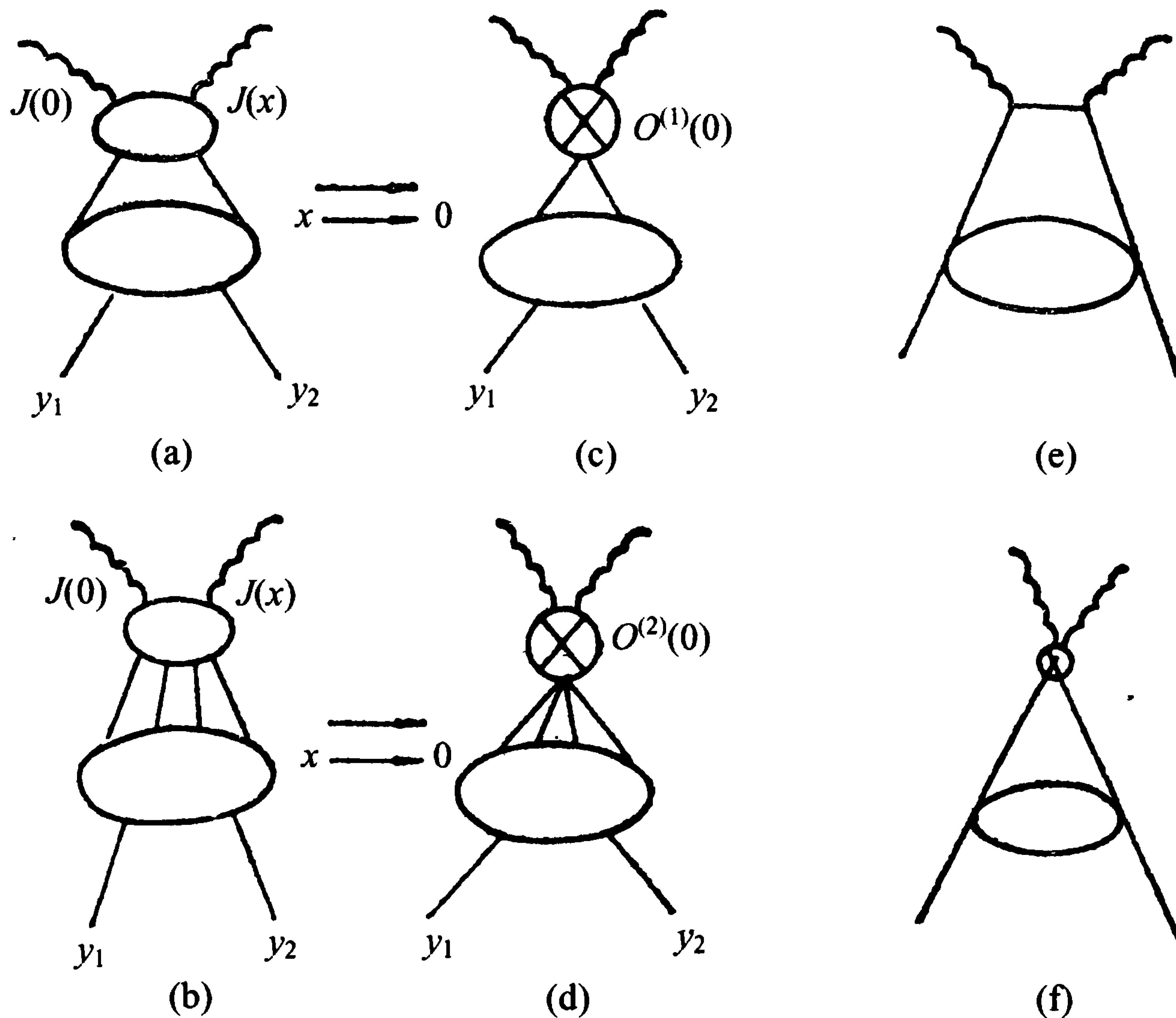



图 7.5

小距离展开式(7.95)等于用图 7.5(c)和 7.5(d)分别代替图 7.5(a)和 7.5(b)。但是,正如在第五章已经说明了的,在原来经过重整化因而是有限的 Green 函数中把一些内线缩成一点就可能引起新的发散。例如,图 7.5(e)在经过自能图重整化后是有限的,而图 7.5(f)是发散的。为使式(7.95)或(7.97)能成立,定域算符 $O^{(n)}$或 $O^{(n)}_{\mu_1\cdots\mu_s}$ 中必须包含某种减除项,使得包含它的所有 Green 函数都是有限的。在文献[7]中证明了这是可以做到的,这就是 5.1.4 小节中讨论的复合算符重整化。这样的定域算符称为正规化定域算符,记作 $N(\phi^2(x))$,$N(\phi^4(x))$等,它是自由场情况下的正规化算符$:\phi^2(x):$,$:\phi^4(x):$的推广,在自由场情况下只需要减除掉真空平均值的发散。$N(\phi^2)$可以按下式定义

$$\langle 0 \mid T(N(\phi^2(x))\phi(y_1)\cdots\phi(y_n)) \mid 0\rangle$$

$$= \text{Fin}\langle 0 \mid T\left\{\exp\left[\text{i}\int \mathscr{L}_{\text{int}}(\phi_{\text{in}})\text{d}z\right]\phi_{\text{in}}^2(x)\phi_{\text{in}}(y_1)\cdots\phi_{\text{in}}(y_n)\right\} \mid 0\rangle \quad (7.113)$$

其中,Fin 表示有限部分。

在把有相互作用的场论中算符乘积的光锥展开式用于深度非弹性过程以前,我们首先讨论自由场的情况。考虑夸克的矢量流 $V_\mu^i$ 及轴矢流 $A_\mu^i$

$$V_\mu^i = \text{i}:\bar{\psi}(x)\gamma_\mu \frac{\lambda_i}{2}\psi(x):, A_\mu^i = \text{i}:\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5 \frac{\lambda_i}{2}\psi(x):$$

或它们的线性组合

$$J_{L\mu}^i = \text{i}:\bar{\psi}\gamma_\mu \frac{1+\gamma_5}{2}\frac{\lambda_i}{2}\psi(x):$$

$$J_{R\mu}^i = \text{i}:\bar{\psi}\gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2}\frac{\lambda_i}{2}\psi: \quad (7.114)$$

其中,$\lambda_i$ 为味空间中的矩阵,式(7.114)中包含对三种颜色求和。我们来求矢量流时序乘积

$$T\left(J^i_{\substack{R\mu\\L}}(x)J^j_{\substack{R\nu\\L}}(0)\right) = \theta(x_0)J^i_{\substack{R\mu\\L}}(x)J^j_{\substack{R\nu\\L}}(0) + \theta(-x_0)J^j_{\substack{R\nu\\L}}(0)J^i_{\substack{R\mu\\L}}(x)$$

的光锥展开式。利用 Wick 定理可以得到

$$T\left(J^i_{\substack{L\mu\\R}}(x)J^j_{\substack{L\nu\\R}}(0)\right) = \text{Tr}\left[\gamma_\mu \frac{1\pm\gamma_5}{2}\frac{\lambda_i}{2}(-\text{i})S_F(x)\gamma_\nu\right.$$

$$\left.\times \frac{1\pm\gamma_5}{2}\frac{\lambda_j}{2}(-\text{i})S_F(-x)\right] - :\bar{\psi}(x)\gamma_\mu \frac{1\pm\gamma_5}{2}\frac{\lambda_i}{2}(-\text{i})$$

$$\times S_F(x)\gamma_\nu \frac{1\pm\gamma_5}{2}\frac{\lambda_j}{2}\psi(0): + :\bar{\psi}(0)\gamma_\nu \frac{1\pm\gamma_5}{2}\frac{\lambda_j}{2}$$

$$\times(-\text{i})S_F(-x)\gamma_\mu \frac{1\pm\gamma_5}{2}\frac{\lambda_i}{2}\psi(x): + :J^i_{\substack{L\mu\\R}}(x)J^j_{\substack{L\nu\\R}}(0): \quad (7.115)$$

由 $S_F(x)$ 在光锥附近的行为

$$S_F(x) = \left(-\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\Delta_F(x) \underset{x^2\sim 0}{\sim} -\frac{\text{i}}{2\pi^2}\left[\frac{\gamma\cdot x}{(x^2+\text{i}\varepsilon)^2} + \frac{m}{2x^2+\text{i}\varepsilon} + \text{有限项}\right] \quad (7.116)$$

及关系式

$$\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\nu = (s_{\mu\rho\nu\sigma} + \varepsilon_{\mu\rho\nu\sigma}\gamma_5)\gamma_\sigma \quad (7.117)$$

$$s_{\mu\rho\nu\sigma} = \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} + \delta_{\rho\nu}\delta_{\mu\sigma} - \delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} \quad (7.118)$$

及

$$\lambda_i\lambda_j = \sum_{k=0}^{8}(d_{ijk} + \text{i}f_{ijk})\lambda_k, \qquad \lambda_0 \equiv I \quad (7.119)$$

其中，$d_{ijk}$和$f_{ijk}$分别对$ijk$为对称和反对称，可以将式(7.115)化为

$$
\begin{aligned}
T\left(J^{i}_{\substack{\mathrm{L}\mu\\ \mathrm{R}}}(x)J^{j}_{\substack{\mathrm{L}\nu\\ \mathrm{R}}}(0)\right) \underset{x^2\to 0}{\sim} & -3\delta_{ij}\frac{1}{4\pi^4}(2x_\mu x_\nu-\delta_{\mu\nu}x^2)/(x^2+\mathrm{i}\varepsilon)^4 I \\
& +\frac{f_{ijk}}{2\pi^2}\frac{x_\rho}{(x^2+\mathrm{i}\varepsilon)^2}\left(s_{\mu\rho\nu\sigma}J^{k-}_{\substack{\mathrm{L}\sigma\\ \mathrm{R}}}(x,0)\pm\varepsilon_{\mu\rho\nu\sigma}J^{k+}_{\substack{\mathrm{L}\sigma\\ \mathrm{R}}}(x,0)\right) \\
& -\mathrm{i}\frac{d_{ijk}}{2\pi^2}\frac{x_\rho}{(x^2+\mathrm{i}\varepsilon)^2}\left(s_{\mu\rho\nu\sigma}J^{k+}_{\substack{\mathrm{L}\sigma\\ \mathrm{R}}}(x,0)\pm\varepsilon_{\mu\rho\nu\sigma}J^{k-}_{\substack{\mathrm{L}\sigma\\ \mathrm{R}}}(x,0)\right)+\cdots
\end{aligned}
\tag{7.120}
$$

其中

$$d_{ij0}=\frac{2}{3}\delta_{ij}$$

$$
J^{k\pm}_{\substack{\mathrm{L}\sigma\\ \mathrm{R}}}(x,0)=\frac{1}{2}\mathrm{i}:\bar{\psi}(x)\frac{\lambda_k}{2}\gamma_\sigma\frac{1\pm\gamma_5}{2}\psi(0)\pm\bar{\psi}(0)\frac{\lambda_k}{2}\gamma_\sigma\frac{1\pm\gamma_5}{2}\psi(x):
\tag{7.121}
$$

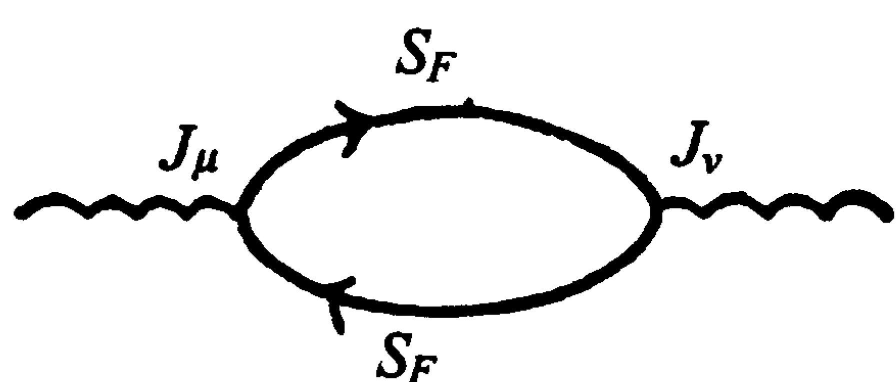



图 7.6

式(7.120)右方第一项前面的系数 3 是来自三个颜色求和。这一项正比于单位算符，在微扰论中相当于图 7.6 中的真空极化 Feynman 图，它的虚部对 $e^+ + e^- \to$强子过程有贡献，但是对虚光子在夸克上的散射无贡献。三个颜色的存在对式(7.120)中其他项都没有影响。

利用式(7.116)可以证明

$$T\left(J^{i}_{\substack{\mathrm{L}\mu\\ \mathrm{R}}}(x)J^{j}_{\substack{\mathrm{R}\nu\\ \mathrm{L}}}(0)\right)\underset{x^2\to 0}{\sim}\text{有限项}$$

利用对易关系

$$
\begin{aligned}
&[\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x),\bar{\psi}(0)\Gamma'\psi(0)] \\
&=\bar{\psi}(x)\Gamma(-\mathrm{i})S(x)\Gamma'\psi(0)-\bar{\psi}(0)\Gamma'(-\mathrm{i})S(-x)\Gamma\psi(x)
\end{aligned}
\tag{7.122}
$$

其中

$$
-iS(x)=\{\psi(x),\bar{\psi}(0)\}\underset{x^2\to 0}{\sim}\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}-m\right)[\varepsilon(x_0)\delta(x^2)]+\text{有限项}
\tag{7.123}
$$

及式(7.117)、(7.118)和(7.119)可以得到

$$
\begin{aligned}
\left[J^{i}_{\substack{\mathrm{L}\mu\\ \mathrm{R}}}(x),J^{j}_{\substack{\mathrm{L}\nu\\ \mathrm{R}}}(0)\right]\underset{x^2\to 0}{\sim} & -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_\rho}[\delta(x^2)\varepsilon(x_0)]\cdot\Big[s_{\mu\rho\nu\sigma}\Big(d_{ijk}J^{k+}_{\substack{\mathrm{L}\sigma\\ \mathrm{R}}}(x,0) \\
& +\mathrm{i}f_{ijk}J^{k-}_{\substack{\mathrm{L}\sigma\\ \mathrm{R}}}(x,0)\Big)\mp\varepsilon_{\mu\rho\nu\sigma}\Big(d_{ijk}J^{k-}_{\substack{\mathrm{L}\sigma\\ \mathrm{R}}}(x,0)+\mathrm{i}f_{ijk}J^{k+}_{\substack{\mathrm{L}\sigma\\ \mathrm{R}}}(x,0)\Big)\Big]
\end{aligned}
\tag{7.124}
$$

$$
\left[J^{i}_{\substack{\mathrm{L}\mu\\ \mathrm{R}}}(x),J^{l}_{\substack{\mathrm{R}\nu\\ \mathrm{L}}}(0)\right]\underset{x^2\to 0}{\sim}\text{有限项}
\tag{7.125}
$$

由式(7.120)，(7.122)，(7.124)及(7.125)可以得到流的时序乘积和对易子的

小距离展开式和光锥展开式。在这些展开式中的奇异项都不出现夸克的质量 $m$，因此前面由量纲分析得到的关于展开式中系数函数 $c^{(n)}(x^2)$ 和 $c_s^{(n)}(x^2)$ 的奇异阶数的结论在这里也是对的。

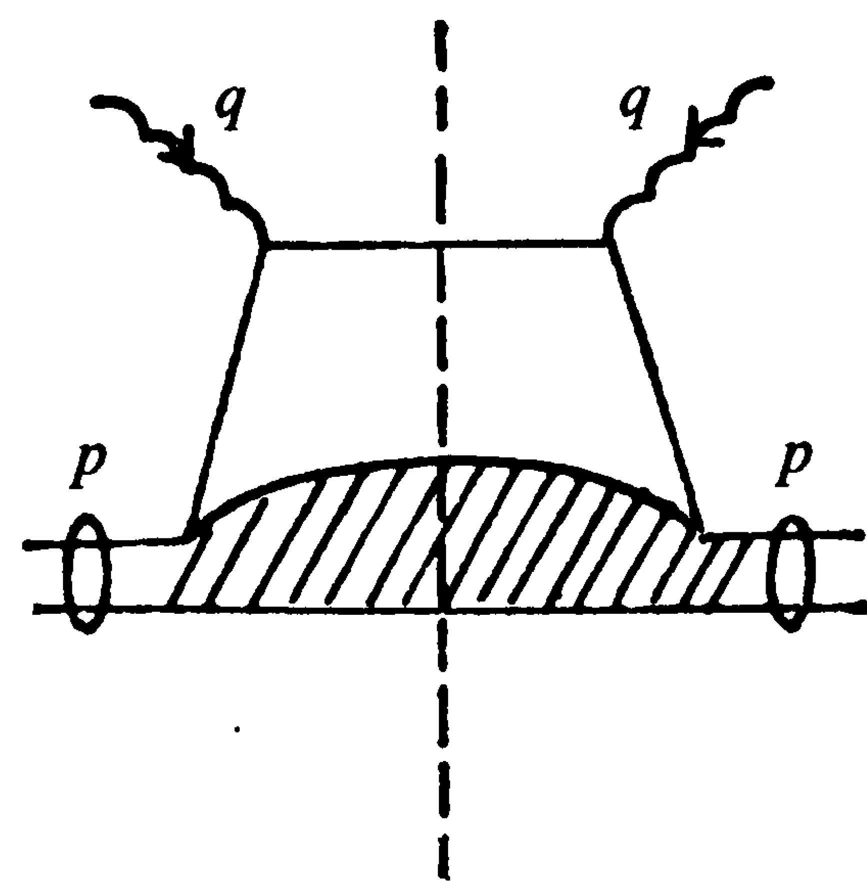



图 7.7

式(7.124)和(7.125)称为光锥代数，将它们代入 $W_{\mu\nu}$ 的表达式(7.26)或(7.55)，可以得到自由场论中深度非弹性单举截面，这样的计算相当于考虑如图 7.7 的图形的虚部，得到的结果满足标度性、Callan-Gross 关系及求和规则及关系式(7.89)～(7.94)。这些结果和部分子模型是一样的，这里只以带电轻子的深度非弹性散射为例做一个推导。

强子电磁流为

$$J_\mu^{em} = \mathrm{i}:\bar{\psi}\gamma_\mu Q\psi: \qquad Q = \frac{1}{2}\left(\lambda_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8\right)$$

由式(7.124)和(7.125)或直接计算都可得到

$$\begin{aligned}\left[J_\mu^{em}\left(\frac{x}{2}\right), J_\nu^{em}\left(-\frac{x}{2}\right)\right] &\underset{x^2\to 0}{\sim} \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_\rho}[\delta(x^2)\varepsilon(x_0)] \\ &\times\left[s_{\mu\rho\nu\sigma}:\bar{\psi}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{i}\gamma_\sigma Q^2\psi\left(-\frac{x}{2}\right) - \bar{\psi}\left(-\frac{x}{2}\right)\mathrm{i}\gamma_\sigma Q^2\right. \\ &\times\psi\left(\frac{x}{2}\right): + \varepsilon_{\mu\rho\nu\sigma}:\bar{\psi}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{i}\gamma_\sigma\gamma_5 Q^2\psi\left(-\frac{x}{2}\right) \\ &\left.+\bar{\psi}\left(-\frac{x}{2}\right)\mathrm{i}\gamma_\sigma\gamma_5 Q^2\psi\left(\frac{x}{2}\right):\right]\end{aligned} \tag{7.126}$$

由 Lorentz 及反射不变性

$$\frac{1}{2}\sum_s\left\langle P,s\left|\bar{\psi}\left(\frac{x}{2}\right)\gamma_\sigma\gamma_5\psi\left(-\frac{x}{2}\right)\right|P,s\right\rangle = 0$$

故式(7.126)中的 $\varepsilon_{\mu\rho\nu\sigma}$ 项在对核子自旋分量求和后无贡献。定义

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{\text{自旋}}\left\langle P\left|:\bar{\psi}\left(\frac{y}{2}\right)\gamma_\sigma Q^2\psi\left(-\frac{y}{2}\right) - \bar{\psi}\left(-\frac{y}{2}\right)\gamma_\sigma Q^2\psi\left(\frac{y}{2}\right):\right.\right. \\ &\left.\left|P\right\rangle\right|_{y^2=0} \equiv 2\int\frac{\mathrm{d}\xi}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi(P\cdot y)}\frac{f(\xi)}{\xi}\frac{P_\sigma}{m_P}\end{aligned} \tag{7.127}$$

将式(7.126)代入式(7.26)并利用式(7.127)可得

$$\frac{m_P}{2\pi}W_{\mu\nu} = \frac{-\mathrm{i}}{8\pi^2}s_{\mu\rho\nu\sigma}P_\sigma\int\mathrm{d}^4 y\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot y}\varepsilon(y_0)\delta(y^2)\cdot\int\frac{\mathrm{d}\xi}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi(P\cdot y)}\frac{2f(\xi)}{\xi}(q+\xi P)_\rho$$

$$= s_{\mu\rho\nu\sigma}P_\sigma \frac{1}{2\nu}\int \mathrm{d}\xi\delta\left(\xi - \frac{q^2}{2\nu}\right)(q + \xi P)_\rho \frac{f(\xi)}{\xi}$$

$$= \left[\frac{1}{\nu}\left(P_\mu + q_\mu \frac{\nu}{q^2}\right)\left(P_\nu + q_\nu \frac{\nu}{q^2}\right) + \frac{1}{2x}\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)\right] \cdot f(x) \quad (7.128)$$

这里，$x = \frac{q^2}{2\nu}$。式(7.128)表示结构函数为

$$F_2(x) = 2xF_1(x) = f(x) \quad (7.129)$$

由式(7.127)做逆傅氏变换得到

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{m_P}{2P_0}\frac{1}{2}\sum_{\text{自旋}}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x(P\cdot y)}\Big\langle P\Big| : \psi^*\left(\frac{y}{2}\right)Q^2\psi\left(-\frac{y}{2}\right)$$

$$- \psi^*\left(-\frac{y}{2}\right)Q^2\psi\left(\frac{y}{2}\right) : \Big|P\Big\rangle \mathrm{d}(P\cdot y)\Big|_{y^2=0}$$

令 $P_+ = \frac{1}{2}(P_3 + P_0)$，$P_- = (P_3 - P_0)$，$y_+ = \frac{1}{2}(y_3 + y_0)$，$y_- = (y_3 - y_0)$，在 $P_+ \to \infty$ 时，上式中的矩阵元只与 $y_-$ 有关，故上式可以写为

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{m_P}{P_0}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}xP_+y_-}\Big\langle P\Big| : \psi^*\left(\frac{y}{2}\right)Q^2\psi\left(-\frac{y}{2}\right) : \Big|P\Big\rangle \mathrm{d}y_-\Big|_{y_+=y_\perp=0}$$

$$= \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(xP_+-p_+)y_-}\sum_\alpha \langle P \mid Q_\alpha^2 b_\alpha^\dagger(\boldsymbol{p})b_\alpha(\boldsymbol{p}) \mid P\rangle \mathrm{d}y_- \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}$$

$$= \sum_\alpha Q_\alpha^2\rho^\alpha(x) \quad (7.130)$$

其中，$b_\alpha$，$b_\alpha^\dagger$ 为 $\alpha$ 夸克的消灭和产生算符，$\rho^\alpha(x)$为有动量 $p_+ = xP_+$ 的 $\alpha$ 夸克的粒子数密度。式(7.129)和(7.130)与部分子模型相同。

式(7.126)可以进一步写成光锥展开的形式。利用展开式

$$\bar{\psi}\left(\frac{x}{2}\right)\psi\left(-\frac{x}{2}\right) = \sum_s \frac{(-1)^s}{2^s s!}x_{\mu_1}x_{\mu_2}\cdots x_{\mu_s}\bar{\psi}(0)\overleftrightarrow{\partial}_{\mu_1}\cdots\overleftrightarrow{\partial}_{\mu_s}\psi(0) \quad (7.131)$$

可以得到

$$\left[J_\mu^{\mathrm{em}}\left(\frac{x}{2}\right), J_\nu^{\mathrm{em}}\left(-\frac{x}{2}\right)\right] = s_{\mu\rho\nu\sigma}\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_\rho}[\delta(x^2)\varepsilon(x_0)] \cdot \sum_{s\text{奇数}}\frac{(\mathrm{i})^s}{s!}x_{\mu_1}\cdots x_{\mu_s}O_{\sigma\mu_1\cdots\mu_s}(0)$$

$$(7.132)$$

其中

$$O_{\sigma\mu_1\cdots\mu_s}(0) = (\mathrm{i})^s\frac{1}{2^s}\bar{\psi}(0)\mathrm{i}\gamma_\sigma\overleftrightarrow{\partial}_{\mu_1}\cdots\overleftrightarrow{\partial}_{\mu_s}Q^2\psi(0) \quad (7.133)$$

由 Lorentz 协变性

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{自旋}}\langle P \mid O_{\sigma\mu_1\cdots\mu_s}(0) \mid P\rangle = \left(P_\sigma P_{\mu_1}\cdots P_{\mu_s}\right)c_{s+1} + \cdots \tag{7.134}$$

上式中省略了正比于 $\delta_{\mu_i\mu_j}m^2$ 的项。

在有相互作用时,上面这些讨论不可能严格成立。例如,在夸克与标量、赝标或矢量胶子的相互作用理论中,除图 7.7 以外还有如图 7.8 中的图形的虚部对深度非弹性过程有贡献。图中 $n$ 条虚线代表 $n$ 个胶子。由微扰论计算的结果得到,这些图形对结构函数的贡献有如下的形式[8]

$$F_2^{(n)} = a_n(x)\left(g^2\ln\frac{q^2}{m^2}\right)^n + \cdots \tag{7.135}$$

上式中只写出了含 $\ln\frac{q^2}{m^2}$ 阶次最高的项,即所谓领头项,$g$ 为耦合常数。在下一章中我们将在量子色动力学中对图 7.8 做微扰论计算,式(7.135)中出现的 $\left(g^2\ln\frac{q^2}{m^2}\right)$ 项破坏了标度性。在本章中我们将用算符乘积展开和重整化群方程的方法把这些破坏标度性的项分离出来并求和。

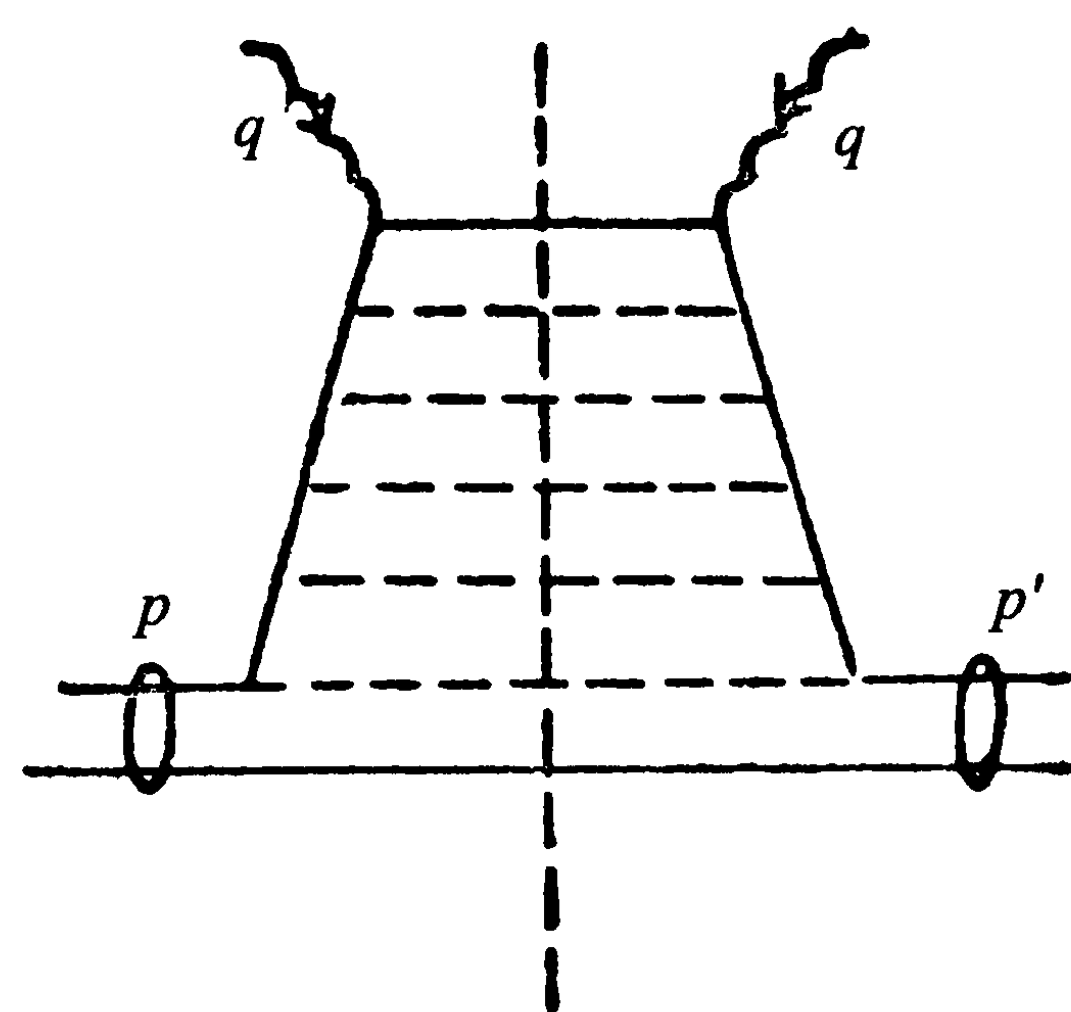



图 7.8

现在我们来讨论有相互作用的一般情况下算符乘积的光锥展开对深度非弹性过程的应用。为了简单我们考虑标量流 $J$ 与标量粒子的情况。按照式(7.97),这时流 $J$ 与粒子朝前散射的振幅为

$$\begin{aligned} T(q^2,x) &= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\left\langle P\left| T\left(J\left(\frac{x}{2}\right)J\left(-\frac{x}{2}\right)\right)\right| P\right\rangle \\ &= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\sum_{n,s}c_s^{(n)}(x^2)\cdot(\mathrm{i})^s x_{\mu_1}\cdots x_{\mu_s}\langle P \mid O^{(n)}_{\mu_1\cdots\mu_s}(0) \mid P\rangle \end{aligned} \tag{7.136}$$

由于算符乘积 $T\left(J\left(\frac{x}{2}\right)J\left(-\frac{x}{2}\right)\right)$ 在 $x$ 变号时不变,上式中只有 $s=$ 偶数的项。我们要求算符 $O^{(n)}_{\mu_1\cdots\mu_s}$ 按洛伦兹群 $s$ 阶不可约张量变换,这可以由在 $O^{(n)}_{\mu_1\cdots\mu_s}$ 的定义中减除掉求迹项做到。例如,$O_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ 可定义为 $\mathrm{i}^3\phi\left[\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\partial_{\mu_3} - \frac{1}{4}\partial^2(\delta_{\mu_1\mu_2}\partial_{\mu_3} + \delta_{\mu_2\mu_3}\partial_{\mu_1} + \delta_{\mu_3\mu_1}\partial_{\mu_2})\right]\phi$。由 Lorentz 协变性

$$\langle P \mid O^{(n)}_{\mu_1\cdots\mu_s}(0) \mid P\rangle = \left(P_{\mu_1}\cdots P_{\mu_s} + \frac{1}{4}m_N^2\delta_{\mu_1\mu_2}P_{\mu_3}\cdots P_{\mu_s} + \cdots\right)O_s^{(n)} \tag{7.137}$$

上式右方含 $m_N^2$ 的项是由 $O^{(n)}_{\mu_1\cdots\mu_s}$ 的迹为 0 的条件决定的。将式(7.137)代入式

(7.136)并利用部分积分及公式

$$\frac{\partial}{\partial q_{\mu_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial q_{\mu_s}}f(q^2)=2^s q_{\mu_1}\cdots q_{\mu_s}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q^2}\right)^s f(q^2)+\cdots$$

[在上式中忽略了含 $\delta_{\mu_i\mu_j}$ 的项,由于 $O^{(n)}_{\mu_1\cdots\mu_s}$ 的定义中减去了求迹项,这样的项在式(7.136)中没有贡献]就得到

$$T(q^2,\nu)\underset{q^2\to\infty}{\sim}\sum_{n,s}\left(\frac{2\nu}{q^2}\right)^s O_s^{(n)}(q^2)^s\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q^2}\right)^s\tilde{c}_s^{(n)}(q^2) \tag{7.138}$$

其中

$$\tilde{c}_s^{(n)}(q^2)=\int\mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}c_s^{(n)}(x^2) \tag{7.139}$$

令

$$4\pi W(q^2,\nu)=\int\mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\left\langle P\left|\left[J\left(\frac{x}{2}\right),J\left(-\frac{x}{2}\right)\right]\right|P\right\rangle \tag{7.140}$$

则

$$W(q^2,\nu)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{Im}T(q^2,\nu)$$

对于 $\nu$ 的物理值 $\nu>0$,$T$ 可改写为

$$\begin{aligned}T(q^2,\nu)&=\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\theta(x_0)\left\langle P\left|\left[J\left(\frac{x}{2}\right),J\left(-\frac{x}{2}\right)\right]\right|P\right\rangle\\&=\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\frac{1}{2}(1+\varepsilon(x_0))\left\langle P\left|\left[J\left(\frac{x}{2}\right),J\left(-\frac{x}{2}\right)\right]\right|P\right\rangle\end{aligned}$$

在固定 $q^2$ 时,改写后的 $T(q^2,\nu)$是 $\nu$ 的解析函数,它的奇异点在 $\nu$ 的实轴上 $W(q^2,\nu)$不为零的区域,且当 $\nu$ 在实轴上时

$$\lim_{\varepsilon\to0\pm}\mathrm{Im}T(q^2,\nu+\mathrm{i}\varepsilon)=\pm2\pi W(q^2,\nu) \tag{7.141}$$

因为

$$\begin{aligned}4\pi W(q^2,\nu)=\sum_n\int\mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\Big[&\left\langle P\left|J\left(\frac{x}{2}\right)\right|n\right\rangle\left\langle n\left|J\left(-\frac{x}{2}\right)\right|P\right\rangle\\&-\left\langle P\left|J\left(-\frac{x}{2}\right)\right|n\right\rangle\left\langle n\left|J\left(\frac{x}{2}\right)\right|P\right\rangle\Big]\end{aligned}$$

利用中间态的谱条件得到,$W(q^2,\nu)$不为零的区域是$q^2\pm2\nu-m^2\leqslant-m^2$。如果把 $T(q^2,\nu)$写成$x=\frac{q^2}{2\nu}$及$q^2$ 的函数,则 $T(x,q^2)$在 $q^2$ 固定时是 $x$ 的解析函数,它的奇点在$-1\leqslant x\leqslant1$ 的实轴上。在 $x$ 的复平面上取沿逆时针方向包围线段$-1\leqslant x\leqslant1$的回路 $C$,则此回路不触及 $T(x,q^2)$的奇点。式(7.138)的右方在正实轴上等于 $T$,在级数收敛的区域内它是 $T$ 的解析延拓。假设级数在复变数 $x$

的绝对值足够大时是收敛的，适当选择回路 $C$ 可以由式(7.138)得到

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint \mathrm{d}x x^{s-1} T(x,q^2) = \sum_n O_s^{(n)}(q^2)^s \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q^2}\right)^s \widetilde{C}_s^{(n)}(q^2) \tag{7.142}$$

然后再使回路 $C$ 向实轴上收缩，并无限接近线段 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 的上下沿，利用式(7.141)及由式(7.140)容易证明的性质，$W(q^2,\nu)=-W(q^2,-\nu)$，可以由式(7.140)得到

$$M_s \equiv \int_0^1 \mathrm{d}x \cdot x^{s-1} W(x,q^2) = \frac{1}{4}\sum_n O_s^{(n)}(q^2)^s \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q^2}\right)^s \widetilde{C}_s^{(n)}(q)^2 \tag{7.143}$$

当 $s=$ 偶数，$M_s$ 称为结构函数的 $s$ 阶矩，它只与 $W(x,q^2)$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的值有关。$0\leqslant x\leqslant 1$ 是非弹性过程中 $x$ 的物理值的范围，因此 $M_s$ 是可以由实验测量的。由式(7.143)可以看到，在 $q^2\rightarrow\infty$ 时 $M_s$ 由算符乘积展开式中自旋为 $s$ 的定域算符 $O_{\mu_1\cdots\mu_s}^{(n)}$ 的项决定，不需要对无穷多个不同自旋的项求和，这就使得理论与实验的比较变得较为容易进行了。

式(7.143)中忽略了式(7.137)中含靶粒子质量 $m_N^2$ 项，这些项的贡献可以用适当改变矩的定义的方法包括进去[10]。

对轻子核子深度非弹性过程可以用和上面相似的方法处理，只是，由于有流中的矢量指标和 Dirac 场的旋量指标，公式变得复杂一些。用算符乘积展开和重整化群的方法研究深度非弹性过程是由文献[8]开始的，量子色动力学的情况可参看文献[9]，对由式(7.19)中的拉氏函数所描述的量子色动力学，基本场量是夸克场 $\psi$ 和色规范场 $B_\mu$。由于流 $V_\mu^i$ 和 $A_\mu^i$ 仅带来“味”量子数而在色规范 $\mathrm{SU}(3)_c$ 变换下是不变的，在它们的算符乘积展开式中只应出现由 $\psi$ 和 $B$ 组成的规范不变的定域算符。令 $J_\mu^i$ 代表左手、右手或电磁流，考虑编时乘积 $T\left(J_\mu^i\left(\frac{x}{2}\right)J_\nu^j\left(-\frac{x}{2}\right)\right)$。它含有 $\mathrm{SU}(N)_F$ 单态和伴随表示两个成分，分别记为 $T\left(J_\mu^i\left(\frac{x}{2}\right)J_\nu^j\left(-\frac{x}{2}\right)\right)_0$ 及 $T\left(J_\mu^i\left(\frac{x}{2}\right)J_\nu^j\left(-\frac{x}{2}\right)\right)_k$，$k=1,2,\cdots,N^2-1$。我们来写出它们光锥展开式中扭度最小的项。前面已经说明扭度最小的项在微扰论各阶中有最强的奇异性。

由于 $d(\psi)=\frac{3}{2}$，$d(B)=1$，$d(\partial_\mu)=1$，我们有如下的扭度为 2 的算符

$$O_{\mu_1\cdots\mu_s}^k = \frac{(-\mathrm{i})^{s-1}}{s!}N\left[\bar{\psi}\frac{\lambda_k}{2}\mathrm{i}\Gamma_{\mu_1}D_{\mu_2}\cdots D_{\mu_s}\psi + \text{指标置换项} - \text{求迹项}\right] \tag{7.144}$$

其中，$\Gamma_{\mu_1}=\gamma_{\mu_1}(1+\gamma_5)/2$ 或 $\gamma_{\mu_1}$

$$D_\mu \equiv \frac{1}{2}\left[\left(\vec{\partial}_\mu - \mathrm{i}gB_\mu^\rho \frac{\lambda_\rho}{2}\right) - \left(\overleftarrow{\partial}_\mu + \mathrm{i}gB_\mu^\rho \frac{\lambda_\rho}{2}\right)\right]$$

为协变微分算符，$\lambda_k$ 和 $\lambda_\rho$ 分别为作用在 $\psi$ 场的味指标和色指标上的矩阵，$N$ 表示减除了发散的正规算符乘积。式(7.144)中减去了求迹项使得 $O^k_{\mu_1\cdots\mu_s}$ 在 Lorentz 变换下构成不可约 $s$ 阶张量表示。容易看出不存在其他 $\mathrm{SU}(N)_F$ 正则表示扭度 $\leqslant 2$ 的 $\mathrm{SU}(3)_c$ 规范不变的定域算符。由 Lorentz 协变性和 $\mathrm{SU}(3)_c$ 不变性流编时乘积的光锥展开式在扭度最小的近似下有如下的形式

$$\begin{aligned} T\left(J^i_\mu\left(\frac{x}{2}\right)J^j_\nu\left(-\frac{x}{2}\right)\right)_k = f_{ijk}\Big\{ &\sum_{s=\text{奇}}\Big[-\delta_{\mu\nu}(\mathrm{i})^s x_{\mu_1}\cdots x_{\mu_s} C_{1s}(x^2) \\ &+ (x_\mu\delta_{\nu\mu_1} + x_\nu\delta_{\mu\mu_1})(\mathrm{i})^s x_{\mu_2}\cdots x_{\mu_s} C_{2s}(x^2)\Big] \\ &\pm \sum_{s=\text{偶}}\Big[\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\mu_1} x_\rho x_{\mu_2}\cdots x_{\mu_s}(\mathrm{i})^s C_{3s}(x^2)\Big]\Big\} O^k_{\mu_1\cdots\mu_s}(0) \\ &- \mathrm{i}d_{ijk}\{\text{奇} \leftrightarrow \text{偶项}\} \end{aligned} \tag{7.145}$$

上式中已用了如下的事实，在量子色动力学中相互作用是与夸克的味无关的，因此算符乘积与味的关系仅来自 $\lambda_i\lambda_j$ 因子，这个因子可以按照式(7.119)分为两个部分，$f_{ijk}$ 部分对 $ij$ 指标反对称，$d_{ijk}$ 部分对 $ij$ 指标对称，而算符乘积有 $i\leftrightarrow j, \mu\leftrightarrow\nu, x\leftrightarrow -x$ 的对称性。在上式中没有写出 $\delta_{\mu\mu_1}\delta_{\nu\mu_2}x_{\mu_3}\cdots x_{\mu_s}C'_{2s}(x^2)$ 项，由量纲分析，$C'_{2s}(x^2)$ 的奇异性在微扰论各阶中比 $C_{2s}(x^2)$ 为低，所以这一项可以忽略[上式中也没有写出正比如 $(x_\mu\delta_{\nu\mu_1} - x_\nu\delta_{\mu\mu_1})x_{\mu_2}\cdots x_{\mu_s}$ 的项，从下面的计算可以看出，这样的项如果存在它的傅氏变换是正比于 $q_\mu$ 或 $q_\nu$ 的]。

相似地，可以写出 $\mathrm{SU}(N)_F$ 单态部分的光锥展开式中扭度最小的项，只是在这种情况下对固定的 $s$ 有如下两个扭度为 2 的定域算符

$$O^{(\psi)}_{\mu_1\cdots\mu_s} = \frac{(\mathrm{i})^{s-1}}{s!}N\left[\bar{\psi}\mathrm{i}\Gamma_{\mu_1}D_{\mu_2}\cdots D_{\mu_s}\psi + \text{交换指标项} - \text{求迹项}\right]$$

$$O^{(B)}_{\mu_1\cdots\mu_s} = \frac{(\mathrm{i})^{s-2}}{2s!}N\left[F^\rho_{\nu\mu_1}D_{\mu_2}\cdots D_{\mu_{s-1}}F^\rho_{\mu_s\nu} + \text{交换指标项} - \text{求迹项}\right] \tag{7.146}$$

除此以外，虚拟场也可以组成扭度为 2 的 $\mathrm{SU}(N)_F$ 单态算符，但是以后用不到它。流编时乘积的 $\mathrm{SU}(N)_F$ 单态部分对 $ij$ 是对称的，它可以写为

$$\begin{aligned} T\left(J^i_\mu\left(\frac{x}{2}\right)J^j_\nu\left(-\frac{x}{2}\right)\right)_0 = -\mathrm{i}d_{ij0}\sum_F\Big\{ &\sum_{s=\text{偶}}\Big[-\delta_{\mu\nu}(\mathrm{i})^s x_{\mu_1}\cdots x_{\mu_s} C^{(F)}_{1s}(x^2) \\ &+ (x_\mu\delta_{\nu\mu_1} + x_\nu\delta_{\mu\mu_1})(\mathrm{i})^s x_{\mu_2}\cdots x_{\mu_s} C^{(F)}_{2s}(x^2)\Big] \\ &\pm \sum_{s=\text{奇}}\varepsilon_{\mu\nu\rho\mu_1} x_\rho x_{\mu_2}\cdots x_{\mu_s}(\mathrm{i})^s C^{(F)}_{3s}(x^2)\Big\} O^{(F)}_{\mu_1\cdots\mu_s}(0) \end{aligned} \tag{7.147}$$

其中，$F=\psi,B$ 和虚拟场。

令

$$W_{\mu\nu}^{ijk}=\int d^4x e^{-iq\cdot x}\frac{1}{2}\sum_{自旋}\left\langle P\left|\left[J_\mu^i\left(\frac{x}{2}\right),J_\nu^j\left(-\frac{x}{2}\right)\right]_k\right|P\right\rangle$$

$$=\frac{2\pi}{m_p}\left[P_\mu P_\nu W_2+\delta_{\mu\nu}W_1-\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}q_\rho P_\sigma W_3\right]^{ijk}$$

$$T_{\mu\nu}^{ijk}=i\int d^4x e^{-iq\cdot x}\frac{1}{2}\sum_{自旋}\left\langle P\left|T\left(J_\mu^i\left(\frac{x}{2}\right)J_\nu^j\left(-\frac{x}{2}\right)\right)_k\right|P\right\rangle$$

$$=\frac{2\pi}{m_p}\left[P_\mu P_\nu T_2+\delta_{\mu\nu}T_1-\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}q_\rho P_\sigma T_3\right]^{ijk} \tag{7.148}$$

上式中忽略了含 $q_\mu,q_\nu$ 的项。定域算符式(7.144)的矩阵元可以写为

$$\frac{1}{2}\sum_{自旋}\langle P\mid O_{\mu_1\cdots\mu_s}^k(0)\mid P\rangle=\frac{1}{m_p}P_{\mu_1}\cdots P_{\mu_s}O_{ks}-求迹项 \tag{7.149}$$

将式(7.145)和(7.149)代入式(7.148)并利用上面对标量流 $J$ 乘积所用的方法进行推导。利用以下公式

$$(i)^s\int e^{-iq\cdot x}x_\mu\delta_{\nu\mu_1}x_{\mu_2}\cdots x_{\mu_s}C_{2s}(x^2)d^4x\left(P_{\mu_1}\cdots P_{\mu_s}-求迹项\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial q_\mu}\frac{\partial}{\partial q_{\mu_2}}\cdots\frac{\partial}{\partial q_{\mu_s}}\int e^{-iq\cdot x}C_{2s}(x^2)d^4x(P_\nu P_{\mu_2}\cdots P_{\mu_s}-求迹项)$$

$$=\frac{\partial}{\partial q_\mu}\left[\frac{d^{s-1}}{d(q^2)^{s-1}}\widetilde{C}_{2s}(q^2)\cdot(2P\cdot q)^{s-1}\right]P_\nu$$

$$=\frac{d^{s-1}}{d(q^2)^{s-1}}\widetilde{C}_{2s}(q^2)(2\nu)^{s-2}(-1)2(s-1)P_\mu P_\nu+正比于\ q_\mu\ 项$$

$$\int e^{-iq\cdot x}\varepsilon_{\mu\nu\rho\mu_1}(i)^s x_\rho x_{\mu_2}\cdots x_{\mu_s}C_{3s}(x^2)d^4x(P_{\mu_1}\cdots P_{\mu_s}-求迹项)$$

$$=\varepsilon_{\mu\nu\rho\mu_1}\frac{\partial}{\partial q_\rho}\left[\frac{d^{s-1}}{d(q^2)^{s-1}}\widetilde{C}_{3s}(q^2)\cdot(2p\cdot q)^{s-1}\right]P_{\mu_1}$$

$$=-\varepsilon_{\mu\nu\rho\mu_1}(2\nu)^{s-1}2q_\rho P_{\mu_1}\left(\frac{d}{dq^2}\right)^s\widetilde{C}_{3s}(q^2)$$

可以得到$\left(将一个因子-\dfrac{i}{2\pi}并入\ \widetilde{C}_{is}\ 中\right)$

$$T_1^{ijk}=f_{ijk}\sum_{s=奇}\left(\frac{2\nu}{q^2}\right)^s O_{k,s}(q^2)^s\left(\frac{d}{dq^2}\right)^s\widetilde{C}_{1s}(q^2)-id_{ijk}(奇\to偶项)$$

$$T_2^{ijk}=f_{ijk}4\sum_{s=奇}(s-1)\left(\frac{2\nu}{q^2}\right)^{s-2}O_{k,s}(q^2)^{s-2}\frac{d^{s-1}}{d(q^2)^{s-1}}\widetilde{C}_{2s}(q^2)-d_{ijk}(奇\to偶)$$

$$T_3^{ijk} = f_{ijk} 4 \sum_{s=\text{偶}} (\mp 1)\left(\frac{2\nu}{q^2}\right)^{s-1} O_{k,s}(q^2)^{s-1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q^2}\right)^s \widetilde{C}_{3s}(q^2) - \mathrm{i}d_{ijk}(\text{偶} \rightarrow \text{奇})$$

利用 $T_a^{ijk}$ 与 $W_a^{ijk}$ 之间的色散关系可以求得非单态结构函数的矩的公式,在去掉等式两边与味指标有关的系数后得到

$$M_{1s}^{Ns}(q^2) \equiv \int_0^1 \mathrm{d}x \cdot x^{s-1} W_1^{Ns}(x,q^2) = \frac{1}{4} O_s(-q^2)^s \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q^2}\right)^s \widetilde{C}_{1s}(q^2)$$

$$M_{2s}^{Ns}(q^2) \equiv \int_0^1 \mathrm{d}x \cdot x^{s-2} \nu W_2^{Ns}(x,q^2) = \frac{1}{2} O_s(s-1)(-q^2)^{s-1} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q^2}\right)^{s-1} \widetilde{C}_{2s}(q^2)$$

$$M_{3s}^{Ns}(q^2) \equiv \int_0^1 \mathrm{d}x \cdot x^{s-1} \nu W_3^{Ns}(x,q^2) = \mp \frac{1}{2} O_s(-q^2)^s \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q^2}\right)^s \widetilde{C}_{3s}(q^2) \qquad (7.150)$$

对于味单态部分可以同样地做,我们得到味单态结构函数的如下公式

$$M_{1s}^{s}(q^2) \equiv \int_0^1 \mathrm{d}x \cdot x^{s-1} W_1^{s}(x,q^2) = \frac{1}{4} \sum_F O_s^{(F)}(q^2)^s \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q^2}\right)^s \widetilde{C}_{1s}^{(F)}(q^2)$$

$$s = \text{偶数}$$

$$M_{2s}^{s}(q^2) \equiv \int_0^1 \mathrm{d}x \cdot x^{s-2} \nu W_2^{s}(x,q^2) = \frac{1}{2}(s-1) \sum_F O_s^{(F)}(q^2)^{s-1} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q^2}\right)^{s-1} C_{2s}^{(F)}(q^2)$$

$$s = \text{偶数}$$

$$M_{3s}^{s}(q^2) \equiv \int_0^1 \mathrm{d}x \cdot x^{s-1} \nu W_3^{s}(x,q^2) = (\mp 1)\frac{1}{2} \sum_F O_s^{(F)}(q^2)^s \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q^2}\right)^s C_{3s}^{(F)}(q^2)$$

$$s = \text{奇数} \qquad (7.151)$$

式(7.150)和(7.151)中没有写出扭度大于 2 的定域算符的贡献。

在耦合常数 $g \rightarrow 0$ 时,量子色动力学的算符展开式应回到自由场的展开式。由式(7.120)、(7.121)及(7.131)得到,在 $g \rightarrow 0$ 时

$$C_{1s}(x^2) = C_{2s}(x^2) = C_{3s}(x^2) = C_{1s}^{(\varphi)}(x^2) = C_{2s}^{(\varphi)}(x^2) = C_{3s}^{(\varphi)}(x^2)$$

$$\propto \frac{1}{(x^2 + \mathrm{i}\varepsilon)^2}$$

$$C_{as}^{(B)}(x^2) = 0, \qquad a = 1,2,3$$

因此有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q^2} \widetilde{C}_{as}(q^2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q^2} \widetilde{C}_{as}^{(\varphi)}(q^2) \propto \int \mathrm{d}^4 x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q \cdot x} \frac{1}{x^2 + \mathrm{i}\varepsilon}$$

$$\propto \frac{1}{q^2}, \qquad a = 1,2,3 \qquad (7.152)$$

对其他的场论,如夸克与标量,赝标或 Abel 规范粒子耦合的理论也可以用相似的程序处理。

在一般的情况下，可以把结构函数的 $s$ 阶矩表示为相应于一些自旋为 $s$ 的定域算符 $O^{(n)}_{\mu_1\cdots\mu_s}(0)$ 的项之和。每项中有一个常系数 $O^{(n)}_s$，它是定域算符在束缚态之间的矩阵元，不能在微扰论范围内计算。每项中还有另一个因子 $\tilde{C}^{(n)}_s(q)$，它是算符乘积展开式的系数 $C^{(n)}_s(x^2)$ 的傅里叶变换。$\tilde{C}^{(n)}_s(q^2)$ 只与虚光子的动量 $q^2$ 有关，而与靶粒子无关，在 7.4 节中将说明 $\tilde{C}^{(n)}_s(q^2)$ 在 $q^2\to\infty$ 时的行为在量子色动力学中可以用微扰论的重整化群方程得到。因此，用算符乘积光锥展开式的方法分出了一个可以计算的控制结构函数在 $q^2\to\infty$ 时的行为的部分。

在 QCD 中把高能量、大动量转移的物理过程的截面表为许多项之和或积分，每项分解为两个因子的乘积。一个因子描述夸克、胶子在短距离中或光锥附近相互作用的子过程，可以用微扰论和重整化群方程计算[如这里的奇异系数 $C_n(x)$]；另一个因子描述长距离的子过程，其中包含强子内夸克、胶子的分布和相互作用，不能用微扰论计算(如这里的定域算符在强子态之间的矩阵元 $\langle P|O_n|P\rangle$)，目前只能由实验来确定。在 QCD 中处理高能量、大动量转移的强子过程，这种方法具有普遍性，我们将在第八章中更详细地讨论。

## 7.4　重整化群对深度非弹性过程的应用

首先，根据第六章中关于重整化群方程的讨论写下量子色动力学中正规顶角的重整化群方程式。在量子色动力学中重整化关系式是

$$
\begin{aligned}
B_{\mu 0} &= Z_B B_\mu, \qquad \psi_0 = Z_\psi \psi \\
g_0 &= Z_g g \mu^{\varepsilon/2}, \qquad m_0 = Z_m m \\
\alpha_0 &= Z_B \alpha
\end{aligned}
\tag{7.153}
$$

重整化的 $n$ 点正规顶角 $\Gamma$ 与未重整的 $n$ 点正规顶角 $\Gamma_0$ 有关系式

$$
\Gamma(g,m,\mu,\alpha) = \prod_{i=1}^{n}\left(Z_{\phi i}(g_0\mu^{-\varepsilon/2},\alpha_0,\varepsilon)\right)^{\frac{1}{2}}\Gamma_0(g_0,m_0,\varepsilon,\alpha_0)
\tag{7.154}
$$

其中，$Z_{\phi i}=Z_B$ 或 $Z_\psi$。我们用最小减除的重整化规则，因而所有重整化常数都与夸克质量 $m$ 无关。固定 $g_0,m_0,\alpha_0$ 和 $\varepsilon$ 将上式对 $\mu$ 微分得到

$$
\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}+\delta(g,\alpha)\frac{\partial}{\partial\alpha}-\gamma_m(g)m\frac{\partial}{\partial m}-\sum_i\gamma_{\phi i}(\delta,\alpha)\right]\cdot\Gamma(g,m,\alpha,\mu)=0
\tag{7.155}
$$

其中

$$\beta(g)=\mu\frac{\partial}{\partial\mu}g(g_0\mu^{-\varepsilon/2},\varepsilon)\bigg|_{g_0,\varepsilon}=-g\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_g\bigg|_{g_0,\varepsilon} \tag{7.156}$$

$$\gamma_{\phi_i}(g,\alpha)=\frac{1}{2}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_{\phi_i}\bigg|_{g_0,\alpha_0,\varepsilon} \tag{7.157}$$

$$\gamma_m(g)=\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_m\bigg|_{g_0,\varepsilon} \tag{7.158}$$

$$\delta(g,\alpha)=\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\alpha\bigg|_{g_0,\alpha_0,\varepsilon}=-2\alpha\gamma_B(g,\alpha) \tag{7.159}$$

$\gamma_\psi$,$\gamma_B$ 和 $\delta$ 与规范有关,在 Landau 规范中 $\delta=0$。在 6.6 节中已证明在维数正规化和最小减除方案中 $\beta$ 和 $\gamma_m$ 与规范参数 $\alpha$ 无关。

重整化群方程(7.155)是齐次的。因为现在 $\beta,\gamma_{\phi_i},\gamma_m$ 和 $\delta$ 都与质量无关,方程(7.155)可以在任意动量下解出。引入有效耦合常数 $\bar{g}(t)$和有效质量 $\bar{m}(t)$,它们由如下的微分方程定义

$$\frac{\partial\bar{g}(t)}{\partial t}=\beta(\bar{g}),\qquad \bar{g}(0)=g$$

$$\frac{\partial\bar{m}(t)}{\partial t}=-\bar{m}(t)(\gamma_m(\bar{g}(t))+1),\qquad \bar{m}(0)=m \tag{7.160}$$

则由式(7.160)得到

$$\bar{m}(t)=me^{-t}\exp\int_0^t-\gamma_m(\bar{g}(t'))\mathrm{d}t'=\lambda^{-1}m\exp\int_g^{\bar{g}(t)}\frac{-\gamma_m(\bar{g}')}{\beta(\bar{g}')}\mathrm{d}\bar{g}' \tag{7.161}$$

为了简单我们用 Landau 规范,这时由式(7.155)得到

$$\Gamma(\lambda P_{i0},g,m,\mu)=\lambda^{d_\Gamma}\exp\left[-\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\gamma_{\phi_i}(\bar{g}(t'))\mathrm{d}t'\right]\Gamma(P_{i0},\bar{g}(t),\bar{m}(t),\mu) \tag{7.162}$$

其中,$t=\ln\lambda$,$d_\Gamma$ 为 $\Gamma$ 的量纲,$d_\Gamma=4-n_B-\frac{3}{2}n_\psi$,$n_B$ 和 $n_\psi$ 分别为胶子外线和 Fermi 子外线数。上式对任意的 $\lambda$ 是严格成立的。

在量子色动力学中到单圈图一级

$$\beta=-\frac{g^3}{16\pi^2}\left[\frac{11}{3}C_2(B)-\frac{4}{3}T(F)\right]+O(g^5)$$

$$\gamma_\psi=\frac{g^2}{16\pi^2}\alpha C_2(F)+O(g^4)$$

$$\gamma_m=\frac{3g^2}{8\pi^2}C_2(F)+O(g^4)$$

$$\gamma_B = -\frac{g^2}{32\pi^2}\left[\left(\frac{13}{3}-\alpha\right)C_2(B)-\frac{8}{3}T(F)\right]+O(g^4) \tag{7.163}$$

对 $SU(3)_c$ 群 $C_2(B)=3$，如果夸克都属于 $SU(3)_c$ 群的基础表示且有 $f$ 个味则 $T(F)=\frac{1}{2}f$。在 $f\leqslant 16$ 时量子色动力学是渐近自由的。这时当 $\lambda\to\infty$ 时 $\bar{g}(t)\to 0$。由式(7.163)和(7.161)得到 $\bar{m}(t)\to 0$。如果 $\Gamma(P_i,g,0,\mu)$ 是有限的，在 $t\to\infty$ 时式(7.162)可以写为

$$\Gamma(\lambda P_{i0},g,m,\mu)=\lambda^{d_\Gamma}\exp\left[-\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \gamma_{\phi_i}(\bar{g}(t'))\mathrm{d}t'\right]$$
$$\times\Gamma(P_{i0};\bar{g}(t),0,\mu)(1+O(\lambda^{-1})) \tag{7.164}$$

上式把一个有质量理论中的大动量顶角与一个零质量理论中的固定动量的顶角联系起来。使 $\Gamma(P_{i0},g,0,\mu)$ 有限的动量 $P_i$ 称为非例外动量，如果动量 $P_{i0}$ 在欧氏区，即 $P_{i0}^2>0,P_{i0}\cdot P_{j0}>0$，这时在 $n$ 点顶角的任何一个道中都不会由于存在零质量粒子中间态而产生奇异，因此欧氏区的动量是非例外动量，换到原来的动量，这要求所有的不变量 $P_i^2$ 及 $P_i\cdot P_j$ 都趋于 $+\infty$。

以上由重整化群方程得到的顶角函数的渐近行为不能直接用于深度非弹性散射过程，因为这时靶核是在质壳上的物理粒子，$P^2=-m_p^2$ 并不很大，因而是例外动量的情况。为了把重整化群方程的结果用于深度非弹性过程还需要用算符乘积的光锥展开式。光锥展开式的系数函数的傅里叶变换 $\tilde{C}_s^{(n)}(q^2)$ 只与大动量 $q^2$ 有关而与靶无关，我们来证明它的渐近行为是由重整化群方程控制的。为此需要研究复合定域算符 $O_{\mu_1\cdots\mu_s}^{(n)}(0)$ 的重整化。

考虑在 $N$ 分量场 $\phi_i$ 的理论中包含复合算符 $O_0=:(\phi_i(0)\phi_j(0)):$ 的 Green 函数

$$\langle 0\mid T(\phi_1(x_1)\cdots\phi_n(x_n)O_0(0))\mid 0\rangle \tag{7.165}$$

在第五章中已说明，即使已经进行了通常的质量、波函数和耦合常数的重整化，式(7.165)仍旧包含发散。例如，在量子色动力学中，四点 Green 函数 $\langle 0|T(\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\psi(x_3)\bar{\psi}(x_4))|0\rangle$ 在微扰论 $g^2$ 阶由图 7.9(a)中的 Feynman 图表示，它是不发散的；但是包含复合算符 $O_0(0)=:(\psi(0)\bar{\psi}(0)):$ 的 Green 函数 $\langle 0|T(\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)O_0(0))|0\rangle$ 在微扰论 $g^2$ 阶由图 7.9(b)表示，它在对内部动量 $k$ 积分时是对数发散的。这个图的发散可以用一个抵消项消去。按照式(7.113)引入正规乘积，定义 $O(x)\equiv N(\bar{\psi}(x)\psi(x))\equiv O_0(x)-(1-\tilde{Z}_O Z_\psi)O_0(x)$。适当选择常数 $\tilde{Z}_O$ 可以使 Green 函数 $G_O(x_1\cdots x_n O)\equiv\langle 0|T(\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)O(0))|0\rangle$ 没有图 7.9(b)的发散。一般来说，设有一些复合定域算符 $O_k(k=1,2,\cdots)$，可以写下它

们的重整化关系式

$$\prod_i Z_i^{\frac{1}{2}} O_{0j}(x) = \tilde{Z}_{jk}^{-1} O_k(x) \tag{7.166}$$

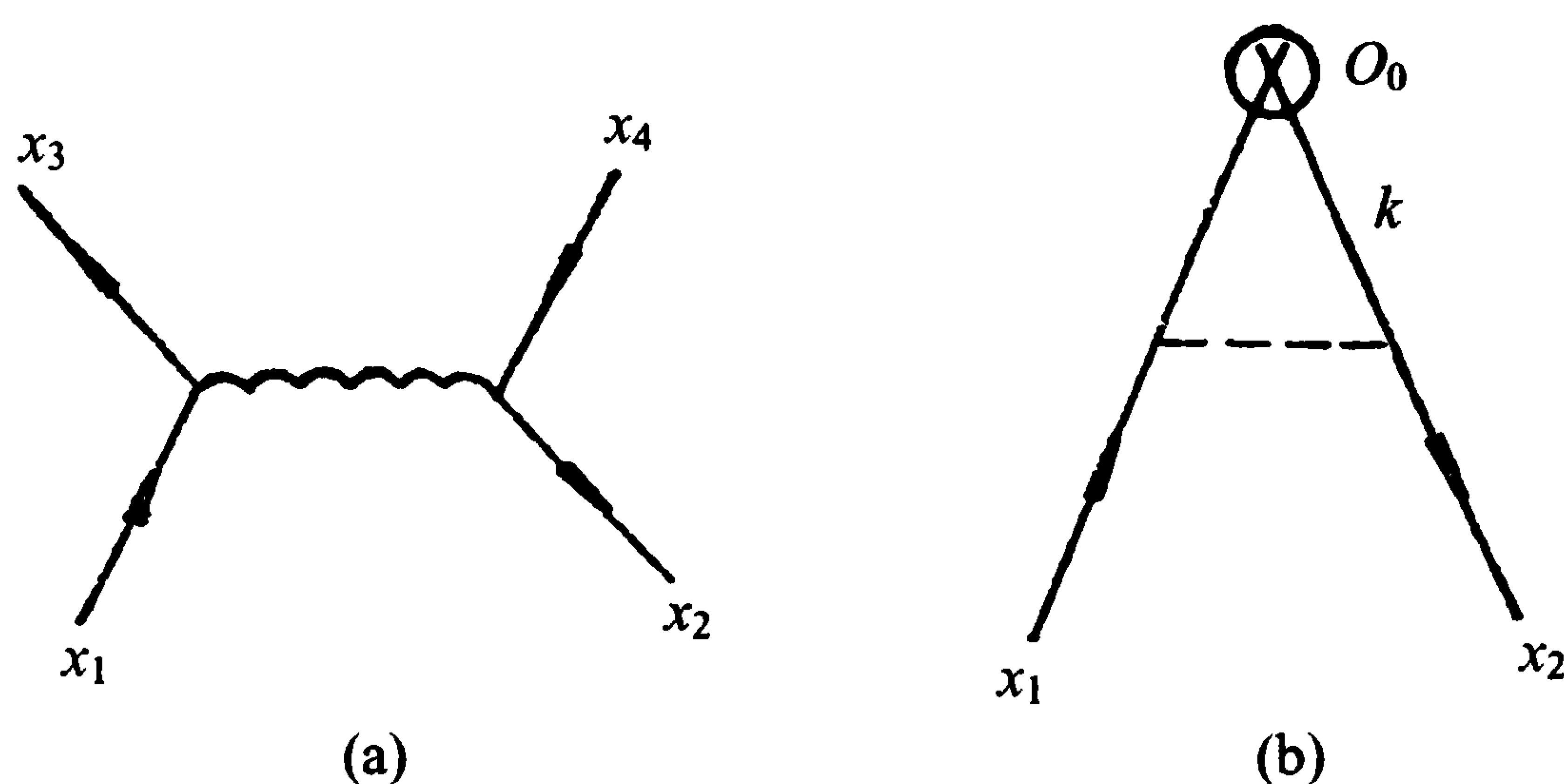



图 7.9

其中，$O_{0j}(x)$为不带抵消项的复合定域算符，$O_k$ 称为重整化的或正规的定域算符，$(\tilde{Z}_{jk}) \equiv \tilde{Z}$ 称为复合算符的重整化常数矩阵。可以证明，在可重整化场论的微扰论各阶中，这样形式的抵消项确实可以消除包含 $O_k$ 的 Green 函数中的所有发散项，并且算符乘积展开式对这样定义的正规复合算符是成立的[7]。在维数正规化和最小减除手续中选择 $Z_{jk}(\varepsilon)$抵消包含复合算符的顶角的极点项。只有在 Lorentz 变换和内部对称群变换下性质相同的算符才会在重整化中相互混合，$\tilde{Z}_{jk}$ 只有在$j,k$ 标志这样两个算符时才不为零。

包含复合算符和 $l$ 条外线的单粒子不可约顶角的重整化关系式为

$$\Gamma_{O_j}^{(l)}(g,m,\mu) = \prod_{i=1}^{l} Z_i^{\frac{1}{2}}(g,\varepsilon)(\tilde{Z})_{jk}(g,\varepsilon)\Gamma_{0O_k}^{(l)}(g_0,m_0,\varepsilon) \tag{7.167}$$

固定 $g_0, m_0$ 和 $\varepsilon$，将上式对 $\mu$ 微分就得到包含复合算符的重整化群方程式

$$\left[\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(g)\frac{\partial}{\partial g} - \gamma_m m\frac{\partial}{\partial m} - \sum_{i=1}^{l}\gamma_i(g)\right)\delta_{jk} + \tilde{\gamma}_{jk}(g)\right]\Gamma_{O_k}^{(l)}(g,m,\mu) = 0 \tag{7.168}$$

其中，$\tilde{\gamma}_{jk}$为矩阵$\tilde{\gamma}$ 的元素

$$\tilde{\gamma}(g) = \tilde{Z}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\tilde{Z}^{-1}\bigg|_{g_0,\varepsilon} \tag{7.169}$$

有些定域复合算符是守恒流，例如电流 $J_\mu^{\text{em}}$ 和能量-动量张量$\theta_{\mu\nu}$。对这样的算符 $\tilde{\gamma}=0$。部分守恒流的 $\tilde{\gamma}$ 也为零。这已在第六章中证明。

为了书写简单，考虑两个标量流乘积的情况，这时算符乘积的光锥展开式为

$$T(J(x)J(0)) = \sum_{n,s} C_s^{(n)}(x^2,g,m,\mu)x_{\mu_1}\cdots x_{\mu_s} O_{\mu_1\cdots\mu_s}^{(n)}(0) \tag{7.170}$$

由上式可得

$$\left\langle 0\left| T\left(\prod_{i=1}^{n}\phi_i(x_i)J(x)J(0)\right)\right|_0\right\rangle$$

$$=\sum_{n,s}C_s^{(n)}(x^2,g,m,\mu)x_{\mu_1}\cdots x_{\mu_s}\left\langle 0\left| T\left(\prod_i\phi_i(x_i)O^{(n)}_{\mu_1\cdots\mu_s}(0)\right)\right|0\right\rangle \quad (7.171)$$

引入符号

$$D=\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\frac{\partial}{\partial g}-\gamma_m m\frac{\partial}{\partial m}$$

式(7.171)左边的正规顶角部分满足重群化群方程

$$\left[D-\sum_i\gamma_i(g)+2\tilde{\gamma}_J(g)\right]\Gamma^{(n)}_{J,J}(g,m,\mu)=0$$

而式(7.171)右方的包含复合算符的 Green 函数满足重整化群方程(7.168)。考虑到 $O^{(n)}_{\mu_1\cdots\mu_s}$ 按 $s$ 阶不可约张量变换，$s$ 不同的算符不会在重整化中混合，由此可得系数函数 $C_s^{(n)}(x^2,g,m,\mu)$ 或它的傅里叶变换满足的重整化群方程式

$$[(D+2\tilde{\gamma}_J(g))\delta_{nn'}-(\tilde{\gamma}_s)_{nn'}(g)]\tilde{C}_s^{(n')}(q^2,g,m,\mu)=0 \quad (7.172)$$

其中，$\tilde{C}_s^{(n)}(q^2,g,m,\mu)=\int e^{-iq\cdot x}C_s^{(n)}(x^2,g,m,\mu)d^4x$。如果算符 $O^{(n)}_{\mu_1\cdots\mu_s}$ 不与其他定域算符混合，式(7.172)简化为

$$[D+2\tilde{\gamma}_J(g)-\tilde{\gamma}_s^{(n)}(g)]\tilde{C}_s^{(n)}(q^2,g,m,\mu)=0 \quad (7.173)$$

其中，$\tilde{\gamma}_s^{(n)}\equiv(\tilde{\gamma}_s)_{nn}$。这时，由式(7.173)可得

$$\tilde{C}_s^{(n)}(\lambda^2q_0^2,g,m,\mu)=\lambda^{d_s^{(n)}}\exp\int_0^t dt'[2\gamma_J(\bar{g}(t'))-\tilde{\gamma}_s^{(n)}(\bar{g}(t'))]$$

$$\times\tilde{C}_s^{(n)}(q_0^2,\bar{g}(t),\bar{m}(t),\mu) \quad (7.174)$$

其中，$d_s^{(n)}$ 是 $\tilde{C}_s^{(n)}$ 的量纲，$d_s^{(n)}=d_A+d_B-\tau_s^{(n)}-4$，这里 $\tau_s^{(n)}$ 是定域复合算符 $O^{(n)}_{\mu_1\cdots\mu_s}$ 的扭度。将式(7.174)代入式(7.143)得到函数 $W$ 的 $s$ 阶矩为

$$M_s(q^2)=\frac{(2)^{-s}}{4}\frac{d^s}{dt^s}\left\{e^{d_s^{(n)}t}\sum_n\tilde{C}_s^{(n)}(q_0^2,\bar{g}(t),\bar{m}(t),\mu)\right.$$

$$\left.\times O_s^{(n)}\exp\int_0^t dt'[2\tilde{\gamma}_J(\bar{g}(t'))-\tilde{\gamma}_s^{(n)}(\bar{g}(t'))]\right\} \quad (7.175)$$

在定域算符有混合的一般情况下，由式(7.172)可以得到矩阵形式的关系式

$$\tilde{C}_s^{(n)}(\lambda^2q_0^2,g,m,\mu)=\left\{\bar{T}\exp\int_0^t dt'[2\tilde{\gamma}_J(\bar{g}(t'))\right.$$

$$\left.-\tilde{\gamma}_s(\bar{g}(t'))]\right\}_{nn'}\lambda^{d_s^{(n')}}\tilde{C}_s^{(n')}(q_0^2,\bar{g}(t),\bar{m}(t),\mu) \quad (7.176)$$

其中,$\bar{T}$ 表示矩阵按反 $t'$ 顺序的排列。

同样的方法可以用于深度非弹性散射过程中结构函数的 $s$ 阶矩,这时需要用算符乘积 $T\left(J_{\mu}^{i}\left(\frac{x}{2}\right)J_{\nu}^{j}\left(-\frac{x}{2}\right)\right)$ 的光锥展开式。以下考虑量子色动力学的情况,这时由于 $J_{\mu}^{i}$ 是守恒流或部分守恒流,$\tilde{\gamma}_J=0$。量子色动力学是渐近自由的理论,在这个理论中

$$\beta(g) = b_0 g^3 + O(g^5), \qquad b_0 < 0$$

$$\bar{g}(t) = -\frac{1}{2b_0 t} + O(t^{-2}\ln t), \qquad \bar{m}(t) \to 0 \tag{7.177}$$

$$\tilde{\gamma}_s(g^2) = \tilde{\gamma}_{s0} g^2 + O(g^4) \tag{7.178}$$

在最小减除方案中,对规范不变的算符重整化群方程中 $\frac{\partial}{\partial \alpha}$ 项无贡献。这时可以利用式(7.176)得到

$$\tilde{C}_{as}^{(n)}(\lambda^2 q_0^2, g, m, \mu) = \left[(\ln\lambda)^{\tilde{\gamma}_{s0}/2b_0}\bar{T}\exp\int_0^t \mathrm{d}t'\left(-\tilde{\gamma}_s(\bar{g}') - \frac{\tilde{\gamma}_{s0}}{2b_0 t'}\right)\right]_{nn'}\lambda^{d_s^{(n')}}\tilde{C}_{as}^{(n')}(q_0^2, \bar{g}(t), 0, \mu) \tag{7.179}$$

上式中的积分是有限的,由此知道扭度较大的项的系数 $\tilde{C}_{as}^{(n)}$ 以 $\lambda$ 的更高幂次下降。因此在深度非弹性极限下只需要扭度等于 2 的项。这一点是与自由场的情况一样的。

考虑 $SU(3)_F$ 非单态的情况。在量子色动力学的算符展开式(7.145)中,对固定的 $s$ 只有一个带有味量子数的扭度等于 2 的算符 $O_{\mu_1\cdots\mu_s}^{k}$。这时对式(7.145)中的系数函数 $C_{as}(x^2)(a=1,2,3)$ 有

$$\tilde{C}_{as}(\lambda^2 q_0^2, g, m, \mu) = (\ln\lambda)^{\tilde{\gamma}_{s0}/2b_0}\exp\int_0^t \mathrm{d}t'\left(-\tilde{\gamma}_s(\bar{g}(t')) - \frac{\tilde{\gamma}_{s0}}{2b_0 t'}\right)\tilde{C}_{as}(q_0^2, \bar{g}(t), 0, \mu) \tag{7.180}$$

将式(7.180)代入式(7.150)可以得到 $M_{as}(q^2)(a=1,2,3)$ 的渐近表达式。这时可以固定 $\lambda$ 把 $q^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q^2}$ 换为 $q_0^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_0^2}$。由式(7.150)可得当 $q^2, q_0^2 \gg m^2, \mu^2$ 时对电子或中微子深度非弹性散射

$$M_{1s}^{NS}(q^2) = \frac{1}{4}f_s(t)(t)^{\tilde{\gamma}_{s0}/2b_0}O_s(q_0^2)^s\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_0^2}\right)^s\tilde{C}_{1s}(q_0^2, \bar{g}(t), 0, \mu) \tag{7.181}$$

$$M_{2s}^{NS}(q^2) = \frac{1}{2}f_s(t)(t)^{\tilde{\gamma}_{s0}/2b_0}O_s(s-1)(q_0^2)^{s-1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_0^2}\right)^{s-1}\tilde{C}_{2s}(q_0^2, \bar{g}(t), 0, \mu) \tag{7.182}$$

对中微子深度非弹性散射

$$M_{3s}^{NS}(q^2)=\frac{1}{2}f_s(t)(t)^{\tilde{\gamma}_{s0}/2b_0}O_s(\mp 1)(q_0^2)^s\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_0^2}\right)^s\tilde{C}_{3s}(q_0^2,\bar{g}(t),0,\mu) \tag{7.183}$$

其中

$$f_s(t)=\exp\int_0^t \mathrm{d}t'\left[-\tilde{\gamma}_s(\bar{g}(t'))-\frac{\tilde{\gamma}_{s0}}{2b_0t'}\right]$$

在 $t\to\infty$ 时有限。由式(7.152)、(7.181)及(7.182)在 $\tilde{C}_{as}(q_0^2,\bar{g}(t),0,\mu)$ 只保留到 $\bar{g}^2(t)$ 的零阶时，化为

$$M_{as}^{NS}(q^2)=C_{as}\left(\ln\frac{q^2}{q_0^2}\right)^{\tilde{\gamma}_{s0}/2b_0}\left[1+O\left(\frac{1}{\ln q^2/q_0^2}\right)\right],\qquad a=1,2,3 \tag{7.184}$$

$$2C_{1s}=C_{2s}=\mp C_{3s}$$

由式(7.184)得到

$$\ln M_{as}^{NS}(q^2)=\frac{\tilde{\gamma}_{s0}}{\tilde{\gamma}_{s'0}}\ln M_{as'}^{NS}(q^2)+\text{常数},\qquad a=1,2,3 \tag{7.185}$$

我们来计算 $\tilde{\gamma}_{s0}$，为此考虑包含复合算符 $O^k_{\mu_1\cdots\mu_s}(0)$ 及动量分别为 $p$ 及 $-p$ 的两条夸克外线的顶角

$$\Gamma_{O_s}(p,p)=(S_F')^{-1}(p)\langle 0\mid T\left(\bar{\psi}(p)O^k_{\mu_1\cdots\mu_s}(0)\psi(p)\right)\mid 0\rangle(S_F')^{-1}(p) \tag{7.186}$$

令 $\Gamma_{0O_s}(p,p,\varepsilon)$ 为相应的未重整化顶角。在微扰论最低阶 $\Gamma_{0O_s}(p,p,\varepsilon)$ 有相应于图 7.10 中的两个 Feynman 图[及与图 7.10(b)对称的图形]的两项。为求出维数正规化方案中相应于图 7.10 的顶角的 $\frac{1}{\varepsilon}$ 极点项先写出一些有用的公式。在维数正规化方案中可以在积分号内做积分动量的平移，因此有

$$\int \mathrm{d}^Dk\,\frac{k_{\mu_1}\cdots k_{\mu_n}}{(k^2-2P\cdot k+M^2)^\alpha}=\int \mathrm{d}^Dk\,\frac{(k+P)_{\mu_1}\cdots(k+P)_{\mu_n}}{(k^2+M^2-P^2)^\alpha} \tag{7.187}$$

利用对 $k$ 的积分的对称性，由上式得到

$$\int \mathrm{d}^Dk\,\frac{k_{\mu_1}\cdots k_{\mu_n}}{(k^2-2P\cdot k+M^2)^\alpha}=P_{\mu_1}\cdots P_{\mu_n}\int \mathrm{d}^Dk\,\frac{1}{(k^2+M^2-P^2)^\alpha}+\text{含 }\delta_{\mu_i\mu_j}\text{ 项} \tag{7.188}$$

如果在上式左方减去对指标 $\mu_i,\mu_j$ 求迹(除以 $D$)的项，则上式右方含 $\delta_{\mu_i\mu_j}$ 的项消

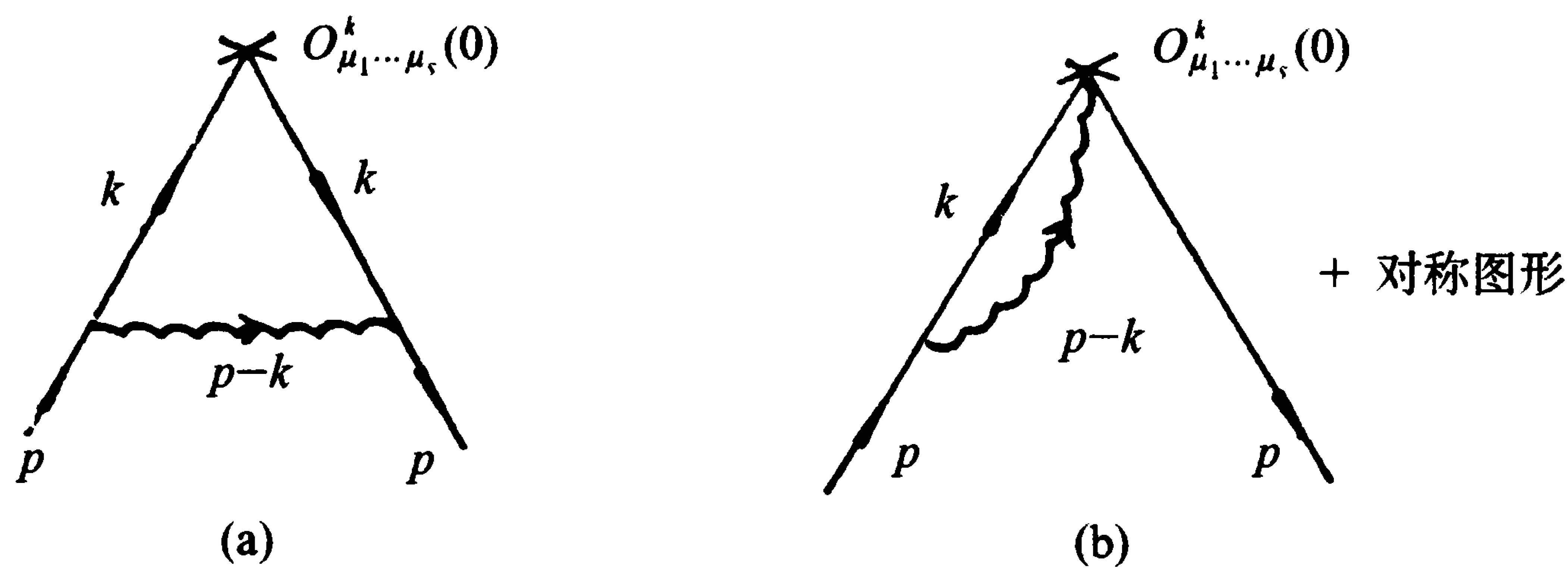



图 7.10

去。利用公式

$$\int \mathrm{d}^D k \, \frac{1}{(k^2+M^2-P^2)^{\alpha}} = \frac{\mathrm{i}\pi^{\frac{D}{2}}}{(M^2-P^2)^{\alpha-\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{D}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \tag{7.189}$$

得到

$$\text{P.P.}\int \mathrm{d}^D k \, \frac{1}{(k^2-2P\cdot k+M^2)^2}(k_{\mu_1}\cdots k_{\mu_n} - \text{求迹项})$$

$$= \mathrm{i}\pi^2 \Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right) P_{\mu_1}\cdots P_{\mu_n} - \text{求迹项} \tag{7.190}$$

$$\text{P.P.}\int \mathrm{d}^D k \, \frac{1}{(k^2-2P\cdot k+M^2)^3}\left(k_{\mu_1}\cdots k_{\mu_n} - \text{求迹项}\right) = 0 \tag{7.191}$$

其中，P.P. 表示$\frac{1}{4-D}$极点项。

还可以得到

$$\text{P.P.}\int \mathrm{d}^D k \, \frac{1}{(k^2-2P\cdot k+M^2)^3}\left[k_{\mu_1}\cdots k_{\mu_n}\not{k} - \text{求迹项}\right]$$

$$= \mathrm{i}\pi^2 \Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right)\frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n}\left(P_{\mu_1}\cdots P_{\mu_{l-1}}\gamma_{\mu_l}P_{\mu_{l+1}}\cdots P_{\mu_n}\right) - \text{求迹项} \tag{7.192}$$

由于 $O_{\mu_1\cdots\mu_s}$ 是规范不变的算符，对 $\tilde{\gamma}_s$ 的计算不妨在 Feynman 规范中进行。在微扰论最低阶可以忽略 $m_0, g_0$ 与 $m, g$ 的差别。在 Feynman 规范中，图 7.10(a)对 $\Gamma_{0O_s}(p,p,\varepsilon)$的贡献为

$$\mathrm{i}g^2\mu^{\varepsilon}C_2(F)\frac{1}{s}\sum_{l=1}^{s}\left\{\int \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D}\frac{k_{\mu_1}\cdots k_{\mu_{l-1}}k_{\mu_{l+1}}\cdots k_{\mu_s}}{(p-k)^2(k^2+m^2)^2}\gamma_{\mu}\right.$$

$$\left.\times(\mathrm{i}\not{k}-m)\cdot \mathrm{i}\gamma_{\mu_l}(\mathrm{i}\not{k}-m)\gamma_{\mu} - \text{求迹项}\right\} = -g^2\mu^{\varepsilon}C_2(F)$$

$$\times \frac{1}{s}\sum_{l=1}^{s}\left\{\int \frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D}\frac{k_{\mu_1}\cdots k_{\mu_{l-1}}k_{\mu_{l+1}}\cdots k_{\mu_s}}{(p-k)^2(k^2+m^2)^2}[4k_{\mu_l}\not{k}\right.$$

$$\left.-2(k^2+m^2)\gamma_{\mu_l}-8\mathrm{i}mk_{\mu_l}]-\text{求迹项}\right\} \tag{7.193}$$

利用式(7.190)得到上式右方 $\gamma_{\mu_l}$ 项的极点项为

$$2g^2\mu^{\varepsilon}C_2(F)\frac{1}{s}\sum_{l=1}^{s}\mathrm{P.P.}\left\{\int\frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D}\right.$$

$$\left.\times\int\mathrm{d}x\frac{\gamma_{\mu_l}k_{\mu_1}\cdots k_{\mu_s}}{[k^2-2p\cdot kx+p^2x+m^2(1-x)]^2}-\text{求迹项}\right\}$$

$$=\mathrm{i}\frac{g^2\mu^{\varepsilon}}{8\pi^2}C_2(F)\Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right)\frac{1}{s}$$

$$\times\sum_{l=1}^{s}\int\mathrm{d}x\cdot x^{s-1}(p_{\mu_1}\cdots p_{\mu_{l-1}}\gamma_{\mu_l}p_{\mu_{l+1}}\cdots p_{\mu_s})-\text{求迹项}$$

$$=\frac{g^2\mu^{\varepsilon}}{4\pi^2}\frac{1}{\varepsilon}C_2(F)\frac{1}{s}\frac{1}{s}\sum_{l=1}^{s}(\mathrm{i}p_{\mu_1}\cdots p_{\mu_{l-1}}\gamma_{\mu_l}p_{\mu_{l+1}}\cdots p_{\mu_s})-\text{求迹项} \tag{7.194}$$

利用式(7.192)得到式(7.193)右方 $k_{\mu_l}\not{k}$ 项的极点项为

$$-4g^2\mu^{\varepsilon}C_2(F)\frac{1}{s}\mathrm{P.P.}\sum_{l=1}^{s}\left\{\int_0^1\mathrm{d}x\cdot 2(1-x)\right.$$

$$\left.\times\int\frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D}\frac{k_{\mu_1}\cdots k_{\mu_s}\not{k}}{[k^2-2p\cdot kx+p^2x+m^2(1-x)]^3}-\text{求迹项}\right\}$$

$$=-\mathrm{i}\frac{g^2\mu^{\varepsilon}}{8\pi^2}C_2(F)\Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right)\sum_{l=1}^{s}\int\mathrm{d}x(1-x)x^{s-1}p_{\mu_1}\cdots p_{\mu_{l-1}}\gamma_{\mu_l}p_{\mu_{l+1}}\cdots p_{\mu_s}-\text{求迹项}$$

$$=-\mathrm{i}\frac{g^2\mu^{\varepsilon}}{4\pi^2}C_2(F)\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{s+1}\frac{1}{s}\sum_{l=1}^{s}p_{\mu_1}\cdots p_{\mu_{l-1}}\gamma_{\mu_l}p_{\mu_{l+1}}\cdots p_{\mu_s}-\text{求迹项} \tag{7.195}$$

利用 Feynman 参数积分及式(7.191)得到式(7.193)右方 $mk_{\mu_l}$ 项对极点项的贡献为零。

图 7.10(b)对 $\Gamma_{0O_s}(p,p,\varepsilon)$ 的贡献为

$$2g^2\mu^{\varepsilon}C_2(F)\frac{1}{s(s-1)}\left\{\int\frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D}\frac{1}{(p-k)^2(k^2+m^2)}\right.$$

$$\left.\times\gamma_{\mu_2}(\mathrm{i}\not{k}-m)\mathrm{i}\gamma_{\mu_1}\left(\frac{1}{2}\right)^{s-2}(p+k)_{\mu_3}\cdots(p+k)_{\mu_s}+\text{对称化}-\text{求迹项}\right\}$$

$$\tag{7.196}$$

由式(7.190)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P.P.}\int\frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D}\frac{1}{(p-k)^2(k^2+m^2)}(\mathrm{i})^2 \not{k} k_{\mu_1}\cdots k_{\mu_l} - \text{求迹项}\\
&=\mathrm{P.P.}\int\frac{\mathrm{d}^D k}{(2\pi)^D}\int_0^1 \mathrm{d}x\,\frac{(\mathrm{i})^2 \not{k} k_{\mu_1}\cdots k_{\mu_l}}{[k^2-2p\cdot kx+p^2x+m^2(1-x)]^2} - \text{求迹项}\\
&=-\frac{1}{16\pi^2}\Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right)\int_0^1 \mathrm{d}x\cdot x^{l+1}\mathrm{i}\not{p}p_{\mu_1}\cdots p_{\mu_l} - \text{求迹项}\\
&=-\frac{1}{8\pi^2}\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{l+2}\mathrm{i}\not{p}p_{\mu_1}\cdots p_{\mu_l} - \text{求迹项}
\end{aligned}$$

考虑到经过对称化和减去求迹项以后

$$\begin{aligned}
\gamma_{\mu_i}\not{p}\gamma_{\mu_j} &= -\not{p}\gamma_{\mu_i}\gamma_{\mu_j} + 2p_{\mu_i}\gamma_{\mu_j} \xrightarrow{\text{对称化}} -\not{p}\delta_{\mu_i\mu_j}\\
&\quad + p_{\mu_i}\gamma_{\mu_j} + p_{\mu_j}\gamma_{\mu_i} \xrightarrow{\text{减去求迹项}} p_{\mu_i}\gamma_{\mu_j} + p_{\mu_j}\gamma_{\mu_i}
\end{aligned}$$

得到式(7.196)中含$k$项的极点项为

$$-2\frac{g^2\mu^\varepsilon}{4\pi^2}\frac{1}{\varepsilon}C_2(F)\sum_{l=2}^{s}\frac{1}{l}\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s}p_{\mu_1}\cdots p_{\mu_{k-1}}\mathrm{i}\gamma_{\mu_k}p_{\mu_{k+1}}\cdots p_{\mu_s} \tag{7.197}$$

式(7.196)中 $m$ 项的贡献在对称化和减去求迹项以后为零。

将式(7.194)、(7.195)和(7.197)相加得到 $\Gamma_{0O_s}(p,p,\varepsilon)$的极点项为

$$\frac{g^2\mu^\varepsilon}{8\pi^2}C_2(F)\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{2}{s(s+1)}-4\sum_{l=2}^{s}\frac{1}{l}\right)\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s}p_{\mu_1}\cdots p_{\mu_{k-1}}\mathrm{i}\gamma_{\mu_k}p_{\mu_{k+1}}\cdots p_{\mu_s}+O(g^4) \tag{7.198}$$

在 Feynman 规范中

$$Z_\psi = 1-\frac{g^2\mu^\varepsilon}{8\pi^2}C_2(F)\frac{1}{\varepsilon}+O(g^4)$$

由上式及式(7.198)、(7.167)得到

$$\tilde{Z}_{O_s} = 1+\frac{g^2\mu^\varepsilon}{8\pi^2}C_2(F)\frac{1}{\varepsilon}\left[1-\frac{2}{s(s+1)}+4\sum_{l=2}^{s}\frac{1}{l}\right]+O(g^4)$$

即

$$\tilde{\gamma}_{O_s} = \frac{g^2}{8\pi^2}C_2(F)\left[1-\frac{2}{s(s+1)}+4\sum_{l=2}^{s}\frac{1}{l}\right]+O(g^4) \tag{7.199}$$

由上式知道 $\tilde{\gamma}_{O_1}=0$。在量子色动力学中 $O_\mu^k=\mathrm{i}N\left(\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{\lambda_k}{2}\psi\right)$或 $\mathrm{i}N\left(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\frac{\lambda_k}{2}\psi\right)$是守恒流或部分守恒流,因此这里得到的计算结果与前面叙述的一般结论是一致的。

现在我们来讨论结构函数的 $\mathrm{SU}(N)_F$ 单态部分。在文献[9],[11]中论证了由 Fadeev-Popov虚拟场构成的定域算符的贡献可以忽略,这时只需要考虑式

(7.146)中的两个定域算符 $O^{(\psi)}_{\mu_1\cdots\mu_s}$，$O^{(B)}_{\mu_1\cdots\mu_s}$。对奇数的 $s$，$O^{(\psi)}$ 和 $O^{(B)}$ 在电荷共轭下的性质不同，不能混合。对偶数的 $s$，在相互作用下它们互相混合，因此对偶数的 $s$ 反常量纲 $\tilde{\gamma}_s$ 成为二行二列的矩阵，可以表示为

$$\tilde{\gamma}_s = \begin{pmatrix} \gamma_s^{\psi\psi}, & \gamma_s^{\psi B} \\ \gamma_s^{B\psi}, & \gamma_s^{BB} \end{pmatrix} \tag{7.200}$$

在 $g^2$ 阶 $\gamma_s^{\psi\psi}$ 可以按图 7.10 计算。$\gamma_s^{\psi B}$，$\gamma_s^{B\psi}$ 及 $\gamma_s^{BB}$ 可以分别按图 7.11，图 7.12 及图 7.13计算。

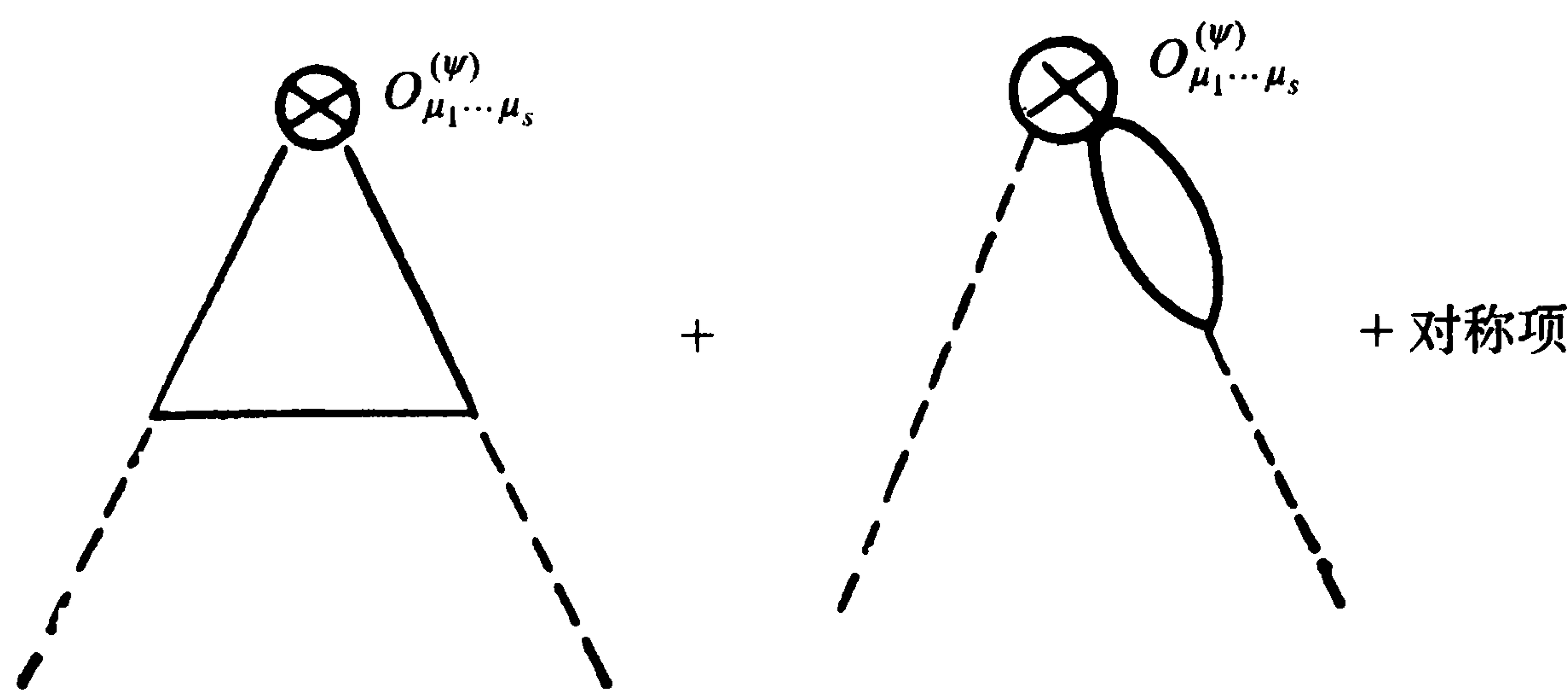



图 7.11

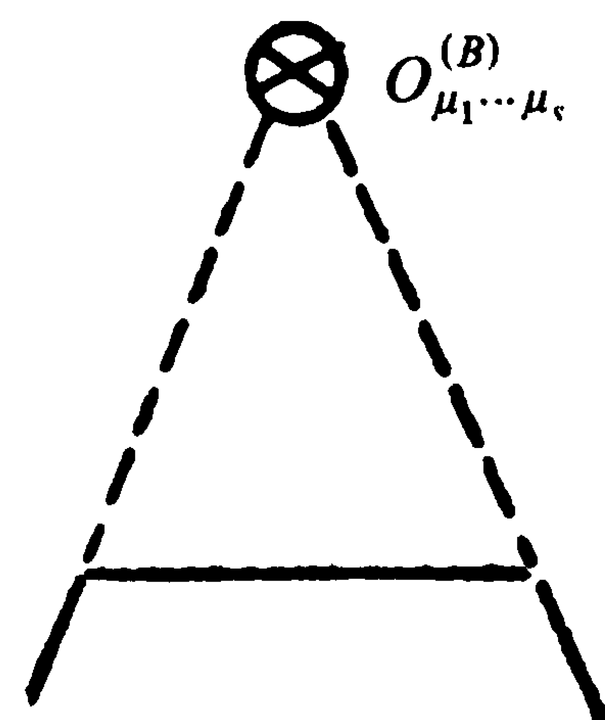



图 7.12

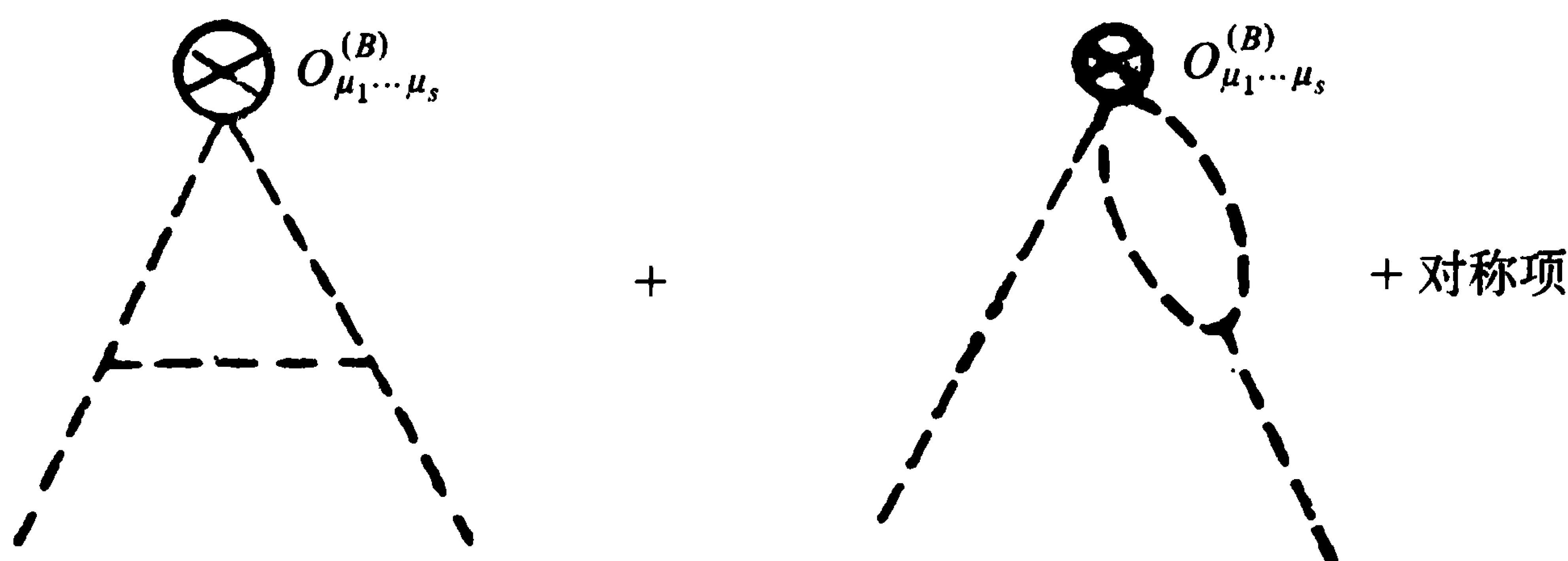



图 7.13

我们不在此做详细的计算，只限于写下如下的结果

$$\gamma_s^{\psi\psi} = \gamma_s = \frac{g^2}{8\pi^2}C_2(F)\left[1 - \frac{2}{s(s+1)} + 4\sum_{l=2}^{s}\frac{1}{l}\right] + O(g^4)$$

$$\gamma_s^{\psi B} = -\frac{g}{8\pi^2}\frac{4(s^2+s+2)}{s(s+1)(s+2)}T(F) + O(g^4)$$

$$\gamma_s^{B\psi} = \frac{-g^2}{8\pi^2}C_2(F)\frac{2(s^2+s+2)}{s(s^2-1)} + O(g^4)$$

$$\gamma_s^{BB}=\frac{g^2}{8\pi^2}\left\{C_2(B)\left[\frac{1}{3}-\frac{4}{s(s-1)}-\frac{4}{(s+1)(s+2)}\right.\right.$$

$$\left.\left.+4\sum_{l=2}^{s}\frac{1}{l}\right]+\frac{4}{3}T(F)\right\}+O(g^4) \tag{7.201}$$

在下一章中我们将用另一种方法计算这些反常量纲。

为得到单态结构函数的渐近行为，我们把重整化群方程(7.172)对角化。把 $\tilde{\gamma}_s$ 写为

$$\tilde{\gamma}_s=\gamma_s^+P_s^++\gamma_s^-P_s^- \tag{7.202}$$

其中，$\gamma_s^\pm$ 为矩阵式(7.200)的两个本征值

$$\gamma_s^\pm=\frac{1}{2}\left[\gamma_s^{\psi\psi}+\gamma_s^{BB}\pm\sqrt{(\gamma_s^{BB}-\gamma_s^{\psi\psi})^2+4\gamma_s^{\psi B}\gamma_s^{B\psi}}\right] \tag{7.203}$$

$P_s^+$ 和 $P_s^-$ 为两个投影算符，满足

$$P_s^++P_s^-=I$$

$$P_s^aP_s^b=\delta_{ab}P_s^a,\qquad a,b=\pm \tag{7.204}$$

由式(7.202)～(7.204)定出

$$P_s^-=\begin{pmatrix}P_{11}^-(s) & P_{12}^-(s)\\ P_{21}^-(s) & 1-P_{11}^-(s)\end{pmatrix}$$

其中

$$P_{11}^-(s)=\frac{\gamma_s^{\psi\psi}-\gamma_s^+}{\gamma_s^--\gamma_s^+},\qquad P_{21}^-(s)=\frac{\gamma_s^{\psi B}}{\gamma_s^--\gamma_s^+}$$

$$P_{12}^-=\frac{\gamma_s^{B\psi}}{\gamma_s^--\gamma_s^+} \tag{7.205}$$

令

$$C_{as}^s\equiv\begin{pmatrix}\tilde{C}_{as}^{(\psi)}\\ \tilde{C}_{as}^{(B)}\end{pmatrix}=(P^++P^-)\tilde{C}_{as}^s\equiv\tilde{C}_{as}^++\tilde{C}_{as}^-,\qquad a=1,2,3 \tag{7.206}$$

利用式(7.202)、(7.204)及(7.179)得到

$$\tilde{C}_{as}^\pm(\lambda^2q_0^2,g,m,\mu)=(\ln\lambda)^{\tilde{\gamma}_{s0}^\pm/2b_0}\exp\int_0^t dt'\left[-\gamma_s^\pm(\bar{g}(t'))-\frac{\tilde{\gamma}_{s0}^\pm}{2b_0t'}\right]\tilde{C}_{as}^\pm(q_0^2,\bar{g}(t),0,\mu) \tag{7.207}$$

其中，$\tilde{\gamma}_{s0}^\pm=\gamma_s^\pm(g^2)/g^2+O(g^2)$。将式(7.206)和(7.207)代入式(7.151)可以求得单态矩 $M_{as}^s$ 的渐近形式

$$M_{1s}^s(q^2)=\frac{1}{4}\sum_{\substack{FF'=\psi B\\ a=\pm}}O_s^{(F)}(P^a)_{FF'}(q_0^2)^s\left(\frac{d}{dq_0^2}\right)^sC_{1s}^{(F')}(q_0^2,\bar{g}(t),0,\mu)(t)^{\tilde{\gamma}_{s0}/2b_0}f_s^a(t)$$

$$M_{2s}^{s}(q^2)=\frac{1}{2}\sum_{\substack{F,F'=\psi B\\ a=\pm}} O_s^{(F)}(P^a)_{FF'}(s-1)(q_0^2)^{s-1}$$

$$\times\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_0^2}\right)^{s-1} C_{2s}^{(F')}(q_0^2,\bar{g}(t),0,\mu)(t)^{\tilde{\gamma}_{s0}/2b_0} f_s^a(t) \qquad (7.208)$$

在忽略 $\bar{g}^2$ 项时，利用式(7.152)可以得到

$$M_{1s}^{s}(q^2)= C\sum_{\substack{a=\pm\\ F=\psi B}} O_s^{(F)}P_{F\psi}^a(t)^{\tilde{\gamma}_{s0}/2b_0}\left(1+O\left(\frac{1}{\ln q^2/q_0^2}\right)\right)$$

$$M_{2s}^{s}(q^2)= 2C\sum_{\substack{a=\pm\\ F=\psi B}} O_s^{(F)}P_{F\psi}^a(t)^{\tilde{\gamma}_{s0}/2b_0}\left(1+O\left(\frac{1}{\ln q^2/q_0^2}\right)\right) \qquad (7.209)$$

注意，由胶子场组成的定域算符 $O_{\mu_1\cdots\mu_s}^{(B)}$ 的矩阵元进入上式。另外一点是，由式(7.201)及(7.203) $\gamma_{20}^{-}=0$，所以 $M_{a2}^{s}\rightarrow$常数。这是由于 $O_{\mu_1\mu_2}^{(\psi)}+O_{\mu_1\mu_2}^{(B)}$ 是场的能量-动量张量，因而是一个守恒流。$F_3^{(s)}$ 只有奇数 $s$ 的矩，因此没有 $O^{(B)}$ 与 $O^{(\psi)}$ 的混合。$M_{3s}^{(s)}$ 的公式与式(7.150)中 $M_{3s}^{Ns}$ 的公式形式相同。

由以上讨论可以看到量子色动力学中深度非弹性过程有以下几点性质：

(1) 标度性的破坏只是对数性的，是弱的破坏，这一点至少在定性上是与实验一致的，对渐近形式的趋近是 $O\left(\frac{1}{\ln\lambda^2}\right)$。式(7.184)和(7.185)与由中微子深度非弹性散射得到的 $M_{3s}^{Ns}$ 数据符合。

(2) 由式(7.199)及(7.183)可以看到，在 $q^2\rightarrow\infty$ 时，$SU(3)_F$ 非单态矩 $M_{a1}(q^2)$ 趋于常数，$s>1$ 的 $SU(3)_F$ 非单态矩都对数地趋于零。例如，由于对 $F_2^{ep}-F_2^{en}$ 只有 $SU(3)_F$ 非单态的贡献，我们有

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\cdot x^{s-2}(F_2^{ep}-F_2^{en})\rightarrow 0 \qquad (当\ s\geqslant 2) \qquad (7.210)$$

由于 $\tilde{\gamma}_{Os}$ 是 $s$ 的递增函数，$s$ 愈大 $M_{as}(q^2)$ 下降愈快。由矩 $M_{as}(q^2)$ 的定义式(7.150)可以看到，$s$ 愈大结构函数 $F_a(x,q^2)$ 在 $x\sim 1$ 处的贡献愈重要，这表示 $F_2(x,q^2)$ 的 $SU(3)_F$ 非单态部分随 $q^2\rightarrow\infty$ 而趋于零，$x$ 大处比 $x$ 小处下降更快。

对 $SU(3)_F$ 单态部分有相似的结论，那里有

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\cdot x^{s-2}(F_2^{ep}+F_2^{en})\rightarrow 常数, \qquad 当\ s=2$$

$$\rightarrow 0, \qquad 当\ s>2 \qquad (7.211)$$

式(7.210)和(7.211)合起来表示 $F_2^{ep,en}$ 曲线下的面积不随 $q^2$ 变化，随 $q^2$ 增大曲线向 $x$ 小处集中，因此标度性的破坏有图 7.14 所示的性质。这是与实验结果一致的。在下一章中对标度性破坏的这一性质将有直观的解释。

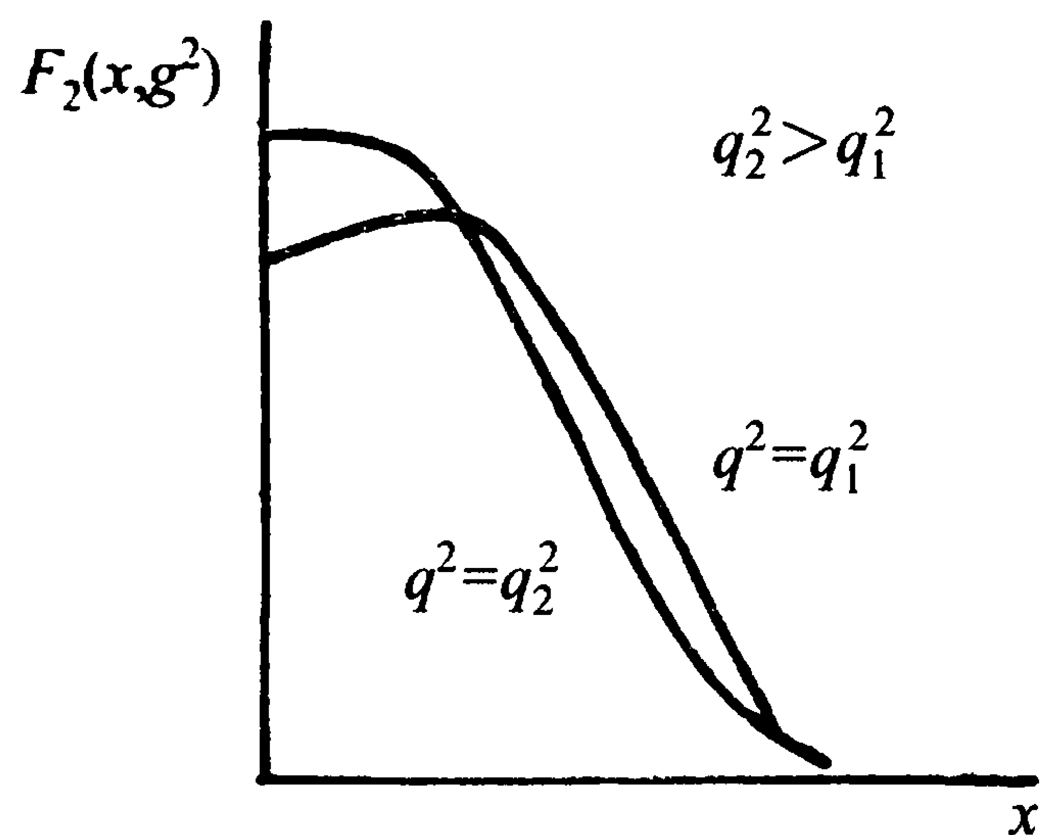


图 7.14

(3) 忽略式(7.183)及(7.209)中的 $O\left(\frac{1}{\ln q^2/q_0^2}\right)$项,Callan-Gross 关系对各阶矩渐近地成立。在量子色动力学中结构函数对味指标的依赖与自由场一样。此外,相应于守恒流的定域算符 $O_{\mu_1}^k(x)$没有反常量纲,$M_{a1}^{Ns}$趋于自由场的值。因此,由部分子模型和自由场光锥代数得到的求和规则和关系式(7.89)~(7.94)在量子色动力学中渐近地成立,这也与实验一致。对这些规则的修正是可以计算的。

作为量子色动力学对部分子模型关系式的修正的例子,我们讨论 Callan-Gross 关系的修正。令

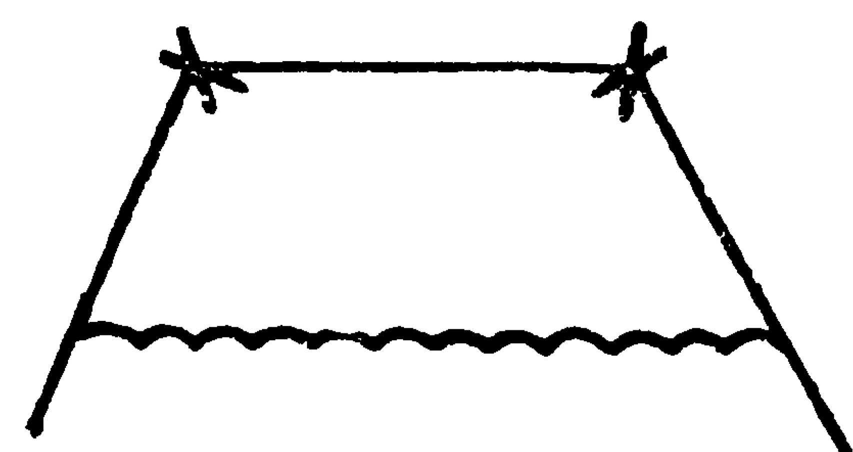
$$M_{Ls}(q^2)\equiv M_{2s}-2M_{1s}=\int_0^1 \mathrm{d}x\cdot x^{s-2}[F_2(x,q^2)-2xF_1(x,q^2)]$$

在 Callan-Gross 关系成立时,$M_{Ls}=0$。由式(7.181)和(7.182)得到

$$\frac{M_{Ls}(q^2)}{M_{2s}(q^2)}=1-\frac{q_0^2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_0^2}\right)^s\widetilde{C}_{1s}(q_0^2,\bar{g}(t),0,\mu)}{(s-1)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_0^2}\right)^{s-1}\widetilde{C}_{2s}(q_0^2,\bar{g}(t),0,\mu)}$$

在 $\bar{g}(t)$的二次阶 $\widetilde{C}_{1s}$和$\widetilde{C}_{2s}$可以由图 7.15 中的 Feynman 图计算。结果得到

$$\frac{M_{Ls}(q^2)}{M_{2s}(q^2)}=\frac{\bar{g}^2(t)}{4\pi^2}\frac{C_2(F)}{s+1} \qquad (7.212)$$


图 7.15

式(7.212)在$\frac{q^2}{q_0^2}\to\infty$时对数地趋于零。

对各个结构函数的矩,式(7.184)及(7.209)只准确到 $\bar{g}^2(t)\simeq-\frac{1}{b\ln q^2/q_0^2}$的最低阶,即领头对数项。为了得到全部 $\bar{g}^2(t)$高一阶的修正需要在 $\beta(\bar{g})$,$\tilde{\gamma}_{O_s}(\bar{g})$和 $\widetilde{C}_{as}\left(q_0^2,\bar{g}(t),0,\mu\right)$的展开式中多算一项,然后利用式(7.181)及(7.207)可以得到结构函数的矩的 $O\left(1/\ln\frac{q^2}{q_0^2}\right)$修正项。这些工作已经有人做了,这里不做讨论。前面已经说明,高扭度定域算符的修正是 $q_0^2/q^2$ 的幂次性的。

量子色动力学在深度非弹性过程方面相当成功。因为现在实验的能量还不够高,高扭度和高圈图的效应不能忽视。关于量子色动力学的深度非弹性过程的理

论及其与实验的比较可参看总结文献[12]～[15]。

## 参 考 文 献

1 S Coleman and D J Gross. Phys Rev Letters. 1973,31:851
2 R P Feynman. Photon hadron interactions. Benjamin,1972;J D Bjorken and E A Paschos. Phys Rev. 1969,158:1975; S Drell D Levy and T M Yan. Phys Rev. 1969,187:2159;1970,D1:1035,1617,2404
3 P V Landshoff and J C Polkinghorne. Phys Reports. 1972,5C:1;F E Close. An Introduction to Quarks and Partons. Academic Press,1979
4 F J Gilman and D C Cundy. in Proc 17th Int Conf on Highenergy Physics. London,1974
5 K Wilson. Phys Rev. 1969,179:1499
6 R A Brandt and G Preparata. Nucl Phys. 1941,B27:541;Y Frishman. Ann of Phys. 1971,66:373
7 W Zimmerman. Lectures in Elementary Particles and Quantum Field Theory. Cambridge: MIT Press,1971
8 N Christ,B Hasslacher and A Mueller. Phys Rev. 1972,D6:3543
9 D J Gross and F Wilczek. Phys Rev. 1973,D8:3633;1974,D9:980;H Georgi and H D Politzer. Phys. Rev.,1974,D9:416
10 O Nachtmann. Nucl Phys. 1974,B78:455
11 H Kluberg-Stern and J B Zuber. Phys Rev. 1975,D12:482,3159;J A Dixon and J C Taylor. Nucl Phys. 1974,B78:552
12 D J Gross. in Methods in Field Theory. Les Houches,1975;Amsterdam:North-Holland,1976
13 J Ellis. in Weak and Electromagnetic Interactions at High Energies. Amsterdam: North-Holland,1977
14 A Peterman. Renormalization Group and the Deep Structure of the Proton. Phys Reports. 1978,53:157
15 A J Buras. Rev Mod Phys. 1980,52:199
16 K G Wilson. Phys Rev. 1974,D14:2455;M Creutz. Phys Rev Lett. 1979,43:533

# 第八章　量子色动力学Ⅱ

## 8.1　量子色动力学的红外发散和共线发散

如所熟知，在量子电动力学的微扰论计算中存在着红外发散。此外，我们将要说明，如果电子质量趋于零，在量子电动力学中还存在另一种发散，即共线发散。在量子色动力学中也有这两种发散。为了正确地进行微扰论计算，需要处理红外发散和共线发散的问题。

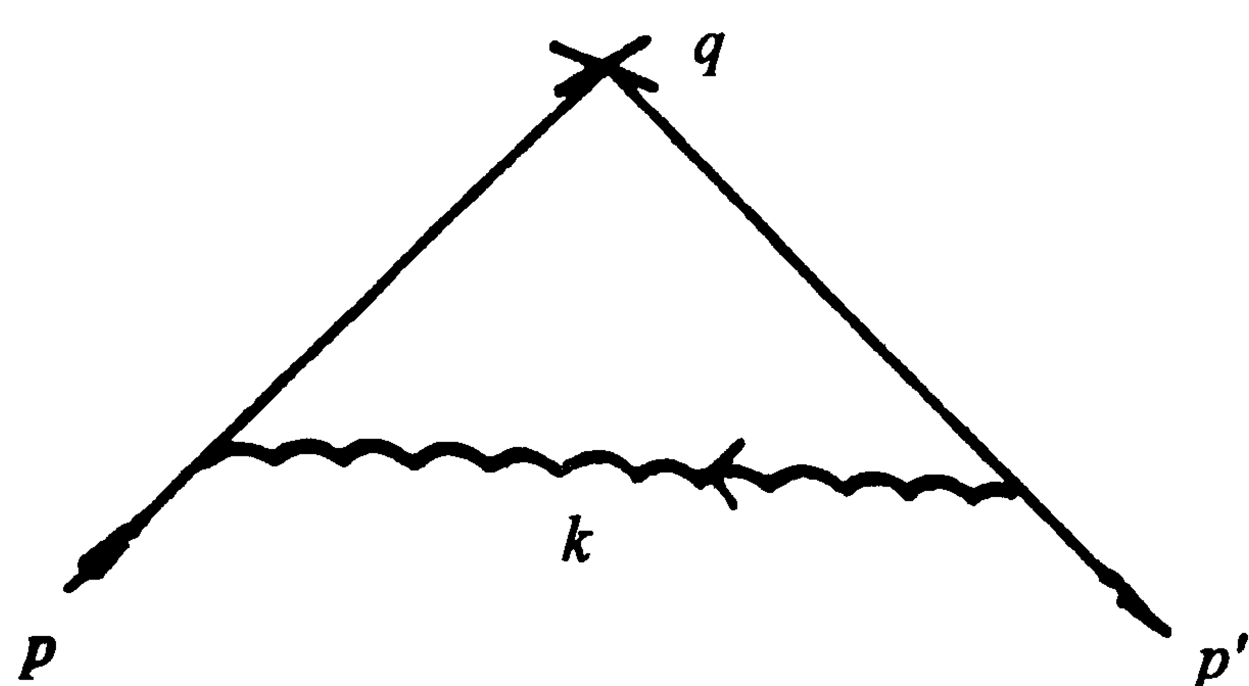



图 8.1

我们首先回忆量子电动力学的红外发散。为了叙述的简单，考虑电子吸收虚光子的散射（或虚光子产生 $e^+e^-$ 对）。令 $e_0$ 为未重整化的电荷。用 $e_0$ 表示的散射振幅在 $e_0^2$ 阶由图 8.1 和 8.2 中的 Feynman 图形所表示。当外线动量 $p$ 和 $p'$ 在质壳上时，相应于图 8.1 的振幅为

$$\frac{e_0^2\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\bar{u}(p')\gamma_\nu\int\mathrm{d}^4k\,\frac{[-\mathrm{i}(\not p'+\not k)+m]\gamma_\mu[-\mathrm{i}(\not p+\not k)+m]}{k^2(2p\cdot k+k^2)(2p'\cdot k+k^2)}$$

$$\times\left(\delta_{\nu\nu'}-(1-\alpha)\frac{k_\nu k_{\nu'}}{k^2}\right)\gamma_{\nu'}u(p)\equiv\bar{u}(p')\Lambda_\mu(p',p)u(p)\qquad(8.1)$$

上式中的积分在 $k\sim0$ 处有红外发散。

量子电动力学中常用的红外正规化方案是赋予光子以一个小质量 $\lambda$。这时式(8.1)中可以分出一个红外发散的部分

$$-\frac{e_0^2\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)$$

$$\times\left[\int\mathrm{d}^4k\,\frac{(2p+k)\cdot(2p'+k)}{(k^2+\lambda^2)(2p\cdot k+k^2)(2p'\cdot k+k^2)}-(1-\alpha)\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(k^2+\lambda^2)^2}\right]$$

$$(8.2)$$

剩下的项没有红外发散。上式中括号内的第二项是一个与外动量无关的发散积分，它与图 8.2 中电子自能图形的规范有关项恰好抵消。

将电子的自能 $\Sigma(p)$ 在 $\mathrm{i}\not p+m=0$ 处展开

$$\Sigma(\mathrm{i}\not p)=\Sigma(-m)+\Sigma_1\mathrm{i}S_F^{-1}(p)+\Sigma_f(\mathrm{i})^2S_F^{-2}(p)\qquad(8.3)$$

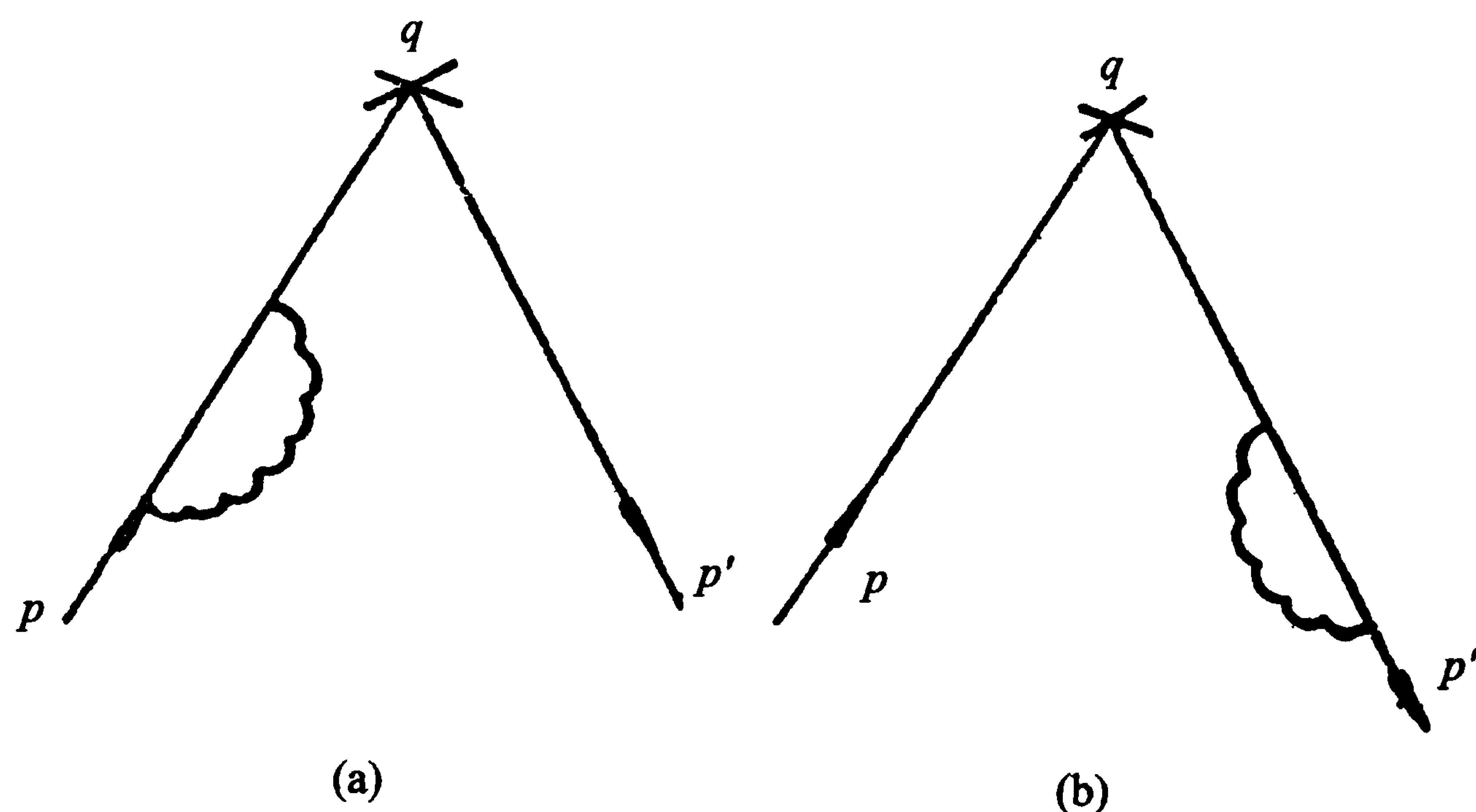



图 8.2

在引入质量抵消项以后图 8.2 对未重整化振幅的贡献是

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\Sigma_1\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p) \tag{8.4}$$

由计算得到 $\Sigma_1$ 的红外发散部分为

$$\frac{e_0^2 \mathrm{i}}{(2\pi)^4}\left[\int \mathrm{d}^4 k\,\frac{(2p+k)^2}{(k^2+\lambda^2)(2p\cdot k+k^2)^2}\right|_{p^2+m^2=0}-(1-\alpha)\int\frac{\mathrm{d}^4 k}{(k^2+\lambda^2)^2}\bigg] \tag{8.5}$$

上式也可以由 Ward 恒等式

$$\Sigma_1\gamma_\mu=-\frac{\partial\Sigma(p)}{\partial p_\mu}=-\Lambda_\mu(p,p) \tag{8.6}$$

得到。

由以上讨论知道，电子吸收虚光子的散射振幅(不计光子外线的因子)到 $e_0^2$ 阶可写为

$$M=M_0+M_1$$

$$M_0=\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)$$

$$M_1=\frac{e_0^2}{4\pi}B\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)+M_1' \tag{8.7}$$

其中

$$B=\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^4 k\left(\frac{2p_\mu+k_\mu}{k^2+2p\cdot k}-\frac{2p_\mu'+k_\mu}{k^2+2p'\cdot k}\right)^2\frac{1}{k^2+\lambda^2} \tag{8.8}$$

$M_1'$ 不含红外发散。这样，振幅的红外发散部分被与规范无关地分出到 $B$ 中。$B$ 中不含紫外发散。令 $\frac{\mathrm{d}\sigma^{(0)}}{\mathrm{d}\Omega}$ 为电子弹性散射截面，$\frac{\mathrm{d}\sigma_0^{(0)}}{\mathrm{d}\Omega}$ 为最低阶 Born 散射截面。

$\frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega}$在$e_0^2$阶有一个来自$M_0M_1$干涉项的红外发散项

$$\frac{e_0^2}{2\pi}B\frac{d\sigma_0^{(0)}}{d\Omega} \tag{8.9}$$

在微扰论高阶，当外线电子在质壳上时，弹性散射振幅包含高阶的红外发散项。数一下虚光子动量$k_i \to 0$时被积函数的幂次可以看出，在顶角中靠外边的虚光子动量趋于零时对这些虚光子线动量的积分有红外发散。如果一条虚光子线从外方被另一条动量不为零的虚光子线隔开或与它交叉，则对这条光子线动量的积分没有红外发散。在文献[1]中证明了红外发散是因子化的，对微扰论各阶求和后得到一个指数化的红外因子，散射振幅可以表示为

$$M = \exp\left(\frac{e_0^2}{4\pi}B\right)M'(e_0^2) \tag{8.10}$$

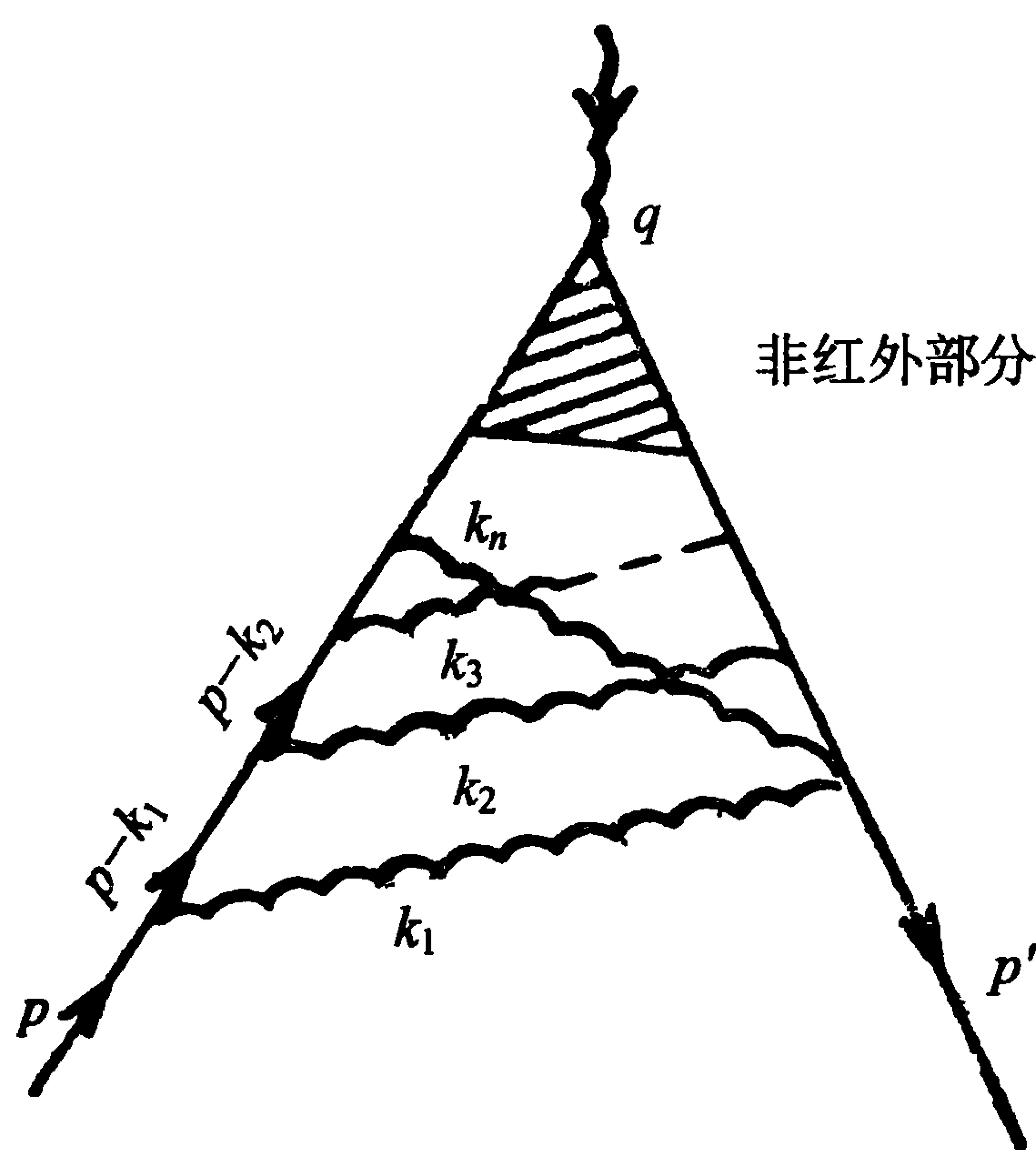



图 8.3

其中，$M'$不含红外发散。在$e_0^2$阶，式(8.10)与(8.9)相合。

我们来简略地叙述红外因子指数化的证明过程。考虑所有在顶角中靠外边有$n$条连接入射腿和出射腿的红外虚光子线的图形。把虚光子线按它在入射电子线上的端点顺序编号，如图8.3所示。忽略电子内线传播子分子上含$k_i$的项和分母中的$k_i^2$项，则所有$n$条红外虚光子线的图形的振幅和为

$$\begin{aligned}&\left(-\mathrm{i}\frac{e_0^2}{(2\pi)^4}\right)^n(2p\cdot p')^n\int\prod_i d^4k_i\frac{1}{k_i^2+\lambda^2}\\&\times\frac{1}{p\cdot k_1\,p\cdot(k_1+k_2)\cdots p\cdot(k_1+k_2+\cdots+k_n)}\\&\times\sum_P\frac{1}{p'\cdot k_{1P}\,p'\cdot(k_{1P}+k_{2P})\cdots p'\cdot(k_{1P}+k_{2P}+\cdots+k_{nP})}M'\end{aligned} \tag{8.11}$$

其中，$\{k_{iP}\}$是由$\{k_i\}$做置换$P$而得到的。

利用可以由归纳法证明的恒等式

$$\sum_P\frac{1}{a\cdot k_{1P}\,a\cdot(k_{1P}+k_{2P})\cdots a\cdot(k_{1P}+k_{2P}+\cdots+k_{nP})}=\prod_i\frac{1}{a\cdot k_i} \tag{8.12}$$

将式(8.11)中积分号内的第二个因子简化为

$$\prod_i \frac{1}{p' \cdot k_i}$$

然后再在积分号内的第一个因子中对 $k_1 \cdots k_n$ 做对称化并再一次利用恒等式(8.12),即可将式(8.11)写为

$$\frac{1}{n!}\left[-\mathrm{i}\frac{e_0^2}{(2\pi)^4}\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{k^2+\lambda^2}\frac{2p \cdot p'}{p \cdot kp' \cdot k}\right]^n M' \tag{8.13}$$

上式中括号内的量在红外区域内就是 $\alpha_0 B$ 中的 $p \cdot p'$项。我们不来详细讨论两端都在入射腿或出射腿的红外光子线的影响,考虑了一些组合因子后由式(8.12)可以证明它们给出 $\alpha_0 B$ 中的 $p^2$ 项和 $p'^2$项。对 $n$ 求和后就得到指数化的式(8.10)。这里还没有考虑光子线的自能修正。

现在我们来讨论式(8.10)的重整化。如果我们用在质壳上的重整化归一条件,要求重整化传播子 $S_F'$满足

$$\begin{aligned}&(S_F')^{-1}(p)\mid_{p^2=-m^2}\\&=[\mathrm{i}\not{p}+m-\delta m-\mathrm{i}\Sigma(p)-(Z_2-1)(\mathrm{i}\not{p}+m)]_{p^2=-m^2}=\mathrm{i}\not{p}+m\end{aligned} \tag{8.14}$$

则有

$$Z_2-1=-\left.\frac{\mathrm{d}\Sigma(\not{p})}{\mathrm{d}\not{p}}\right|_{p^2=-m^2}=\Sigma_1 \tag{8.15}$$

由前面的讨论已经知道,$\Sigma_1$ 是红外发散的。由 Ward 恒等式 $Z_1=Z_2$ 知道,在用质壳上的归一化条件时,顶角重整化常数 $Z_1$ 也含有红外发散。至于光子传播子重整化常数 $Z_3$,在第五章中已经给出了它的计算,它不含有红外发散。由于 Ward 恒等式 $Z_1=Z_2$,重整化关系式为 $e^2=Z_3Z_2^2Z_1^{-2}e_0^2=Z_3e_0^2$,$Z_1$ 和 $Z_2$ 在此关系式中消去了。

现在我们在式(8.10)中加上虚光子的自能修正,并把未重整的虚光子传播子 $D_{\mu\nu}'^0(k)$的横向部分分解为重整化常数 $Z_3$ 和一个紫外有限的重整化传播子 $D_{\mu\nu}'(k)$的横向部分的乘积,$D_{\mu\nu}$的纵向部分没有重整化。在对所有的图形求和后规范有关的纵向部分的贡献为零。把由 $D_{\mu\nu}'^0$ 的横向部分分出的 $Z_3$ 与其两端顶点上的 $e_0^2$ 结合换成 $e^2$ 就得到重整化振幅。由于 $D_{\mu\nu}'^0$ 和 $Z_3$ 都没有红外发散这个手续,不产生新的红外发散。当用质壳上的重整化归一条件时,在红外区域

$$D_{\mu\nu}'(k)\sim\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{1}{k^2}+\alpha\frac{k_\mu k_\nu}{(k^2)^2} \tag{8.16}$$

由此知道光子自能对式(8.10)的修正只是把未重整化电荷 $e_0^2$ 换为重整化电荷 $e^2$,在红外区 $B$ 的形式不变。因此 $M$ 可以写成如下的形式

$$M=\exp\left(\frac{e^2}{4\pi}B\right)M''(e^2) \tag{8.17}$$

其中，$M''(e^2)$不含红外发散。利用式(8.17)可将电子吸收虚光子的弹性散射或虚光子产生 $e^+e^-$ 对的截面写为

$$\frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega}=\exp(2\alpha\mathrm{Re}B)\frac{d\hat{\sigma}^{(0)}}{d\Omega} \tag{8.18}$$

其中，$\dfrac{d\hat{\sigma}^{(0)}}{d\Omega}$不含红外发散。因为 $\lambda\to 0$ 时 $B\to-\infty$，式(8.18)表示弹性散射是禁戒的。物理上，这意味着在外场中加速的电子必然要辐射许多红外光子。

量子力学中的红外发散困难是用 Bloch-Nordsieck 方案克服的。在这个方案中不企图得到 $\lambda^2\to 0$ 极限下有限的微扰论振幅而是满足于得到有限的物理上可观测的截面。由于测量仪器分辨率的限制，物理的观测不能分辨纯粹的弹性散射与伴随着能量很低的红外光子辐射的散射。令 $n$ 为辐射的红外光子数，$\varepsilon$ 是这些红外光子的总能量，$\Delta E$ 是测量电子能量的仪器的分辨率。物理上可观测的截面是

$$\frac{d\sigma(\Delta E)}{d\Omega}\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d\sigma^{(n)}(\Delta E)}{d\Omega}\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\Delta E}\frac{d^2\sigma^{(n)}(\varepsilon)}{d\Omega d\varepsilon}d\varepsilon \tag{8.19}$$

轫致辐射截面$\dfrac{d\sigma^{(n)}}{d\Omega}$也包含着红外发散。在微扰论最低阶，辐射一个光子的散射振幅由图 8.4 表示。令 $e(k)$为光子的极化矢量，相应的振幅为

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}e_0\bar{u}(p')\left[\gamma_\mu\frac{-\mathrm{i}(\not p-\not k)+m}{-2p\cdot k}\not e(k)+\not e(k)\frac{-\mathrm{i}(\not p'+\not k)+m}{2p'\cdot k}\gamma_\mu\right]u(p)\\&=-e_0\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)\left(\frac{p\cdot\not e(k)}{p\cdot k}-\frac{p'\cdot\not e(k)}{p'\cdot k}\right)+e_0\bar{u}(p')\\&\times\left[\gamma_\mu\frac{\not e\hat{\not k}}{2p\cdot k}+\frac{\hat{\not k}\not e}{2p'\cdot k}\gamma_\mu\right]u(p)\end{aligned} \tag{8.20}$$

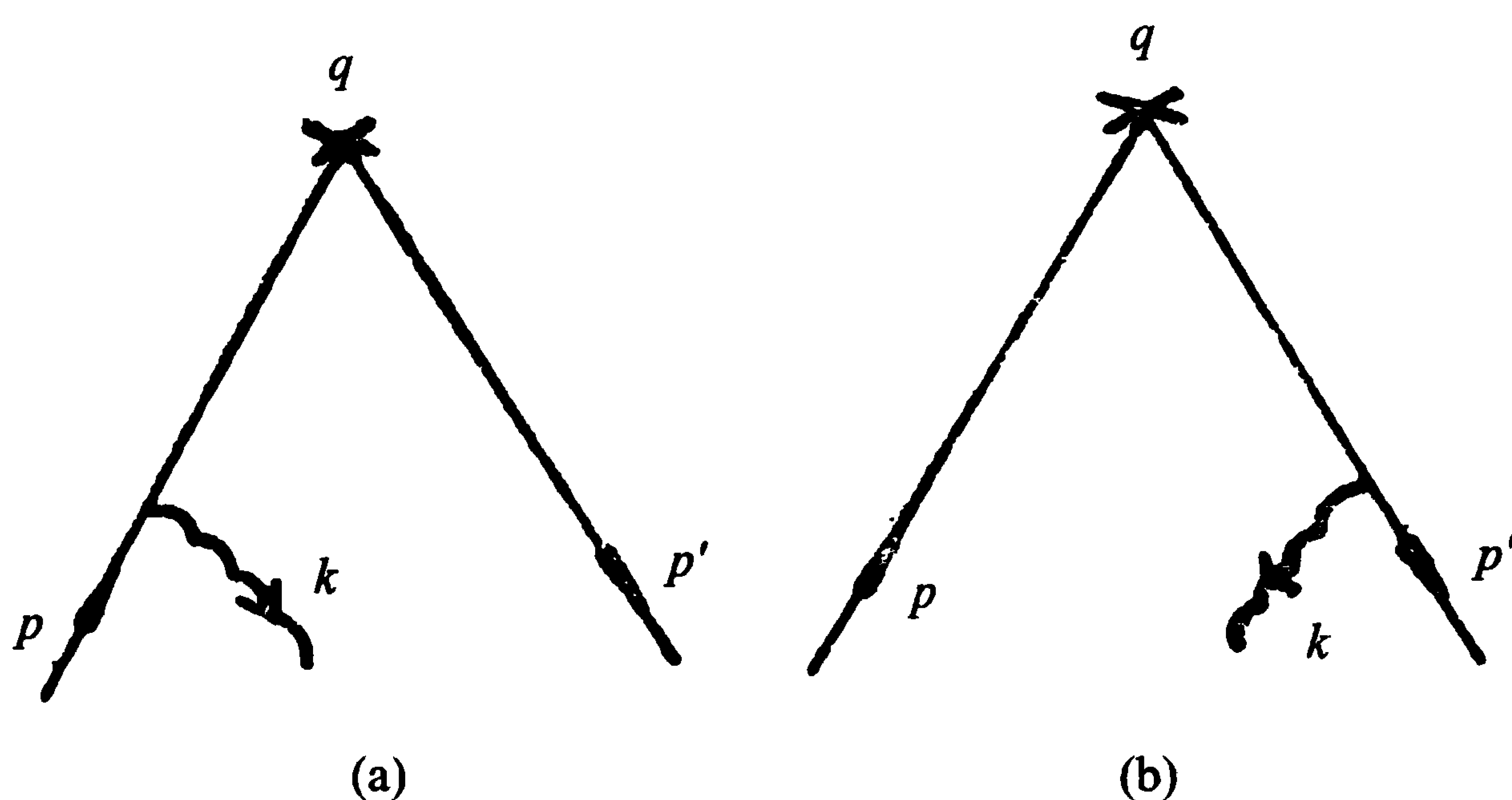



图 8.4

上式右方第一项对截面$\frac{\mathrm{d}\sigma(\Delta E)}{\mathrm{d}\Omega}$的贡献是红外发散的,它等于

$$\frac{e_0^2}{2\pi}\widetilde{B}(\Delta E)\frac{\mathrm{d}\sigma_0^{(0)}}{\mathrm{d}\Omega} \tag{8.21}$$

其中

$$\widetilde{B}(\Delta E)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{|\boldsymbol{k}|=\Delta E}\mathrm{d}^3k\,\frac{1}{2(|\boldsymbol{k}|^2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(\frac{p_\mu}{p\cdot k}-\frac{p'_\mu}{p'\cdot k}\right)^2 \tag{8.22}$$

上式中,$p^2$ 项和 $p'^2$ 项分别来自图8.4(a)和图8.4(b),$p\cdot p'$项来自图8.4(a)和图8.4(b)的干涉项(其中已用了两个图之和的规范不变性把 $\sum_{\text{极化}}a\cdot eb\cdot e$ 换为$a\cdot b$)。

回过来看式(8.8)。在红外的区域,电子传播子分母上的 $k^2$ 项和分子上含 $k$ 的项可以忽略。因此被积函数有以下四个极点

$$k_0=-\sqrt{|\boldsymbol{k}|^2+\lambda^2}+\mathrm{i}\varepsilon,\qquad k_0=\sqrt{|\boldsymbol{k}|^2+\lambda^2}-\mathrm{i}\varepsilon$$

$$k_0=\frac{1}{p_0}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}-\mathrm{i}\varepsilon),\qquad k_0=\frac{1}{p'_0}(\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{k}-\mathrm{i}\varepsilon) \tag{8.23}$$

把对 $k_0$ 的积分在上半复平面闭合成半圆。式(8.23)中第一个极点对积分的贡献为

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int\mathrm{d}^3k\,\frac{1}{2(|\boldsymbol{k}|^2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{p_\mu}{p\cdot k}-\frac{p'_\mu}{p'\cdot k}\right)^2 \tag{8.24}$$

对电子吸收虚光子的散射的情况,$p_0>0$,$p'_0>0$,因此其余的极点都在下半复平面,对积分没有贡献。对虚光子产生 $e^+e^-$ 对的情况 $p_0<0$,$p'_0>0$。这时极点 $k_0=\frac{1}{p_0}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}-\mathrm{i}\varepsilon)$对积分有贡献。完成对 $k_0$ 的积分以后把另外两个传播子 $\frac{1}{k^2-\mathrm{i}\varepsilon}$及$\frac{1}{p'\cdot k-\mathrm{i}\varepsilon}$按公式

$$\frac{1}{a-\mathrm{i}\varepsilon}=P\frac{1}{a}+\pi\mathrm{i}\delta(a) \tag{8.25}$$

分解为实部和虚部,不难看出只有 $P\frac{1}{k^2}\cdot\pi\mathrm{i}\delta(p'\cdot k)$项对三维动量 $\boldsymbol{k}$ 的积分有红外发散,但这一项的贡献是虚数,它对式(8.18)中的截面没有贡献。物理上,它相应于终态电子和正电子散射的无穷大库仑相移。由以上讨论知道 $\mathrm{Re}B+\widetilde{B}$ 在 $\lambda^2\to0$时是红外有限的。因此弹性散射和辐射一个光子的散射在$\frac{\mathrm{d}\sigma(\Delta E)}{\mathrm{d}\Omega}$中的红外奇异互相抵消,$\frac{\mathrm{d}\sigma(\Delta E)}{\mathrm{d}\Omega}$在$e^2$ 阶是红外有限的。抵消的方式是,图8.2(a)和8.2(b)

与 $M_0$ 的干涉项分别与图 8.4(a)和 8.4(b)互相抵消,图 8.1 与 $M_0$ 的干涉项和图 8.4(a)与 8.4(b)的干涉项互相抵消。

在一般的情况下,如果由某条实光子线端点的外方发出的所有光子线(包括实光子和虚光子)都是红外的,则在截面中对这条实光子线动量的积分有红外发散。在文献[1]中证明了轫致辐射的红外发散也是因子化和指数化的。利用恒等式(8.12)不难证明在对辐射的光子数和虚光子数求和后

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma^{(n)}(\Delta E)}{\mathrm{d}\Omega} &= \mathrm{e}^{2\alpha\mathrm{Re}B}\frac{e^{2n}}{n!}\int_0^{\Delta E}\mathrm{d}\varepsilon\delta(\Sigma\omega_i-\varepsilon)\cdot\prod_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}^3k_i}{(2\pi)^3 2\omega_i}\left(\frac{p_\mu}{p\cdot k_i}-\frac{p'_\mu}{p'\cdot k_i}\right)^2\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega}\\ &= \mathrm{e}^{2\alpha\mathrm{Re}B}\frac{e^{2n}}{n!}\int_0^{\Delta E}\mathrm{d}\varepsilon\int\frac{\mathrm{d}y}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Sigma\omega_i-\varepsilon)y}\cdot\int\prod_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}^3k_i}{(2\pi)^3 2\omega_i}\left(\frac{p_\mu}{p\cdot k_i}-\frac{p'_\mu}{p'\cdot k_i}\right)^2\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega}\end{aligned}\tag{8.26}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(\Delta E)}{\mathrm{d}\Omega}=\int\frac{\sin(\Delta E\cdot y)}{\pi y}\mathrm{d}y\ \exp[2\alpha(\mathrm{Re}B+\widetilde{B}_y(\Delta E))]\frac{\mathrm{d}\hat{\sigma}}{\mathrm{d}\Omega}\tag{8.27}$$

其中

$$\widetilde{B}_y(\Delta E)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{k_0\leqslant\Delta E}\mathrm{d}^4k\delta(k^2+\lambda^2)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega y}\left(\frac{p_\mu}{p\cdot k}-\frac{p'_\mu}{p'\cdot k}\right)^2\tag{8.28}$$

由式(8.26)知道辐射有限个光子的截面在 $\lambda\to 0$ 时趋于零。由于式(8.27)在 $\lambda\to 0$ 时没有红外发散 Bloch-Nordsieck 截面是有限的。

计算结果得到在 $|q^2|\gg m^2$ 和 $(\Delta E)^2$ 时,$B$ 和 $\widetilde{B}(\Delta E)$ 可近似地写为

$$B=-\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{q^2}{m^2}\left(\ln\frac{m^2}{\lambda^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{q^2}{m^2}-\frac{1}{2}\right)-\ln\frac{m^2}{\lambda^2}\right]\tag{8.29}$$

$$\widetilde{B}(\Delta E)=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{|q^2|}{m^2}\left(\ln\frac{m^2}{\lambda^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{|q^2|}{m^2}-\ln\frac{EE'}{(\Delta E)^2}\right)-\ln\frac{m^2}{\lambda^2}+\ln\frac{EE'}{(\Delta E)^2}\right]\tag{8.30}$$

其中,$E\equiv p_0$,$E'\equiv p'_0$。由上两式也可以看到 $\mathrm{Re}B+\widetilde{B}(\Delta E)$ 中含 $\ln\lambda^2$ 的项抵消了。

以上关于红外发散的因子化和指数化及 Bloch-Nordsieck 截面的有限性的结论可以推广到量子电动力学的一般过程。例如,电子-电子弹性散射或辐射一定数目的光子的截面有红外发散,但是如果对不同数目能量不完全确定的光子求和,则截面是有限的。

在量子色动力学中也存在零质量的矢量粒子,因此也有红外发散的问题。以夸克吸收虚光子或虚光子产生夸克-反夸克对振幅为例,考虑强作用的辐射修正,用未重整化的规范耦合常数 $g_0$ 表示的散射振幅在 $g_0^2$ 阶的计算与量子电动力学十分相似,差别只是将图 8.1 和 8.2 中的光子内线换为胶子内线,相应地将 $e_0^2$ 换

为 $g_0^2C_2(F)$，其中 $C_2(F)=\frac{1}{4}\sum_i\lambda_i\lambda_i$ 为 $SU(3)_c$ 群三维表示中的二阶 Casimir 算符。因此，相应于前面的式(8.9)，弹性散射截面$\frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega}$在 $g_0^2$ 阶有一个红外发散项

$$\frac{g_0^2}{2\pi}C_2(F)B\,\frac{d\sigma_0^{(0)}}{d\Omega}\tag{8.31}$$

同时，相应于式(8.21)，夸克辐射一个色指标为 $i$ 的红外胶子的截面有一个红外发散项(对末态夸克色指标求和)

$$\frac{1}{4}\lambda_i\lambda_i\,\frac{g_0^2}{2\pi}\widetilde{B}\,\frac{d\sigma_0^{(0)}}{d\Omega}\tag{8.32}$$

在对终态胶子色指标求和并对始态夸克的色指标求平均后，式(8.31)和(8.32)中的红外发散互相抵消。因此$\frac{d\sigma(\Delta E)}{d\Omega}$在 $g_0^2$ 阶是有限的。在这里讨论的简单情形中，其红外发散抵消的机制与量子电动力学几乎完全一样。唯一需要指出的一点是此时必须对外线粒子的色指标求和或求平均。

在微扰论的高阶中，量子色动力学的红外发散比量子电动力学复杂得多。这是因为在像量子色动力学这样的非 Abel 规范理论中有三胶子顶点。这样的耦合项可以产生例如图 8.5 所示的 Feynman 图形，其中虚线代表胶子。数一下散射截面在这些胶子线的动量趋于零时的幂次可以知道，这些图形都有复杂的红外发散。另一个复杂的因素是，在胶子与夸克作用的顶角上有一个矩阵$\frac{\lambda_i}{2}$，这些矩阵是不能对易的。因此文献[1]中对量子电动力学中红外发散消去的证明不能用于量子色动力学。在开始研究这个问题时，人们不得不求助于微扰论低阶计算。

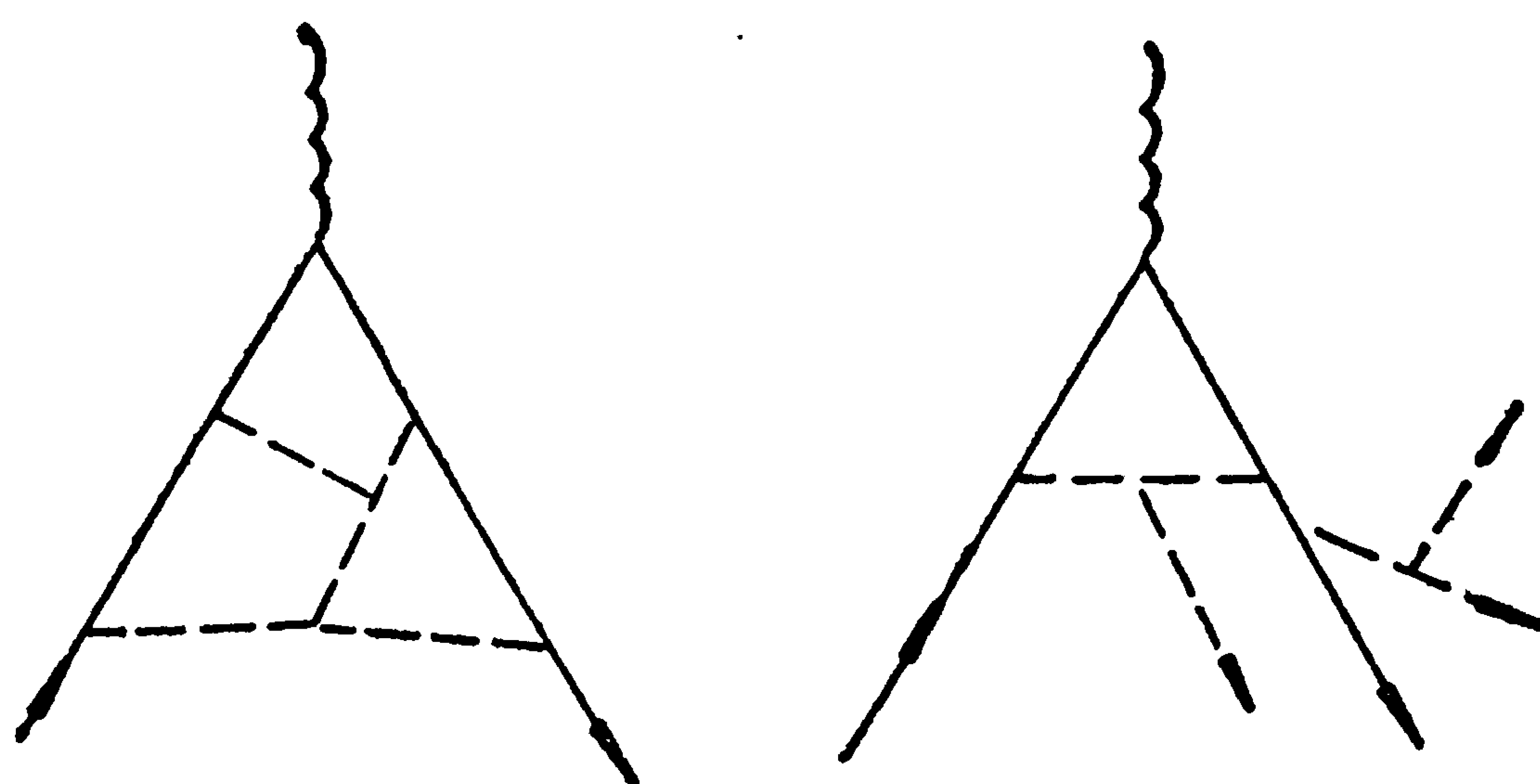


图 8.5

在文献[2]中计算了夸克-夸克散射和夸克-胶子散射截面到 $g_0^6$ 项以及 $e^+ + e^- \to \gamma^* \to$夸克对＋胶子截面到 $g_0^4$ 项，结果发现，在对各个外线粒子的色指标独立求和后，这些截面中虚胶子和辐射的实胶子对红外发散的贡献都互相抵消了。

对于夸克吸收虚光子的散射振幅，文献[3]的结果表明，如果不考虑自能和顶角的修正，$M$ 在红外发散的领头对数近似内[即$(g_0^2\ln\lambda^2)^n$ 项之和]直到三圈图都与下式符合

$$M \sim \exp\left(\frac{g_0^2}{4\pi}C_2(F)B\right)\bar{u}\gamma_\mu u \tag{8.33}$$

在 $q^2 \gg m^2$ 而 $\lambda^2$ 固定时，$M$ 在领头对数近似内[即$\left(g_0^2\ln^2\frac{q^2}{m^2}\right)^n$ 项之和]直到三圈图都与下式符合

$$M \sim \exp\left\{-\frac{g_0^2}{16\pi^2}C_2(F)\ln^2\frac{q^2}{m^2}\right\}\bar{u}\gamma_\mu u \tag{8.34}$$

将式(8.33)及(8.34)与式(8.10)及(8.29)比较可看到，在领头对数近似内量子色动力学的未重整振幅与量子电动力学的差别只是把 $e_0^2$ 换为 $g_0^2C_2(F)$。文献[4]证明领头对数近似下的式(8.34)在微扰论任意阶是成立的。虽然量子色动力学有三胶子顶点和$[\lambda_i,\lambda_j]\neq 0$ 的复杂性，但是这两种因素在这里恰好抵消，得到的结果与量子电动力学很相似。

虽然在低阶图和领头对数近似下量子色动力学中的红外发散与量子电动力学很相似，它们也有重要的不同之点。在量子色动力学中胶子自能修正有胶子圈图和虚拟标量粒子圈图的贡献。在第五章中已对这些圈图做了计算，它含有例如以下形式的项

$$(k^2\delta_{\lambda\lambda'} - k_\lambda k_{\lambda'})\int\frac{d^4q}{(q-k)^2q^2}$$

因此，如果在外动量 $k^2=0$ 的质壳上做减除，胶子传播子重整化常数 $Z_3$ 是红外发散的。此外，在量子色动力学中，用协变规范时没有简单的 Ward 恒等式 $Z_1=Z_2$。其结果是色荷重整化常数 $Z=Z_1^{-1}Z_2Z_3^{1/2}$ 是红外发散的。因此，在量子色动力学中，如果在质壳上做减除，把自能和顶角分出紫外有限的部分同时把 $g_0^2$ 换为 $Z^2g_0^2=g^2$，则在做减除前没有红外发散的 Bloch-Nordsieck 截面中将重新出现发散。例如，考虑夸克-夸克散射到微扰论一级修正 $g_0=Zg=g(1+ag^2)$。弹性散射截面可写成如下的形式

$$g_0^4\sigma_0 + g_0^6\sigma_1 \simeq g^4\sigma_0 + g^6\sigma_1 + 2ag^6\sigma_0$$

而辐射一个胶子的截面可写成如下的形式

$$g_0^6\tilde{\sigma}_1(\Delta E) \simeq g^6\tilde{\sigma}_1(\Delta E)$$

$g^4\sigma_0$ 是 Born 散射截面，它不含红外发散。按照文献[2]的结果，$\sigma_1$ 的红外发散与 $\tilde{\sigma}_1(\Delta E)$互相抵消，而 $a$ 中包含红外发散，因此 Bloch-Nordsieck 截面用 $g^2$ 表示时

是红外发散的。

避免上述困难的办法是用前面已经说明过的在离开质壳的欧氏点做减除或用最小减除。由这种重整化规则定义的耦合常数 $g^2(\mu^2)$不是一个物理散射振幅的值,它不能像电荷那样由低能散射来测定。此外,在这样的重整化规则下重整化传播子和顶角在质壳上并不趋于裸传播子和裸顶角,它们在质壳上是奇异的。例如,由第五章的式(5.134)可以看到胶子传播子的 $g^2$ 阶修正在动量 $k^2\to 0$ 时有 $g^2\ln k^2$ 的奇异项。

在文献[5]中证明了夸克吸收虚光子的散射振幅在红外发散的领头对数近似内[即$(g^2\ln\lambda^2)^n$ 项之和]是由梯形图贡献的,但是其中的传播子和顶角都必须用重整化的。而量子电动力学的红外发散领头对数近似是由裸传播子和裸顶角的梯形图贡献的。因此,考虑了自能和顶角修正的夸克散射振幅不能简单地由式(8.33)做替换 $g_0^2\to g^2$ 而得到,而必须以某个有效耦合常数代替 $g_0^2$。文献[5]中证明了夸克散射振幅 $M$ 满足如下的类似于重整化群方程的微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial\tau}M = \frac{\bar{g}^2(\tau)}{4\pi^2}C_2(F)B(q^2/m^2)M \tag{8.35}$$

其中

$$\tau = \ln\lambda/m$$

由于量子色动力学是一个红外不稳定的理论,$\bar{g}^2(\tau)$在 $\lambda\to 0$ 时变大,因此散射振幅的红外行为不是能在微扰论范围内处理的。

对于本章中以后的讨论来说,重要的是在物理截面中红外发散是否消去。如果红外发散消去,这个截面就有可能在微扰论范围内计算。关于这个问题,除前述文献[2]中的低阶计算结果外,在文献[6]中证明了,对于夸克在外电磁场中的散射 Bloch-Nordsieck 截面(作为裸耦合常数的函数)在微扰论任意阶是有限的。但是这样的一般结论不能推广到初态有两个带颜色量子数的粒子的过程[7]。量子色动力学中红外发散的一般结构还远没有弄清楚。

现在我们来讨论共线发散(也称为质量奇异)。仍以量子电动力学中的轫致辐射为例。在微扰论最低阶这个过程的振幅是式(8.20)。我们来看式(8.21)左方的第一项,它相当于图 8.4(a)中初态电子辐射光子的图形。令 $\theta$ 为 $\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{p}$ 的夹角。当$|\boldsymbol{p}|\gg m$ 时这一项的分母有因子

$$2p\cdot k \simeq 2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|\left(1-\cos\theta+\frac{m^2}{2|\boldsymbol{p}|^2}\right) \tag{8.36}$$

共线发散发生在 $m=0$ 且 $\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{p}$ 同向时。这是由于在 $m=0,\theta\simeq 0$ 时,上式近似等于$2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{k}|\frac{\theta^2}{2}$。在同样的条件下 $k$ 可写为

$$k = xp + k_\perp + O(|\boldsymbol{k}|\theta^2)$$

其中，$\boldsymbol{k}_\perp$ 只有垂直于 $p$ 的分量，$|\boldsymbol{k}_\perp| = |\boldsymbol{k}|\sin\theta$。由上式得到

$$[-\mathrm{i}(\not{p}-\not{k})+m]\not{e}(k)u(p) = -\mathrm{i}[2p\cdot e+\not{e}\not{k}]u(p)$$
$$= -\mathrm{i}[2p\cdot e+\not{e}\not{k}_\perp+O(m)]u(p) \tag{8.37}$$

实光子的极化矢量是横向的，在两个独立的极化矢量中只有在 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 组成的平面内的一个对 $e\cdot p$ 有贡献。因此

$$e\cdot p = \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{p} = |\boldsymbol{p}|\sin\theta \simeq |\boldsymbol{p}|\theta \tag{8.38}$$

由式(8.37)知道，式(8.20)中第一项的分子有一个因子 $\theta$。光子-电子作用顶点上这一个在共线时趋于零的因子可以这样来理解，规范场的作用顶点 $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu$ 是保持电子的螺旋性不变的，光子的螺旋性等于 $\pm1$，由于角动量守恒，辐射共线光子的电子必须改变它的螺旋性，因此这样的过程在顶点上有一个禁戒的因子。由式(8.36)、(8.37)和(8.38)知道，散射振幅在 $\theta\sim0$ 处的行为是

$$A \sim \frac{\sin\theta}{\omega\left(1-\cos\theta+\dfrac{m^2}{2|\boldsymbol{p}|^2}\right)} \sim \frac{2\theta}{\omega\left(\theta^2+\dfrac{m^2}{|\boldsymbol{p}|^2}\right)} \tag{8.39}$$

因此截面中有一个因子

$$\int\frac{|\boldsymbol{k}|^2\mathrm{d}|\boldsymbol{k}|}{2\omega}\mathrm{d}\cos\theta\,|A|^2(\cdots) \sim 2\int\frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{k}|}{\omega}\int_0^\delta\frac{\theta^3\mathrm{d}\theta}{\left(\theta^2+\dfrac{m^2}{|\boldsymbol{p}|^2}\right)^2}(\cdots)$$
$$\simeq 2\int\frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{k}|}{\omega}\left(\ln\frac{|\boldsymbol{p}|^2\delta^2}{m^2}-1\right)(\cdots) \tag{8.40}$$

$\delta$ 是满足条件 $1\gg\delta^2\gg\dfrac{m^2}{|\boldsymbol{p}|^2}$ 的任意角度。式(8.40)中对 $|\boldsymbol{k}|$ 积分在 $k=0$ 处的发散就是前面讨论过的红外发散。在 $m=0$ 时式(8.40)中对 $\theta$ 的积分在 $\theta=0$ 处发散，这种发散称为共线发散。由于这是在一个零质量粒子衰变为两个零质量粒子时发生的，所以也称为质量奇异。在量子电动力学中电子质量实际上不为零，因此共线发散并不真正存在。但是，由式(8.40)可以看到 $|\boldsymbol{p}|\to\infty$ 等价于 $m\to0$，$m\to0$ 时的共线发散反映为高能截面中的对数因子。所以共线发散的研究对于高能截面的计算是重要的，它破坏标度性。

式(8.20)左方第二项是终态电子放出光子的振幅，在 $\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{p}'$ 近似共线时，它的平方也在截面中产生共线发散和红外发散。此外，式(8.20)左方第一项和第二项的干涉项也产生共线发散和红外发散。

由图 8.1 和 8.2 表示的电子弹性散射振幅在 $m=0$ 时也包含共线发散。极点 $k_0=-\sqrt{|\boldsymbol{k}|^2+\lambda^2}+\mathrm{i}\varepsilon$ 对式(8.2)中的 $k_0$ 积分的贡献有因子

$$\int\mathrm{d}^3k\,\frac{1}{2(\boldsymbol{k}^2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{1}{2p\cdot k2p'\cdot k}$$

共线发散发生在内部光子线的动量与一条电子外线的动量共线时。由于$\frac{\mathrm{d}\sigma(\Delta E)}{\mathrm{d}\Omega}$是红外有限的，实光子和虚光子对双重发散（红外发散因子与共线发散因子的乘积）的贡献在$\frac{\mathrm{d}\sigma(\Delta E)}{\mathrm{d}\Omega}$中消去了。

量子色动力学中存在夸克与零质量胶子的规范作用，因而在夸克质量 $m\to 0$ 时有与量子电动力学类似的共线发散。除此以外，量子色动力学中还有三个零质量胶子作用的顶点，在这三个胶子的动量共线时也存在着发散。因此量子色动力学的发散比量子电动力学更复杂。

红外发散和共线发散与一个被称为 Kinoshita-Lee（李政道）- Naunberg 定理[8]的普遍定理有关。这个定理考虑的情况是理论中有连续无穷多个能量退化的态，这些态的所有物理量都与初态或末态相同，因而物理上不能把它们区别开。例如，一个动量为 $\boldsymbol{p}$ 的电子态与一个动量$\simeq \boldsymbol{p}$ 的电子加一些能量$\simeq 0$ 的光子的态在能量、动量和电荷上都是相等的，一个动量为 $\boldsymbol{p}$ 的零质量电子态与一个动量 $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}$ 的零质量电子加一些共线（方向平行）的总动量为 $\boldsymbol{k}$ 的光子的态也是如此。这时在微扰论的跃迁概率计算中可能存在发散。Kinoshita-Lee-Naunberg 定理说，在对与始态及末态退化的所有态平均及求和后，用未重整的耦合常数表示的跃迁概率在微扰论的任意阶内都是有限的。这个定理可以用于上面叙述的量子电动力学和量子色动力学中的红外发散和共线发散。在量子电动力学中对有不同红外光子数的末态求和以后截面中的红外发散抵消了。在这个特殊情况下对有不同数目的红外光子的初态求平均是不必要的。

按照 K-L-N 定理，量子色动力学中，对有不同近似共线或红外的胶子数的初、末态求和并对初、末态粒子的色指标求和的截面或其他适当定义的截面是没有共线发散和红外发散的。这一点为一些微扰论低阶计算所证实。下一节中将讨论的 $e^{+}+e^{-}\to\gamma^{*}\to$夸克 + 胶子过程的计算可以作为一个例证。

注意，K-L-N 定理是对用未重整化耦合常数表示的截面说的。前面已经说明，在量子色动力学中，如果在质壳上做减除，则用重整化电荷表示的截面中红外发散不能消去。对 $m=0$ 时的共线发散来说，如果在质壳上做减除，即使在量子电动力学中，共线发散也不能按 K-L-N 定理消去。因为这时重整化常数 $Z_3$ 有共线发散。为了避免这个困难可以用在欧氏点做减除或最小减除的重整化方案。

由于复杂的红外发散和共线发散，在量子色动力学中以夸克和胶子为渐近态的 $S$ 矩阵是不存在的。另一方面，色禁闭的假设也要求夸克和胶子不出现在渐近态中，因此它们不能是质壳上的物理粒子。虽然如此，我们将看到本节中讨论的红外发散和共线发散对量子色动力学微扰论的应用是非常重要的。

## 8.2 量子色动力学中的 $e^+ + e^- \to$ 强子过程和喷注现象

在微扰论中能够计算的截面必须是没有红外发散和共线发散的。在我们实际上要处理的问题中，夸克和胶子或者是始态强子的部分子，或者最终要转换为末态强子。这些夸克和胶子不是严格在质壳上的，因此并不真正存在红外发散和共线发散。但是如果所讨论的截面当粒子趋于质壳时包含红外发散或共线发散，则微扰论中存在$\left(g^2\ln\frac{q^2}{P^2}\right)^n$ 形式的因子，其中 $q$ 为某个动量传递，$P^2$ 为一个外线动量的二次式，它在某些粒子的动量趋于质壳时趋于零或 $m^2$。部分子脱离质壳的程度大体上可以用 QCD 作用变强的能量标度来表征，可以认为 $|p^2+m^2|<1(\mathrm{GeV})^2$。从物理现象上说，100MeV～1GeV 也是强作用的典型能量。因此 $P^2<O(1\mathrm{GeV}^2)$。在 $q^2/P^2\gg1$ 时与红外发散和共线发散相联系的因子使得微扰论级数的收敛性变坏。因此在 QCD 中可以在微扰论低阶中做可靠计算的高能截面必须是当外线粒子趋于质壳时没有红外发散和共线发散的。为了公式的简单，对这样的截面我们近似地把外线夸克和胶子的动量取在质壳上，并且取 $m=0$。

如果这个截面只与一个动量标度 $q$ 有关，则在上述近似下由量纲分析知道它必定有如下的形式

$$\sigma(q^2,\alpha_s(\mu^2),\mu^2) = \frac{1}{q^2}f(q^2/\mu^2,\alpha_s(\mu^2)) \tag{8.41}$$

其中，$\mu$ 为重整化点，$\alpha_s(\mu^2)=g^2(\mu^2)/4\pi$。当选取 $\mu^2=q^2$ 时，上式化为

$$\sigma = \frac{1}{q^2}f(1,\alpha_s(q^2)) \tag{8.42}$$

在可重整场论的微扰论计算中，通常伴随着紫外发散的重整化，出现$(g^2(\mu^2)\ln q^2/\mu^2)^n$ 形式的因子。这种形式的项在选取 $\mu^2=q^2$ 时消失了。由于量子色动力学是渐近自由的，$\alpha_s(q^2)$在 $q^2$ 大时变小，由式(8.42)知道没有红外发散和共线发散而且只与一个动量尺度 $q^2(|q^2|\gg m^2)$有关的截面是可以在微扰论低阶中进行可靠计算的。在本节中将把这个方法应用于 $e^+ + e^- \to$ 强子过程。

在 7.1 节中已经介绍了部分子模型对 $e^+ + e^- \to$ 强子过程的描述。部分子模型给出的总截面公式是第七章的公式(7.1)，在这个公式中完全忽略了强作用对总截面的影响。量子色动力学中对部分子模型的最低级修正来自图 8.6～8.8 中的 Feynman图形。根据上面的讨论，在量子色动力学中这种强作用修正是可以在微扰论中可靠地计算的。这是因为在 $e^+ + e^- \to$ 强子过程中，初态粒子不带色荷，不存在初态简并的问题，而在总截面中已包含对终态夸克和胶子的简并态求和。按照K-L-N定理，它没有红外发散和共线发散。

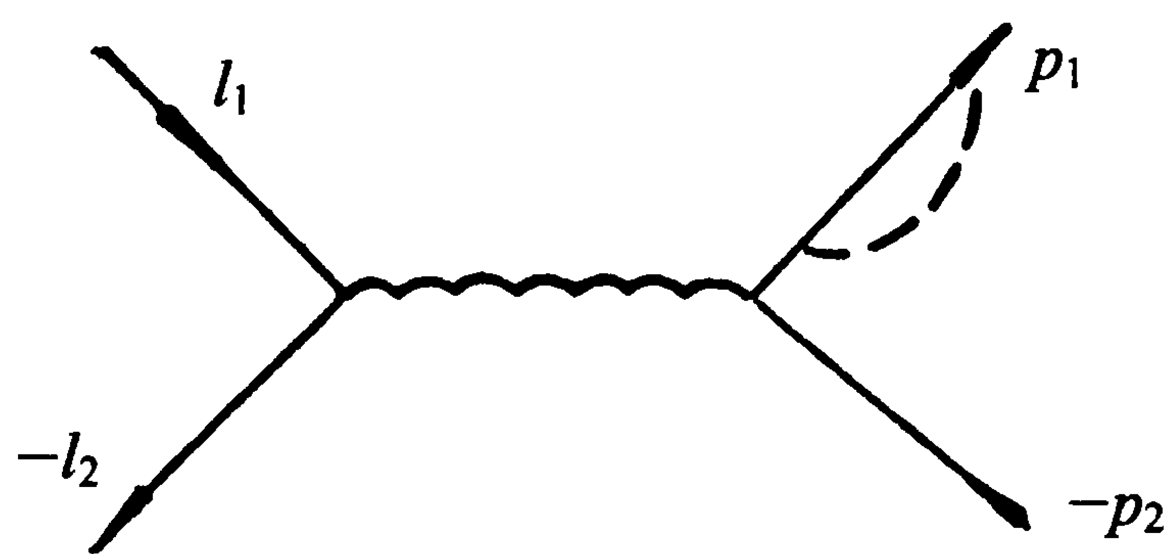



图 8.6

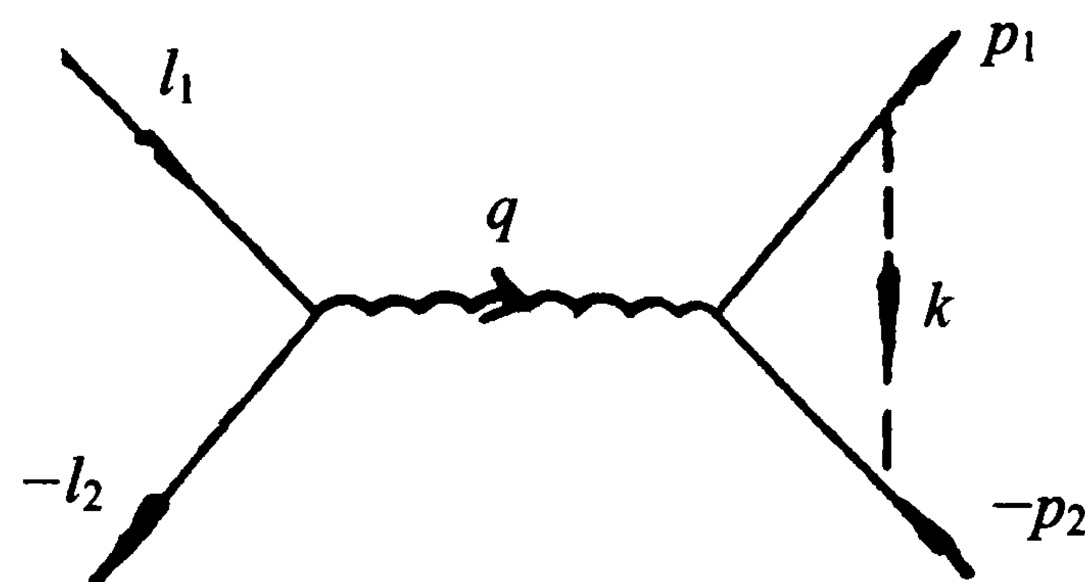
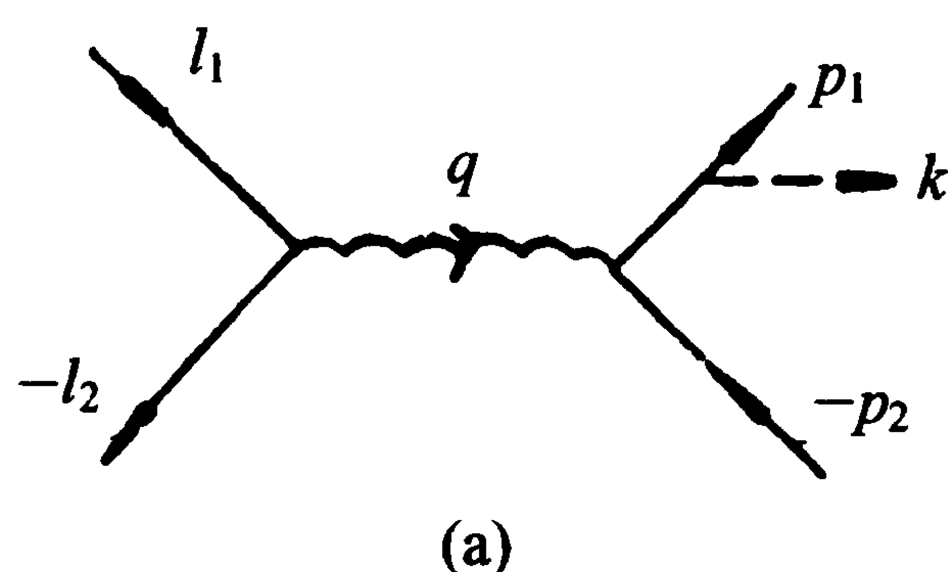
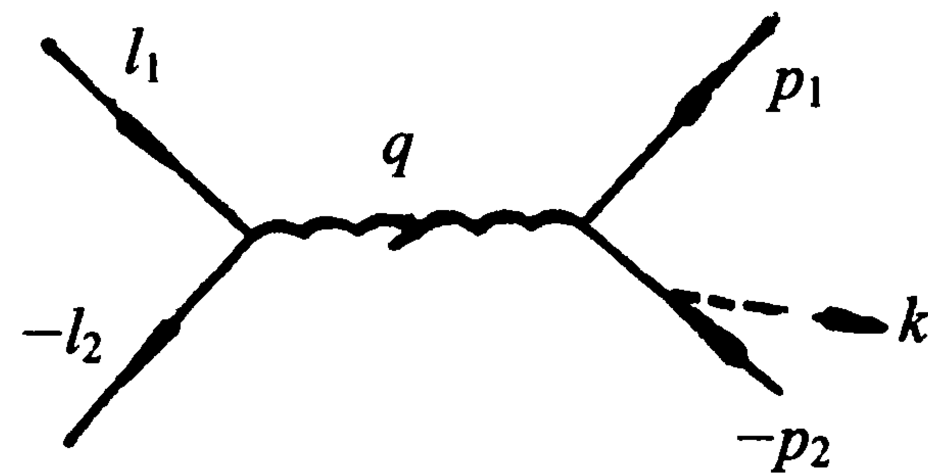



图 8.7




(a)




(b)

图 8.8

在部分子模型中，末态高能部分子最终将通过强相互作用转化为一些强子。根据高能强子散射时形成狭窄的向前峰的经验事实，人们假设这些强子相对于原来高能部分子动量的方向有小的横动量。这样，末态中的高能部分子转化为一束强子的喷注。部分子模型给出 $e^+ + e^- \to$两个喷注的微分截面公式为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma^{(0)}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\alpha^2}{-4q^2}(1+\cos^2\theta)\sum_\alpha (Q_\alpha)^2 \tag{8.43}$$

上式中，$\theta$ 是喷注轴与入射方向的夹角。角分布$(1+\cos^2\theta)$与夸克的自旋为$\frac{1}{2}$有关。

1975 年在 $e^+e^-$ 高能对撞实验中首先观察到了喷注现象，其后，在轻子的深度非弹性过程和高能强子碰撞中也观察到了这种现象。$e^+e^-$ 实验的角分布与式(8.43)一致。

在公式(8.43)中完全忽略了部分子在转化为强子之前所参与的强作用。这种强作用可以改变夸克的动量，因此也许会破坏喷注的形成或影响它的性质。所以，一个强作用理论需要解释喷注的存在和它的性质。现在我们以 $e^+ + e^-$ 对撞为例说明量子色动力学对喷注的描述。

夸克转化为强子喷注的过程是一种非微扰的过程，与可能的“色禁闭”有关，在量子色动力学中还无法计算，只能沿用部分子模型的假设。然而，在量子色动力学中可以按照图 8.6～8.8 考虑夸克和反夸克在转化为强子之前与胶子的作用，计算它对截面的修正。整个过程被分成两个阶段。第一个阶段是包含大的动量转移

$q^2$ 的硬过程，它是在短的时间和距离[量级为 $O((|q^2|)^{-\frac{1}{2}})$]内进行的，可以用微扰论计算；第二阶段是只包含小的动量传递的软过程，它是在较长的时间和距离内(强子半径的量级)进行的，不能用微扰论计算。这是 7.3 节末叙述的因子化的又一个例子。

根据 8.1 节的讨论，如果固定终态夸克、反夸克动量的方向，微分截面公式中将包含共线发散。因此在文献[8]中提出计算终态能量除 $\eta E_c$($E_c=\sqrt{-q^2}$ 是质心系总能量，$\eta<1$)外都分布在张角为 $\delta$ 的两个共顶点反方向(取 $e^+e^-$ 质心系)的锥内的过程的截面 $\sigma(q^2,\eta,\delta)$。这样定义的截面可以描述喷注的性质。由于 $\sigma(q^2,\eta,\delta)$ 的定义中已包含对终态的简并态求和，按照 K-L-N 定理，它没有红外发散和共线发散，因而在 $|q^2|$ 大时可以在微扰论中可靠地计算。

现在我们在 $\eta\ll1,\delta\ll1$ 近似下计算 $\sigma(q^2,\eta,\delta)$。我们将忽略夸克的质量 $m$。但是为了红外发散和共线发散的正规化，我们将引进胶子的质量 $\lambda$。首先，考虑图 8.6 中的夸克自能修正部分。在用维数正规化时，夸克自能修正可写为

$$\Sigma(p)=C_2(F)g^2\mu^\varepsilon\int\frac{\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^D}\gamma_\mu\frac{-(\not p+\not k)}{(p+k)^2}\times\gamma_\nu\frac{-\mathrm{i}}{k^2+\lambda^2}\left(\delta_{\mu\nu}-(1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\tag{8.44}$$

其中，$-\varepsilon=D-4$。利用公式

$$\gamma_\mu\not a\gamma_\mu=-2(1-\varepsilon/2)\not a,\qquad\gamma_\mu\gamma_\mu=D$$

可以将上式化为

$$\Sigma(p)=-C_2(F)g^2\mu^\varepsilon\int\frac{\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^D}\left\{\frac{1}{(k^2+\lambda^2)(p+k)^2}[(1-\varepsilon+\alpha)\mathrm{i}\not p+2(1-\varepsilon/2)\mathrm{i}\not k]-(1-\alpha)\frac{p^2\mathrm{i}\not k}{(p+k)^2(k^2+\lambda^2)^2}+(1-\alpha)\frac{\mathrm{i}\not k}{(k^2+\lambda^2)^2}\right\}\tag{8.45}$$

利用第五章中的积分公式我们有

$$\frac{1}{(2\pi)^D}\int\mathrm{d}^Dk\frac{\not k}{(k^2+\lambda^2)^2}=0$$

$$\frac{1}{(2\pi)^D}\int\mathrm{d}^Dk\frac{c+\not k}{(p+k)^2(k^2+\lambda^2)}$$

$$=(4\pi)^{-\frac{D}{2}}\mathrm{i}\Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right)\int\mathrm{d}x\cdot\frac{c-x\not p}{[p^2x(1-x)+\lambda^2(1-x)]^{2-D/2}}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^D}\int\mathrm{d}^Dk\frac{\not k}{(p+k)^2(k^2+\lambda^2)^2}$$

$$= (4\pi)^{-\frac{D}{2}} \mathrm{i}\Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right)/2\int \mathrm{d}x \cdot \frac{2(1-x)(-x\not{p})}{[p^2x(1-x)+\lambda^2(1-x)]^{3-D/2}}$$

将以上公式代入 $\Sigma(p)$ 的表示式(8.45)并利用

$$\Gamma(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon} - \gamma \tag{8.46}$$

其中，$\gamma$ 为 Euler 常数，可以得到

$$\Sigma(p) = \mathrm{i}\frac{g^2}{16\pi^2}C_2(F)\left\{-\frac{2}{\varepsilon}\alpha + 1 + \alpha\gamma - (1-\alpha)p^2\int\frac{x\mathrm{d}x}{p^2x+\lambda^2}\right.$$

$$\left. - \int \mathrm{d}x(2x-1-\alpha)\cdot\ln[p^2x(1-x)+\lambda^2(1-x)]/4\pi\mu^2\right\}\mathrm{i}\not{p} \tag{8.47}$$

先令 $p^2 \neq 0$，这时可令 $\lambda^2 \to 0$，上式变为

$$\Sigma(p) = \mathrm{i}\frac{g^2}{16\pi^2}C_2(F)\cdot\alpha\left\{-\frac{2}{\varepsilon} + \gamma + 3 + \ln\frac{p^2}{4\pi\mu^2}\right\}\mathrm{i}\not{p} \tag{8.48}$$

因此，如果我们取 Landau 规范 $\alpha = 0$，则 $\Sigma(p) = 0$，自能修正可以不考虑。得到这个结果不需要在质壳上做自能的减除。

现在我们来考虑图 8.7 中的顶角修正。在 Landau 规范下，图中的顶角部分为

$$\Lambda_\mu = \Lambda_\mu^{(1)} + \Lambda_\mu^{(2)}$$

其中

$$\bar{u}(p_1)\Lambda_\mu^{(1)}v(p_2) = g^2C_2(F)\mu^\varepsilon\bar{u}(p_1)\int\frac{\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^D}\gamma_\lambda\frac{-(\not{p}_1+\not{k})}{k^2+2p_1\cdot k}$$

$$\times(-1)\gamma_\mu\frac{-(-\not{p}_2+\not{k})}{k^2-2p_2\cdot k}\gamma_\lambda v(p_2)\frac{-\mathrm{i}}{k^2+\lambda^2} \tag{8.49}$$

$$\bar{u}(p_1)\Lambda_\mu^{(2)}v(p_2) = -g^2C_2(F)\mu^\varepsilon\bar{u}(p_1)\int\frac{\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^D}$$

$$\times\not{k}\frac{-(\not{p}_1+\not{k})}{k^2+2p_1\cdot k}(-1)\gamma_\mu\cdot\frac{-(-\not{p}_2+\not{k})}{k^2-2p_2\cdot k}$$

$$\times\not{k}v(p_2)\frac{-\mathrm{i}}{(k^2+\lambda^2)^2} \tag{8.50}$$

式(8.50)可化为

$$\Lambda_\mu^{(2)} = -\mathrm{i}g^2C_2(F)\mu^\varepsilon\int\frac{\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^D}\frac{1}{(k^2+\lambda^2)^2}\gamma_\mu$$

$$= C_2(F)\frac{g^2}{16\pi^2}\left(\frac{\lambda^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\varepsilon/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)\gamma_\mu \tag{8.51}$$

利用公式

$$\gamma_\lambda \not{a} \gamma_\lambda = -2(1-\varepsilon/2)\not{a}$$
$$\gamma_\lambda \not{b} \not{c} \gamma_\lambda = 4b \cdot c - \varepsilon \not{b} \not{c}$$
$$\gamma_\lambda \not{a} \not{b} \not{c} \gamma_\lambda = -2\not{c} \not{b} \not{a} + \varepsilon \not{a} \not{b} \not{c} \tag{8.52}$$

式(8.49)可以化为

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p_1)\Lambda_\mu^{(1)} v(p_2) &= -4\mathrm{i}g^2 C_2(F)\mu^\varepsilon \bar{u}(p_1)\int \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \delta(1-\Sigma x_i) \\
&\cdot \frac{1}{(2\pi)^D}\int \mathrm{d}^D k[-\not{p}_2 \gamma_\mu \not{p}_1 + \not{k}\gamma_\mu \not{p}_1 - \not{p}_2 \gamma_\mu \not{k} + (1-\varepsilon/2) \\
&\times \not{k}\gamma_\mu \not{k}]\frac{1}{[k^2+2k\cdot(p_1x_1-p_2x_2)+\lambda^2 x_3]^3} v(p_2) \\
&= 4g^2\mu^\varepsilon(4\pi)^{-\frac{D}{2}}\bar{u}(p_1)\int \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \delta(1-\Sigma x_i) \\
&\times \frac{1}{(q^2 x_1 x_2 + \lambda^2 x_3)^{3-D/2}} \frac{\Gamma\left(3-\frac{D}{2}\right)}{2.} \\
&\times \left\{[1-x_1-x_2+x_1x_2(1-\varepsilon/2)]q^2 - \frac{1}{2-\frac{D}{2}}(q^2 x_1 x_2 + \lambda^2 x_3)\right. \\
&\times \left.(1-\varepsilon/2)^2\right\}\gamma_\mu v(p_2) = -\bar{u}(p_1)\gamma_\mu v(p_2)\frac{g^2}{8\pi^2}C_2(F) \\
&\times \left\{\int_{x_1+x_2\leqslant 1}\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2\left[-\frac{(1-x_1-x_2+x_1x_2)}{q^2x_1x_2+\lambda^2(1-x_1-x_2)}q^2\right]\right. \\
&+ \Gamma\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)(1-\varepsilon/2)^2\left(\frac{q^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\varepsilon/2} \cdot \int_{x_1+x_2\leqslant 1}\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \\
&\times \left.\left[x_1x_2+\frac{\lambda^2}{q^2}(1-x_1-x_2)\right]^{-\varepsilon/2}\right\} \\
&\equiv -\bar{u}(p_1)\gamma_\mu v(p_2)\frac{g^2}{8\pi^2}C_2(F)(J_1+J_2)(q^2)
\end{aligned} \tag{8.53}$$

注意到 $q^2<0$, $J_1$ 中的分母在积分范围内变号，因而需要分成两段做，可以得到 $\lambda^2 \to 0$时

$$J_1(q^2) \to -\frac{1}{2}\ln^2\frac{-q^2}{\lambda^2} + 2\ln\frac{-q^2}{\lambda^2} + \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{2} \tag{8.54}$$

$$J_2(q^2) \to \left(\frac{q^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\varepsilon/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)\frac{1-\varepsilon/2}{2}B(1-\varepsilon/2, 1-\varepsilon/2) \tag{8.55}$$

利用式(8.46)及

$$B(1-\varepsilon/2,1-\varepsilon/2)=1+\varepsilon+O(\varepsilon^2)$$

知道 $\Lambda_\mu^{(1)}$ 和 $\Lambda_\mu^{(2)}$ 中的$\frac{1}{\varepsilon}$极点项互相抵消，因而 $\Lambda_\mu$ 中不存在紫外发散。由以上计算得到

$$\Lambda_\mu^{(1)}(q^2)=\frac{g^2}{8\pi^2}C_2(F)\left[+\frac{1}{\varepsilon}-\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{q^2}{4\pi\mu^2}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\ln^2\frac{-q^2}{\lambda^2}+2\ln\frac{-q^2}{\lambda^2}+\frac{\pi^2}{6}-2\right](-\gamma_\mu) \tag{8.56}$$

因为通常定义的电荷是在 $q^2=0$ 处归一化的，真正的顶角修正是

$$\Lambda_\mu^{(c)}(q^2)=\Lambda_\mu(q^2)-\Lambda_\mu(0)=\Lambda_\mu^{(1)}(q^2)-\Lambda_\mu^{(1)}(0) \tag{8.57}$$

在式(8.53)中取 $q^2=0$ 得到

$$\Lambda_\mu^{(1)}(0)=\frac{g^2}{8\pi^2}C_2(F)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)(1-\varepsilon/2)^2\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\lambda^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\varepsilon/2}\int_{x_1+x_2\leqslant 1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdot(1-x_1-x_2)^{-\varepsilon/2}\right](-\gamma_\mu)$$
$$=-\frac{g^2}{8\pi^2}C_2(F)\left[-\frac{1}{\varepsilon}+\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{\lambda^2}{4\pi\mu^2}+1+\int_0^1\mathrm{d}\rho\cdot\rho\ln(1-\rho)\right]\cdot(-\gamma_\mu)$$
$$=-\frac{g^2}{8\pi^2}C_2(F)\left[-\frac{1}{\varepsilon}+\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{\lambda^2}{4\pi\mu^2}+\frac{1}{4}\right](-\gamma_\mu) \tag{8.58}$$

由式(8.56)~(8.58)得到

$$\Lambda_\mu^{c}(q^2)=\frac{g^2}{8\pi^2}C_2(F)\left[-\frac{1}{2}\ln^2\frac{-q^2}{\lambda^2}+\frac{3}{2}\ln\frac{-q^2}{\lambda^2}-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}+\frac{\pi^2}{6}-\frac{7}{4}\right](-\gamma_\mu)$$
$$\equiv F(q^2)(-\gamma_\mu) \tag{8.59}$$

虚胶子辐射修正对截面的贡献为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_v}{\mathrm{d}\Omega}=2\mathrm{Re}F(q^2)\frac{\mathrm{d}\sigma_0}{\mathrm{d}\Omega}$$
$$=\frac{\alpha_s}{\pi}C_2(F)\left[-\frac{1}{2}\ln^2\frac{-q^2}{\lambda^2}+\frac{3}{2}\ln\frac{-q^2}{\lambda^2}+\frac{\pi^2}{6}-\frac{7}{4}\right]\frac{\mathrm{d}\sigma_0}{\mathrm{d}\Omega}. \tag{8.60}$$

其中，$\frac{\mathrm{d}\sigma_0}{\mathrm{d}\Omega}$由式(8.43)表示。

现在我们来计算图 8.8 中辐射实胶子图形的贡献。这两个图的截面为

$$\frac{\alpha^2}{4\pi^3}\frac{1}{(-q^2)^2}g^2C_2(F)\int\Sigma\mathrm{d}\tau \tag{8.61}$$

其中

$$\Sigma = m_{\mu\nu} W_{\mu\nu}$$

$$m_{\mu\nu} = \frac{1}{4 l_{10} l_{20}} (\delta_{\mu\nu} l_1 \cdot l_2 - l_{1\mu} l_{2\nu} - l_{1\nu} l_{2\mu})$$

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{8E_1 E_2 \omega} \mathrm{Tr} \{ [ - \not{p}_1 \gamma_\lambda (\not{p}_1 + \not{k}) \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu (\not{p}_1 + \not{k}) \gamma_\lambda ]$$
$$\times \frac{1}{(2p_1 \cdot k - \lambda^2)^2} + [ \not{p}_1 \gamma_\lambda (\not{p}_1 + \not{k}) \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\lambda (\not{p}_2 + \not{k}) \gamma_\nu ]$$
$$\times \frac{1}{(2p_1 \cdot k - \lambda^2)(2p_2 \cdot k - \lambda^2)} \Big\} + p_1 \leftrightarrow p_2 \text{ 项} \tag{8.62}$$

因此

$$\Sigma = - \frac{1}{l_{10} l_{20} E_1 E_2 \omega} \{ (l_1 \cdot k l_2 \cdot p_2 + l_1 \cdot p_2 l_2 \cdot k)$$
$$\times \frac{1}{2p_1 \cdot k - \lambda^2} + \frac{1}{2} [ p_1 \cdot p_2 ((p_1 + k) \cdot l_1 p_2 \cdot l_2$$
$$+ p_2 \cdot l_1 (p_1 + k) \cdot l_2) + p_1 \cdot k (p_1 \cdot l_1 p_2 \cdot l_2 + p_1 \cdot l_2 p_2 \cdot l_1$$
$$- 2p_2 \cdot l_1 p_2 \cdot l_2) ] \frac{1}{(2p_1 \cdot k - \lambda^2)(2p_2 \cdot k - \lambda^2)} \} + p_1 \leftrightarrow p_2 \text{ 项}$$
$$\equiv \Sigma_1 + \Sigma_2 + p_1 \leftrightarrow p_2 \text{ 项} \tag{8.63}$$

相空间积分体积为

$$\int \mathrm{d}\tau = \int \mathrm{d}^3 p_1 \mathrm{d}^3 p_2 \mathrm{d}^3 k \delta^4 (q - p_1 - p_2 - k) = \int \omega E_1 E_2 \mathrm{d}E_1 \mathrm{d}E_2 \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}\varphi_2 \tag{8.64}$$

其中，$\mathrm{d}\Omega = \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \equiv \sin\theta_1 \mathrm{d}\theta_1 \mathrm{d}\varphi_1$ 为 $\boldsymbol{p}_1$ 的立体角，$\varphi_2$ 为 $\boldsymbol{p}_2$ 的方位角。我们在 $e^+ e^-$ 质心系内进行计算。

引入变量

$$x_1 = 2E_1 / \sqrt{-q^2} \equiv 2\tilde{E}_1, \qquad x_2 = 2E_2 / \sqrt{-q^2} \equiv 2\tilde{E}_2 \tag{8.65}$$

则有

$$\omega = \left(1 - \frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}\right) \sqrt{-q^2} \tag{8.66}$$
$$-2p_1 \cdot k + \lambda^2 = (1 - x_2)(-q^2)$$
$$-2p_2 \cdot k + \lambda^2 = (1 - x_1)(-q^2)$$

由 $\boldsymbol{p}_1$ 与 $\boldsymbol{p}_2$ 之间的夹角 $\theta_{12}$ 满足条件 $-1 \leqslant \cos\theta_{12} \leqslant 1$ 定出积分范围在曲线 I

$$1 - x_1 - x_2 + x_1 x_2 - \tilde{\lambda}^2 = 0, \qquad (\cos\theta_{12} = -1) \tag{8.67}$$

及曲线Ⅱ

$$1 - x_1 - x_2 - \tilde{\lambda}^2 = 0, \qquad (\cos\theta_{12} = 1) \tag{8.68}$$

所包的区域内，如图 8.9 所示，这里 $\tilde{\lambda}^2 \equiv \lambda^2 / -q^2$。

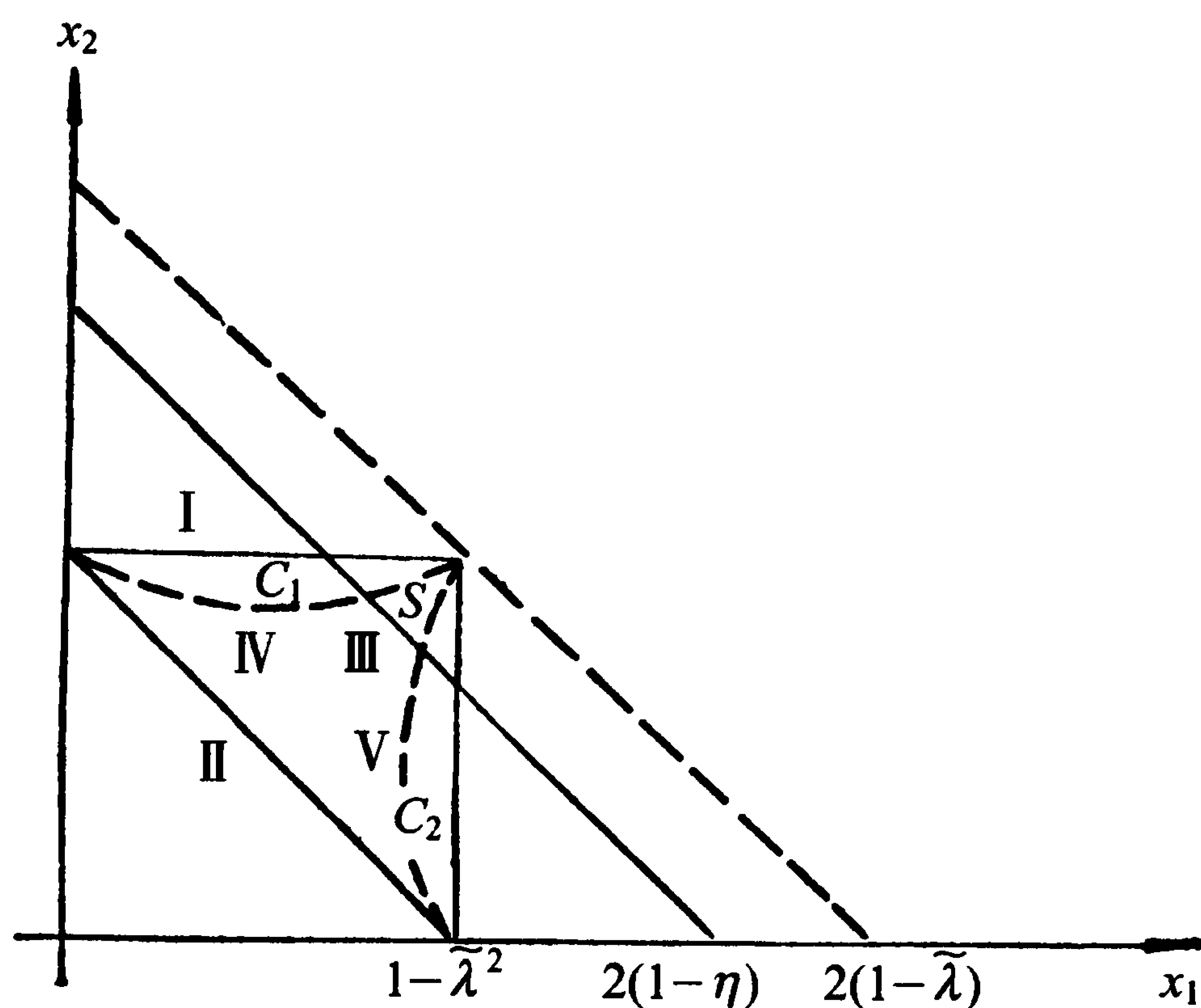



图 8.9

首先，考虑 $\omega < \eta E_c$ 的软胶子区。这时相空间为图 8.9 中直线 $x_1 + x_2 = 2(1 - \eta)$ 和曲线Ⅰ所包的 $S$ 区内。对 $x_1$ 和 $x_2$ 的积分限为

$$\iint_S \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \int_{1-\eta-\sqrt{\eta^2-\tilde{\lambda}^2}}^{1-\eta+\sqrt{\eta^2-\tilde{\lambda}^2}} \mathrm{d}x_1 \int_{2(1-\eta)-x_1}^{1-\frac{\tilde{\lambda}^2}{1-x_1}} \mathrm{d}x_2 \tag{8.69}$$

式(8.63)右方第一项无红外发散，它在软胶子区的贡献为 $O(\eta)$ 的量级，可以忽略。式(8.63)右方第二项在软胶子区可简化，分子上可取 $k = 0, x_1 = x_2 = 1$。我们得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{-q^2}\int_s \mathrm{d}\tau \Sigma_2 &= \frac{1}{8}\iint_s \frac{\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2}{(1 - x_1)(1 - x_2)}(1 + \cos^2\theta)\mathrm{d}\Omega \mathrm{d}\varphi_2 \\ &= \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}\left(\ln\frac{4\eta^2}{\tilde{\lambda}^2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{6}\right](1 + \cos^2\theta)\mathrm{d}\Omega \end{aligned}$$

加上 $p_1$ 和 $p_2$ 互换的项，由此得到辐射软胶子对截面的贡献为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_s}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\alpha_s}{\pi}C_2(F)\left[\frac{1}{2}\left(\ln\frac{4\eta^2 E_c^2}{\lambda^2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{6} + O(\eta)\right]\frac{\mathrm{d}\sigma_0}{\mathrm{d}\Omega} \tag{8.70}$$

$\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{p}_1(\boldsymbol{p}_2)$ 近似共线(夹角$\leqslant 2\delta \ll 1$)的硬胶子($\omega \geqslant \eta E_c$)区域为图 8.9 中曲线Ⅰ、Ⅲ和Ⅳ(Ⅴ)所包围的区域 $C_1(C_2)$，曲线Ⅳ、Ⅴ的方程式分别为

Ⅳ　　$$x_2 = 1 - \delta^2 x_1(1 - x_1)$$

V
$$x_1=1-\delta^2 x_2(1-x_2) \tag{8.71}$$

在区域 $C_1$ 内积分限为

$$\iint_{C_1} \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \int_0^{1-\eta-\sqrt{\eta^2-\tilde{\lambda}^2}} \mathrm{d}x_1 \int_{1-\delta^2 x_1(1-x_1)}^{1-\frac{\tilde{\lambda}^2}{1-x_1}} \mathrm{d}x_2 + \int_{1-\eta-\sqrt{\eta^2-\tilde{\lambda}^2}}^{1-2\eta+2\eta\delta^2} \mathrm{d}x_1 \int_{1-\delta^2 x_1(1-x_1)}^{2-2\eta-x_1} \mathrm{d}x_2 \tag{8.72}$$

上式右方第二项的贡献为 $O(\delta^2)$的量级,可以忽略。在区域 $C_1$ 内式(8.63)中分子上的 $k$ 可近似地取作平行于 $p_1$,$x_2$ 可近似地取作 1。这时我们有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{-q^2}\int_{C_1}\Sigma_1 \mathrm{d}\tau &\simeq \frac{\pi}{8}\iint_{C_1}\frac{(1-x_1)}{1-x_2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2(1+\cos^2\theta)\mathrm{d}\Omega \\
&\simeq \frac{\pi}{8}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\delta^2}{\tilde{\lambda}^2}-\frac{7}{4}\right](1+\cos^2\theta)\mathrm{d}\Omega - \frac{1}{q^2}\int_{C_1}\Sigma_2\mathrm{d}\tau \\
&\simeq \frac{\pi}{4}\iint_{C_1}\frac{x_1}{(1-x_1)(1-x_2)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2(1+\cos^2\theta)\mathrm{d}\Omega \\
&\simeq -\frac{\pi}{4}\left[\ln\delta^2/\tilde{\lambda}^2-3+\ln\delta^2/\tilde{\lambda}^2\ln(2\eta)+\frac{1}{4}\ln^2(2\eta)^2+\frac{\pi^2}{6}\right](1+\cos^2\theta)\mathrm{d}\Omega
\end{aligned}$$

$C_2$ 区的贡献与 $C_1$ 区相等,由此得到辐射硬共线胶子的截面为

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\sigma_c}{\mathrm{d}\Omega} = -\frac{\alpha_s}{\pi}C_2(F)\Big[&\ln\frac{\delta^2 E_c^2}{\lambda^2}\ln(2\eta)^2 \\
&+\frac{3}{2}\ln\frac{\delta^2 E_c^2}{\lambda^2}+\frac{1}{2}\ln^2(2\eta)^2+\frac{\pi^2}{3}-\frac{17}{4}\Big]\frac{\mathrm{d}\sigma_0}{\mathrm{d}\Omega}
\end{aligned} \tag{8.73}$$

式(8.60)、(8.70)及(8.73)相加后得到

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\sigma(q^2,\eta,\delta)}{\mathrm{d}\Omega} &= \frac{\mathrm{d}\sigma_0}{\mathrm{d}\Omega}+\frac{\mathrm{d}\sigma_v}{\mathrm{d}\Omega}+\frac{\mathrm{d}\sigma_s}{\mathrm{d}\Omega}+\frac{\mathrm{d}\sigma_c}{\mathrm{d}\Omega} \\
&= \left\{1-\frac{4\alpha_s}{3\pi}\left[\ln\delta^2\ln 4\eta^2+\frac{3}{2}\ln\delta^2+\frac{\pi^2}{3}-\frac{5}{2}\right]+O(\eta,\delta)\right\}\frac{\mathrm{d}\sigma_0}{\mathrm{d}\Omega}
\end{aligned} \tag{8.74}$$

这就是所谓 Sterman-Weinberg 公式。在此公式中含 $\ln\lambda^2$ 的项完全消去了,在 $\lambda\to 0$ 时 $\frac{\mathrm{d}\sigma(q^2,\eta,\delta)}{\mathrm{d}\Omega}$ 是有限的,表明不存在红外和共线发散。

在这里做的 $\alpha_s$ 阶计算的近似内,$\frac{\mathrm{d}\sigma(q^2,\eta,\delta)}{\mathrm{d}\Omega}$ 与紫外重整化点 $\mu^2$ 没有关系。考虑到在高阶计算中存在与紫外发散相联系的 $\alpha_s\ln\frac{q^2}{\mu^2}$ 因子(因为 $q^2$ 是这个截面中唯一的动量尺度),为使高阶修正可以忽略,重整化点应取 $\mu^2=-q^2$,因此式

(8.74)中的 $\alpha_s$ 应理解为 $\alpha_s(-q^2)$。式(8.74)的应用范围是 $\eta \ll 1, \delta \ll 1$, $\alpha_s \ln 4\eta^2 \ln\delta^2 \ll 1$。

$e^+ + e^- \to$强子的总截面自然也是没有红外和共线发散的。为计算辐射实胶子图对这个截面的贡献,只需要把准确的公式(8.63)先对角度 $d\Omega d\varphi_2$ 进行积分,然后对图 8.9 中曲线Ⅰ和Ⅱ所包围的整个区域积分,这时可得到

$$\sigma(e^+ + e^- \to \text{强子}) = \frac{4\pi\alpha^2}{3(-q^2)} \sum_\alpha Q_\alpha^2 \cdot \left[1 + C_2(F) \frac{3\alpha_s(-q^2)}{4\pi}\right] \quad (8.75)$$

由式(8.74)和(8.75)得到能量除 $\eta E_c$ 外都集中在张角为 $2\delta$ 的圆锥体内的截面与总截面之比为

$$f(\eta, \delta) = 1 - C_2(F) \frac{\alpha_s(-q^2)}{\pi}\left[\ln\delta(4\ln 2\eta + 3) + \frac{\pi^2}{3} - \frac{4}{7}\right] + O(\alpha_s^2, \eta, \delta) \quad (8.76)$$

由以上公式可以看到量子色动力学微扰论给出的喷注有一个特点,即它的能量集中在一个锥内,锥的张角只是随 $|q^2|$ 上升而缓慢地下降。因此锥内强子的平均横动量 $\langle p_\perp^2 \rangle$ 是上升的。如在式(8.76)中固定 $f$ 值和 $\eta$ 值而解出 $\delta = \delta(E_c)$,则

$$\delta(E_c) = \left(\frac{E_c}{\Lambda}\right)^{-\alpha(f,\eta)} \quad (8.77)$$

$$\alpha(f, \eta) = \frac{1}{8}\left(\frac{33 - 2N_f}{-4\ln 2\eta - 3}\right) \cdot \left[1 - f - \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{4}{3}\left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{7}{4}\right)\right] \quad (8.78)$$

$\delta(E_c)$可以作为喷注张角的量度。因此我们有

$$\langle P_\perp^2 \rangle \sim \frac{1}{4} E_c^2 \langle \theta^2 \rangle \sim \frac{1}{4} E_c^2 \delta^2(E_c) \propto (E_c^2)^{1-\alpha} \quad (8.79)$$

这些预言是与实验一致的。

用量子色动力学微扰论还可以计算由 $e^+ + e^- \to q + \bar{q} + g$ 图及其辐射修正产生的三个分开的喷注的过程,这种过程也已在实验上观察到了。

## 8.3　深度非弹性过程的 QCD 微扰论分析 Altarelli-Parisi 方程

第七章中叙述的对深度非弹性过程的算符乘积展开和重整化群处理方法,虽然是严格和系统的方法,但是它比较抽象和形式化。在本节中将由微扰论图形分析出发处理同一问题。这种方法的优点是比较具体和形象化。在领头对数近似的范围内,它与算符乘积展开和重整化群的方法得到同样的结果。

第七章中已经提到,在量子色动力学中标度性的破坏来源于夸克辐射胶子及

夸克和胶子的相互作用。这些过程包含着红外发散和共线发散。深度非弹性过程与强子中一个夸克吸收虚光子(或中间 Bose 子)的散射相联系。虽然在单举截面中包含了对末态软胶子求和因而没有红外发散[6],但是由于物理截面中不含有始态中有共线胶子的项,K-L-N 定理不能保证共线发散在单举截面中消去。我们将看到,与这些共线发散相联系的因子 $\left(g^2\ln\frac{q^2}{m^2}\right)^n$ 是标度性破坏的来源。在文献[10],[11]中由对这些共线发散的详细分析出发证明了它们是因子化的,它们的总效果可以归结为把部分子模型中的分布函数 $\rho(x)$ 换为一个与 $q^2$ 有关的有效分布函数 $\rho(x,q^2)$。存在共线发散使得深度非弹性散射单举截面不能在微扰论低阶中计算,这是与 8.2 节中讨论的 $e^+ + e^- \to$ 喷注过程不同的。但是在文献[10]中在领头对数近似下对无穷多个共线发散项求和,得到了前面用重整化群得到的结果。文献[11]中所用的方法与上述方法有联系,但是更多地用了直观的描述。在本节中我们将综合介绍这两种方法。

首先,考虑深度非弹性散射的味非单态部分,为此只需考虑强子中吸收虚光子(或中间 Bose 子)的夸克。设虚光子动量为 $q$,夸克动量为 $p$。夸克可以首先辐射 $N$ 个胶子然后再与虚光子作用。令胶子的动量依次为 $k_1,k_2,\cdots,k_N$,层子内线的动量依次为 $p_1,p_2,\cdots,p_N$,如图 8.10 所示。这个过程的截面可以写成如下的形式

$$\sigma_N(q,p)=(g^2C_2(F))^N\mathrm{Tr}\int\left\{\cdots\cdots \not p_2 \not e_2^{s_2} \not p_1 \not e_1^{s_1}\frac{(-\mathrm{i}\not p)}{2E}\not e_1^{s_1}\not p_1\not e_2^{s_2}\not p_2\cdots\right\}$$

$$\cdot\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{(p_i^2)^2}\frac{\mathrm{d}^3k_i}{(2\pi)^32\omega_i}+\text{干涉项} \tag{8.80}$$

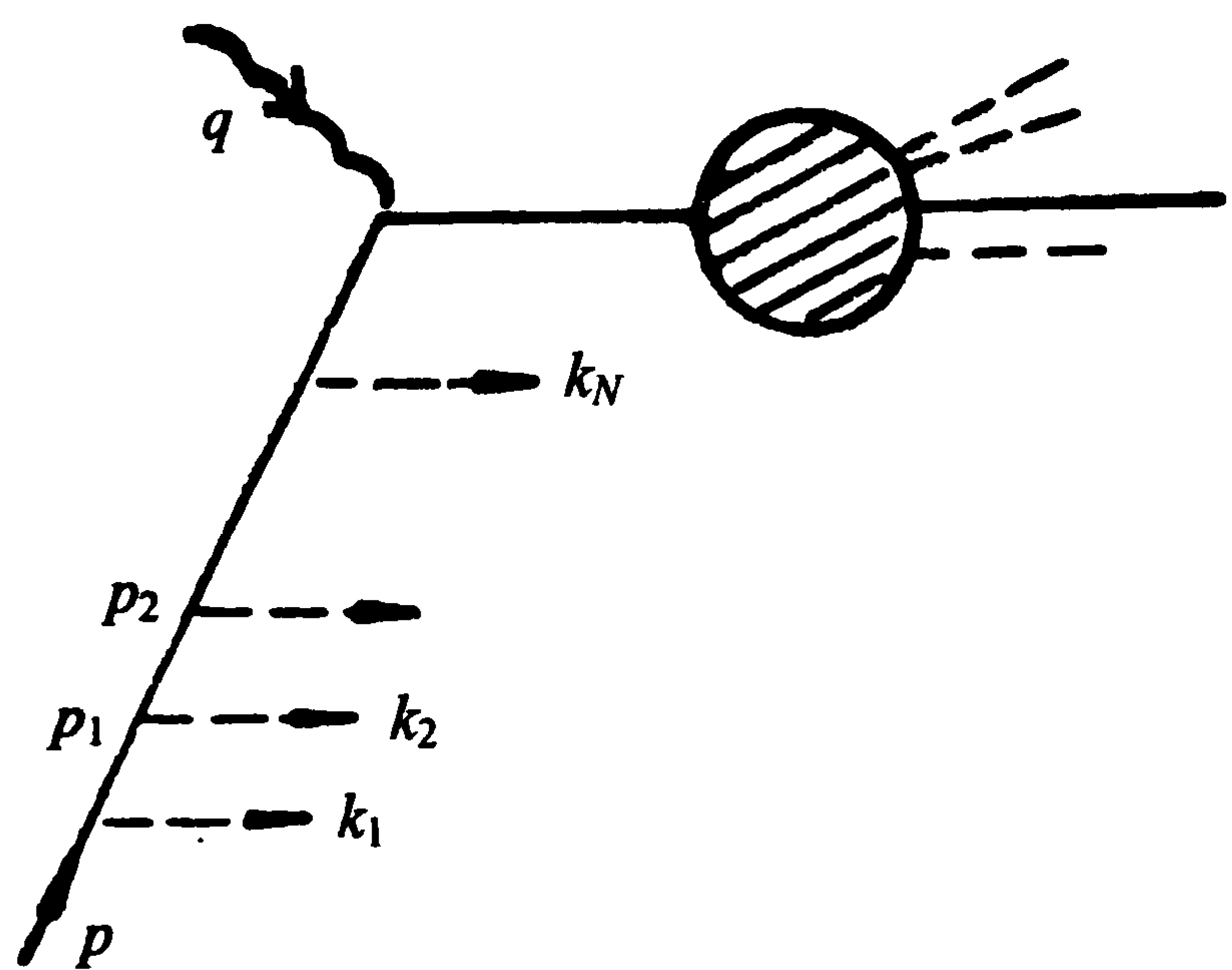



图 8.10

其中,$e^s(s=1,2)$为胶子的两个横向极化矢量。在上式中我们省略了夸克的味指标并忽略了夸克质量。干涉项是图 8.10 中的振幅与由它交换 $k_i$ 和 $k_j$ 而得到的振幅的乘积。我们将在领头对数近似下计算式(8.80)。

令

$$p=(E,\mathbf{0};E)$$

并令 $\boldsymbol{p}_i$ 及 $\boldsymbol{k}_i$ 的纵向分量分别为

$$p_{iL}=z_ip_{i-1,L},\qquad k_{iL}=(1-z_i)p_{i-1,L}$$

因此有

$$p_i^2=p_{i-1}^2-2p_{i-1}\cdot k_i=p_{i-1}^2+2p_{i-1,0}\omega_i-2\mid\boldsymbol{p}_{i-1}\mid\omega_i\cos\theta_i$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}^3k_i}{2\omega_i}=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\frac{\omega_i^2\mathrm{d}\omega_i\mathrm{d}\cos\theta_i}{2\omega_i}\simeq\frac{1}{16\pi^2}\int\mathrm{d}z_i\mathrm{d}p_i^2 \tag{8.81}$$

对于物理的横向极化矢量

$$e_\mu^s e_\nu^{s*}=\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu^*+k_\mu^* k_\nu}{2\omega^2} \tag{8.82}$$

利用式(8.81)和(8.82)可将式(8.80)中与 $k_1$ 积分有关的因子写为

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}^3k_1}{2\omega_1}\not{p}_1\not{e}_1^s\frac{-\mathrm{i}\not{p}}{2E}\not{e}_1^{s*}\not{p}_1\frac{1}{(p_1^2)^2}$$

$$=-\frac{\mathrm{i}}{16\pi^2}\int\left\{2\not{k}_1+\frac{1}{2\omega_1^2}[\not{p}\not{k}_1^*(\not{p}-\not{k}_1)+(\not{p}-\not{k}_1)\not{k}_1^*\not{p}]\right\}\frac{1}{2E}\frac{\mathrm{d}p_1^2\mathrm{d}z_1}{p_1^2}$$

上式中对 $p_1^2$ 的积分在 $p_1^2=0$ 处的发散就是共线发散,它给出破坏标度性的对数因子。在领头对数近似下,在上式中的花括号内可取近似

$$k_1\simeq p(1-z_1)$$

$$p\cdot k_1^*=E\omega(1+\cos\theta_1)\simeq 2E\omega$$

这时上式简化为

$$\frac{1}{8\pi^2}\int\mathrm{d}z_1\frac{1+z_1^2}{1-z_1}\frac{\mathrm{d}p_1^2}{p_1^2}\frac{-\mathrm{i}\not{p}_1}{2E_1}$$

关于与辐射第二个胶子相联系的因子的计算是类似的,我们有

$$\left[\not{p}_2\not{e}_2^s\frac{-\mathrm{i}\not{p}_1}{2E_1}\not{e}_2^s\not{p}_2\right]\frac{1}{(p_2^2)^2}\simeq 2\frac{1+z_2^2}{1-z_2}\frac{1}{p_2^2}\frac{-\mathrm{i}\not{p}_2}{2E_2}$$

在上式中我们忽略了 $p_1^2$ 项,因为这样的项消掉了对 $p_1^2$ 积分的共线发散。如此递推,可以在领头对数近似下算出式(8.80)中的积分。考虑到运动学的限制

$$-p_1^2\leqslant-p_2^2\leqslant\cdots\leqslant-p_n^2\leqslant q^2$$

我们得到如下形式的公式

$$\begin{aligned}\sigma_N(q,p)&=\prod_{i=1}^{N}\frac{g^2C_2(F)}{8\pi^2}\int_{m^2}^{|p_{i+1}^2|}\frac{\mathrm{d}|p_i^2|}{|p_i^2|}\mathrm{d}z_i\frac{1+z_i^2}{1-z_i}\cdot\sigma_0\left(q,\prod_{i=1}^{N}z_ip\right)\\&=\frac{1}{N!}\left(\frac{g^2}{8\pi^2}C_2(F)\int_{m^2}^{q^2}\frac{\mathrm{d}|p_i^2|}{|p_i^2|}\right)^N\prod_{i=1}^{N}\int_0^1\mathrm{d}z_i\frac{1+z_i^2}{1-z_i}\cdot\sigma_0\left(q,\prod_{i=1}^{N}z_ip\right)\end{aligned} \tag{8.83}$$

其中,$\sigma_0$ 是部分子模型中的截面。

在式(8.83)中我们已忽略了干涉项,仔细的研究表明这样的项在领头对数近似下没有贡献。这是因为先放 $k_1$ 光子的振幅与后放 $k_1$ 光子的振幅的干涉项在分

母上只有一个$(p-k_1)^2$因子，在对$k_1$积分时不再有共线发散。这样的论证也可以用到对$k_2,k_3,\cdots$的积分。需要强调的是这里的计算是用物理的横向极化矢量$e_1^s$做的，如8.2节指出的，这时振幅的分子上有$\sim\sin\theta_1$的因子。如果我们利用全部图形(包括出射夸克放胶子图)的规范不变性把非物理的纵向极化方向也放进去，这时$e_1^s\cdots e_1^s$换成了$\gamma_\mu\cdots\gamma_\mu$，入射夸克线放胶子的图与出射夸克线放胶子图的干涉项不再能忽略，因为这时我们失去了分子上的$\sin\theta_1$因子，而

$$\int\frac{\mathrm{d}^3k_1}{(p-k_1)^2}\sim\int\frac{\sin\theta_1\mathrm{d}\theta_1}{\theta_1^2}$$

是共线发散的。

式(8.83)是由图8.10所表示的一类图形得到的。我们来考虑其他图形的贡献。对虚胶子辐射修正的贡献用物理规范来计算比较方便。所谓物理规范的含义是，胶子传播子在质壳上只包含两个横向极化的传播，例如轴规范$n_\mu A_\mu=0$($n_\mu$是类空矢量)就是一种物理规范。仔细研究表明，在取物理规范时，在领头对数近似内只需考虑自能和顶角的修正，其他的虚胶子修正都可以忽略。例如，图8.11所代表的振幅在分母上只有一个$(p-k)^2$因子而在传播的虚光子有横向极化时第一个顶点上有因子$\sin\theta$，不难证明它对截面的贡献少了一个对数因子。

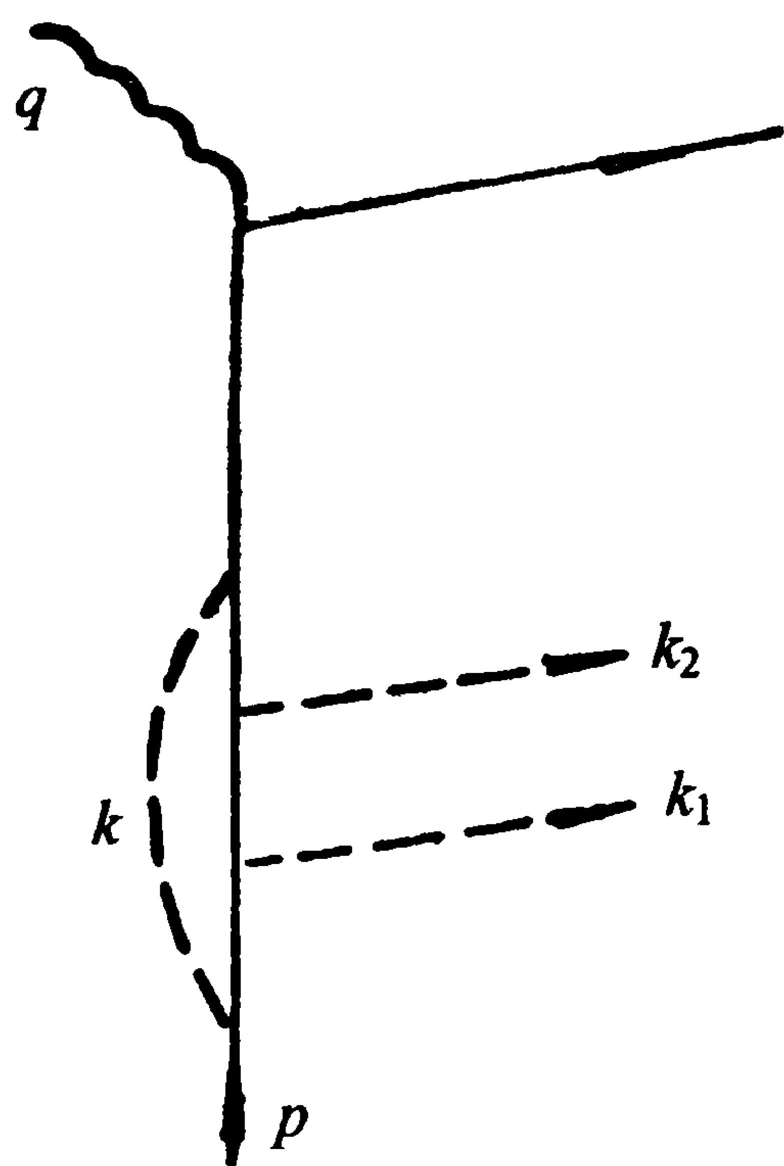



图8.11

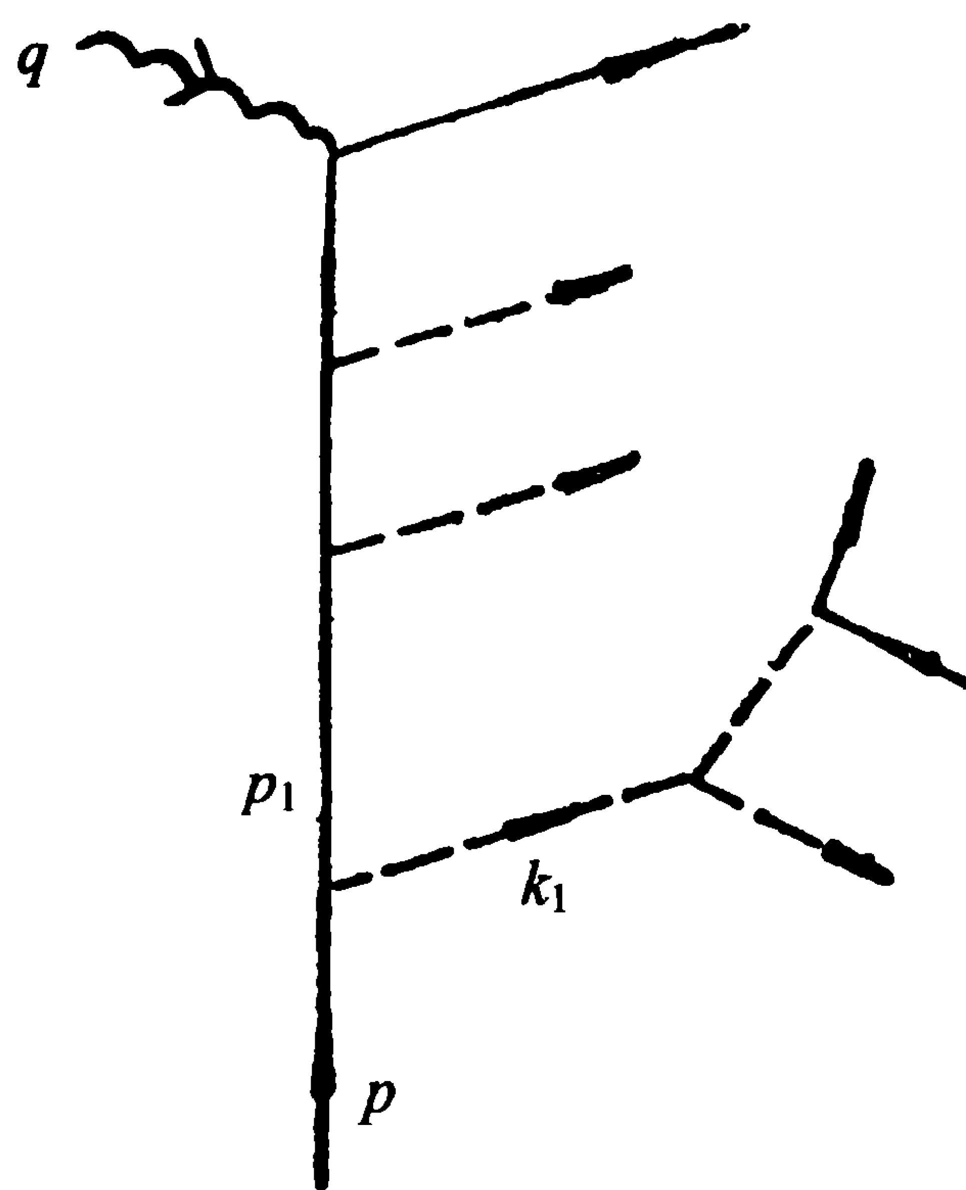



图8.12

式(8.83)还没有考虑辐射的胶子脱离质壳的情况，脱离质壳的胶子可以进一步分裂为一些胶子和夸克-反夸克对，例如图8.12所表示的情况。只有在$|k_1^2|\ll q^2$时图8.12的截面在对$\int\mathrm{d}^3k_1$积分时才有反映共线发散的对数因子，因此可以相对于$q^2$忽略$k_1^2$。在用物理规范时，$k_1$传播子可以看作只有横极化胶子的传播，在领头对数近似下，干涉项仍然可以忽略。因此，这个图对截面的贡献等于式(8.83)乘一个因子，这个因子正是$k_1$传播子自能修正的虚部。

式(8.83)中对 $z_i$ 的积分在 $z_i=1$ 处发散。这个发散就是红外发散。在考虑了自能和顶角修正后红外发散应当消去。

我们不在这里详细讨论自能和顶角修正及胶子分裂的修正。在文献[10]中证明了在轴规范下和领头对数近似内，顶角 $\Lambda_{\mu_i}(p_i,p_{i-1})$ 与传播子 $S'_F(p_i)$ 的辐射修正互相抵消，考虑 $k_i$ 胶子分裂和胶子传播子修正的效果是把式(8.83)中的 $g^2$ 换为有效耦合常数 $g^2(-p_i^2)$，剩下的虚胶子修正只是夸克外线传播子 $p$ 的重整化因子 $Z_2$。重整化常数 $Z_2$ 也可以在领头对数近似下计算。但是，在文献[11]中用了如下的简便方法考虑虚胶子的修正。在式(8.83)中做替换

$$C_2(F)\frac{1+z_i^2}{1-z_i}\to P(z_i)=C_2(F)\cdot\left[\frac{(1+z_i^2)}{(1-z_i)_+}+c\delta(1-z_i)\right] \tag{8.84}$$

其中，分布 $\frac{1}{(1-z_i)_+}$ 由下式定义

$$\int_0^1\frac{1}{(1-z_i)_+}f(z_i)\mathrm{d}z_i=\int_0^1\frac{f(z_i)-f(1)}{1-z_i}\mathrm{d}z_i \tag{8.85}$$

上式代表虚胶子修正抵消了实胶子辐射的红外发散。由下面的式(8.91)定出式(8.84)中的常数 $c=\frac{3}{2}$。

对式(8.83)做上述修改并对 $N$ 求和后得到夸克的深度非弹性单举截面

$$\sigma(q,p)=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}\left(\frac{1}{2\pi}\xi(q^2)\right)^N\prod_{i=1}^{N}\int\mathrm{d}z_iP(z_i)\sigma_0\left(q,\prod_{i=1}^{N}z_ip\right) \tag{8.86}$$

其中

$$\xi(q^2)=\int_{m^2}^{q^2}\frac{\alpha_s(p_i^2)}{|p_i^2|}\mathrm{d}|p_i^2| \tag{8.87}$$

式(8.86)说明，共线发散在卷积形式下是因子化的。

令 $P$ 为强子的动量，$p=yP$，则强子的深度非弹截面为

$$\int\rho(y)\sigma(q,yP)\mathrm{d}y=\int\rho(x,q^2)\sigma_0(q,xP)\mathrm{d}x \tag{8.88}$$

其中

$$\rho(x,q^2)=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}\left(\frac{1}{2\pi}\xi(q^2)\right)^N\int\mathrm{d}y\rho(y)\prod_{i=1}^{N}\mathrm{d}z_iP(z_i)\delta\left(x-\prod_{i=1}^{N}z_iy\right) \tag{8.89}$$

以上结果的物理意义是明显的，由于辐射近似共线的胶子，强子中的夸克减少了它的动量，其效果是以一个有效的夸克分布函数 $\rho(x,q^2)$ 代替 $\rho(x)$。$\rho(x,q^2)$ 是与过程无关的，式(8.88)对具体过程的依赖关系都包含在部分子模型截面 $\sigma_0$ 中。

由以上讨论可以看到,由于在领头对数近似内干涉项可以忽略,且虚胶子的效应可以只限于顶角和自能修正,部分子的分裂过程类似于级联簇射过程,在簇射中的每一次分裂都可看作是以一定概率独立发生的。直观上,用虚光子探测时分辨率依赖于 $q^2$,用虚光子看到的分裂概率与 $q^2$ 有关,由式(8.89)看到,它等于 $\frac{1}{2\pi}\xi(q^2)\times P(z)$。这正是文献[11]所用的物理图像。令 $t=\frac{1}{2}\ln q^2/\mu^2$,微分式(8.89)可以得到 Altarelli-Parisi 方程

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}=\frac{\alpha_s(t)}{2\pi}\int_0^1\frac{\mathrm{d}z}{z}P(z)\rho(z^{-1}x,t) \tag{8.90}$$

它描述 $\rho(x,q^2)$ 随 $q^2$ 的演化。式(8.90)的物理意义是这样的,虚光子的 $q^2$ 愈大,分辨本领就愈高,能看到的夸克的动量就愈小。$\frac{\alpha_s(t)}{2\pi}P(z)$ 是在 $2t$ 增加一个单位时,在原来动量为 $p$ 的夸克中发现一个动量为 $zp$ 的夸克的概率密度(到 $\alpha_s$ 阶)。

由于夸克数减反夸克数是守恒的

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1\rho(x,t)\mathrm{d}x=0$$

由式(8.90)得到

$$\int_0^1 P(z)\mathrm{d}z=0 \tag{8.91}$$

由式(8.90)得到味非单态结构函数 $F_2(x,q^2)=x\rho(x,q^2)$ 的矩 $M_s(q^2)=\int_0^1 x^{s-1}\rho(x,q^2)\mathrm{d}x$ 所满足的方程

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M_s(t)=\frac{\alpha_s(t)}{2\pi}A_sM_s(t) \tag{8.92}$$

其中

$$A_s=\int_0^1\mathrm{d}z\cdot z^{s-1}P(z) \tag{8.93}$$

解式(8.92)得到

$$M_s(t)=M_s(t_0)\exp\left(\frac{A_s}{\pi}\int_{t_0}^t\alpha_s(t')\mathrm{d}t'\right)\sim M_s(t_0)(t/t_0)^{-A_s/8\pi^2b_0} \tag{8.94}$$

上式也可以直接由式(8.89)得到。利用公式

$$\int_0^1\mathrm{d}z\,\frac{z^{m-1}}{(1-z)_+}\equiv\int_0^1\mathrm{d}z\,\frac{z^{m-1}-1}{1-z}=-\sum_{j=1}^{m-1}\int_0^1\mathrm{d}z\cdot z^j=-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{j} \tag{8.95}$$

可以由式(8.93)得到

$$A_s = C_2(F)\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{s(s+1)}-2\sum_{j=2}^{s}\frac{1}{j}\right] \tag{8.96}$$

与第七章式(7.229)比较得

$$A_s = -8\pi^2\tilde{\gamma}_{s0} \tag{8.97}$$

式(8.94)及(8.97)与由算符乘积展开及重整化群方程得到的第七章式(7.213)完全一样，表明微扰论领头对数近似与重整化群方程的 $\bar{g}^2(t)$ 最低阶近似在这里是一样的。

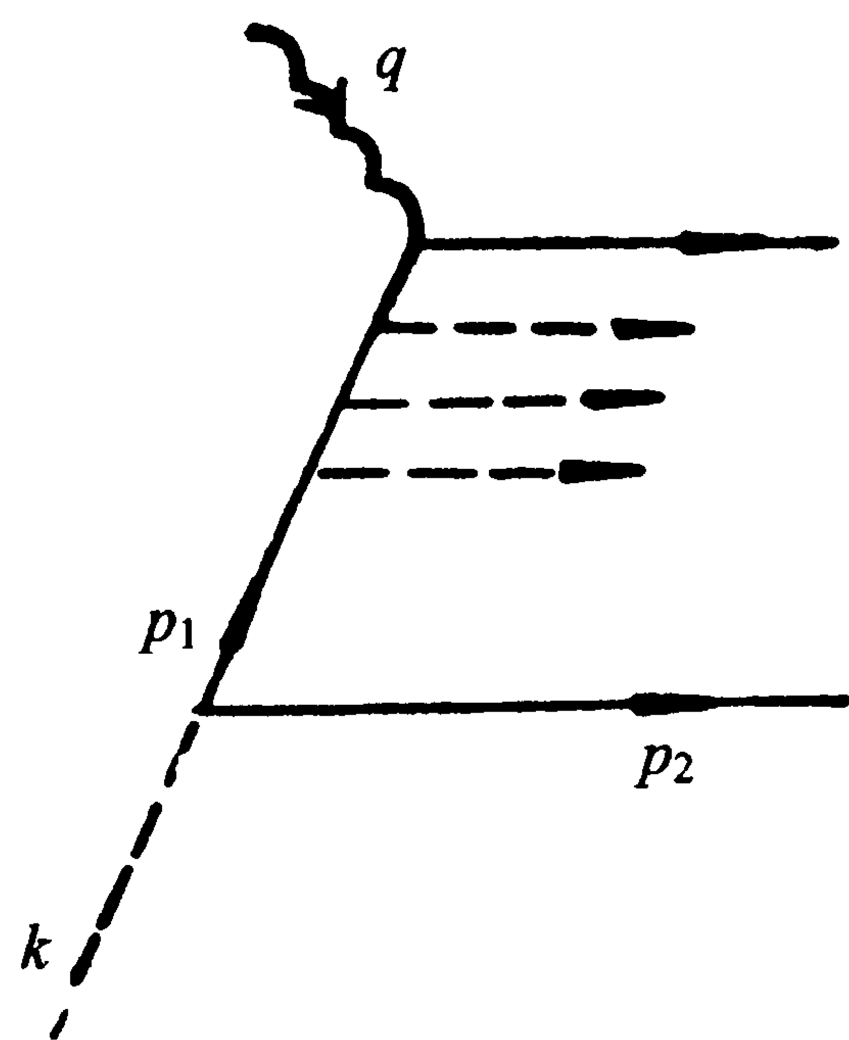



图 8.13

对于深度非弹性截面的 $SU(N)_F$ 单态部分，还需要考虑胶子的贡献，因为胶子可以转化为夸克-反夸克对然后夸克或反夸克再与虚光子作用，如图 8.13 所示。由于胶子是 $SU(N)_F$ 单态，这类图形对 $SU(N)_F$ 非单态部分没有贡献。因此，在 $SU(N)_F$ 单态的情况下，除了需要引进有效的夸克分布函数 $\rho^i(x,q^2)$（$i$ 是味指标)，还必须引进有效的胶子分布函数 $\rho^G(x,q^2)$。这时 Altarelli-Parisi 方程推广为

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\rho^i(x,t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi}\int_0^1\frac{\mathrm{d}z}{z}\left[\rho^i\left(\frac{x}{z},t\right)\cdot P_{qq}(z)+\rho^G\left(\frac{x}{z},t\right)P_{qG}(z)\right]$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\rho^G(x,t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi}\int_0^1\frac{\mathrm{d}z}{z}\left[\sum_{i=1}^{2f}\rho^i\left(\frac{x}{z},t\right)\cdot P_{Gq}(z)+\rho^G\left(\frac{x}{z},t\right)P_{GG}(z)\right] \tag{8.98}$$

上式中对 $i$ 的求和遍及各种味的夸克与反夸克，$f$ 是参与作用的夸克的味的种类数。$\frac{\alpha_s(t)}{\pi}P_{BA}(z)$代表 $\Delta t=1$ 时在原来一个动量为 $p$ 的 $A$ 粒子中发现一个动量为 $zp$ 的 $B$ 粒子的概率密度(到 $\alpha_s$ 阶)。上式已经考虑了以下的事实，由于量子色动力学中作用与味无关，显然有

$$P_{ii'} = \delta_{ii'}P_{qq} = \delta_{ii'}P(z) \tag{8.99}$$

$P(z)$由式(8.84)表示

$$\left.\begin{aligned} P_{Gi} &= P_{Gq} \\ P_{iG} &= P_{qG} \end{aligned}\right\} \quad 与\ i\ 无关 \tag{8.100}$$

由式(8.98)可以得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{2f}\rho^i(x,t) = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi}\int\frac{\mathrm{d}z}{z}$$

$$\cdot\left[\sum_{i=1}^{2f}\rho^{i}(z^{-1}x,t)P_{qq}(z)+2f\rho^{G}(z^{-1}x,t)\cdot P_{qG}(z)\right]\tag{8.101}$$

由在每个三线顶点上的动量守恒可以得到关系式

$$\left.\begin{aligned}P_{qq}(z)&=P_{Gq}(1-z)\\P_{qG}(z)&=P_{qG}(1-z)\\P_{GG}(z)&=P_{GG}(1-z)\end{aligned}\right\}\quad z<1\tag{8.102}$$

例如，当一个夸克分裂产生一个动量比为 $z$ 的夸克时，放出胶子的动量比必然是 $1-z$。但是在 $z=1$ 处，由于有虚胶子修正的 $\delta(1-z)$项，以上关系不成立。然而，由所有部分子的动量和守恒

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1\mathrm{d}x\cdot x\left[\sum_{i=1}^{2f}\rho^{i}(x,t)+\rho^{G}(x,t)\right]=0$$

及(8.101)、(8.98)两式可得

$$\int_0^1\mathrm{d}z\cdot z[P_{qq}(z)+P_{Gq}(z)]=0\tag{8.103}$$

$$\int_0^1\mathrm{d}z\cdot z[2fP_{qG}(z)+P_{GG}(z)]=0\tag{8.104}$$

由(8.102)中的第一式得到

$$P_{Gq}(z)=C_2(F)\frac{1+(1-z)^2}{2}\tag{8.105}$$

$P_{qG}(z)$可以由图 8.13 进行计算，类似于前面对 $P_{qq}$ 的计算，振幅平方中相应于 $k$，$p_1$，$p_2$ 的因子为

$$g^2(p_1^2)\frac{1}{(p_1^2)^2}\not{p}_1\gamma_\mu(-\mathrm{i}\not{p}_2)\gamma_\nu\not{p}_1\cdot\frac{1}{2}e_\mu^{*s}e_\nu^{s}\frac{1}{2\omega}$$

$$=p_1^{-2}\frac{-\mathrm{i}\not{p}_1}{2E_1}2g^2(p_1^2)\cdot P(z)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}^3p_2}{2E_2}=\frac{1}{16\pi^2}\int\mathrm{d}z\mathrm{d}p_1^2$$

由此得到

$$P_{qG}(z)=\frac{1}{2}[z^2+(1-z)^2]\tag{8.106}$$

上式满足(8.102)中的第二式。

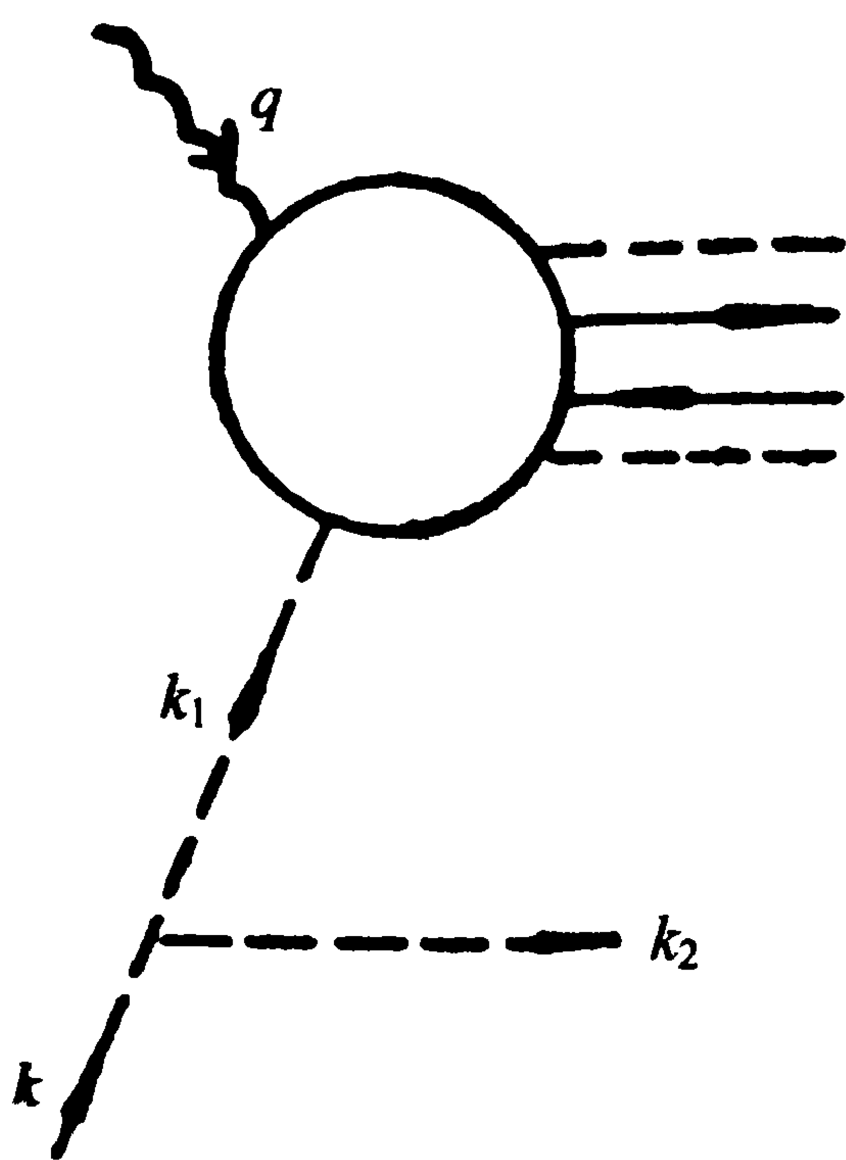


图 8.14

$P_{GG}(z)$可以由图 8.14 计算。由 Ward 恒等式知道，当所有外线的粒子都在质壳上并有物理的极化时，内线传播子的纵向极化部分没有贡献。因此我们可以

把内线 $k_1$ 的传播子改写为

$$\frac{1}{k_1^2}\left[\delta_{\mu\nu}-\frac{k_{1\mu}^*k_{1\nu}+k_{1\mu}k_{1\nu}^*}{2\omega_1^2}\right]$$

上式在 $\omega_1^2\gg k_1^2$ 时近似等于

$$\frac{1}{k_1^2}e_{1\mu}^s e_{1\nu}^{*s}$$

这样,图中的三线顶点可写为

$$V_{G\to GG}=-f_{abc}\{-[(k_1+k)\cdot e_2](e_1\cdot e)+[(k-k_2)\cdot e_1](e\cdot e_2)+[(k_1+k_2)\cdot e](e_1\cdot e_2)\}$$

对胶子极化求和及平均后,得

$$\frac{1}{2\omega}\frac{1}{2}\sum_{\text{极化}}|V_{G\to GG}|^2=4C_2(G)k_1^2\cdot\left[\frac{1-z}{z}+\frac{z}{1-z}+z(1-z)\right]\cdot\frac{1}{2\omega_1}$$

上式在对 $z$ 积分时在 $z=1$ 处有红外发散。在考虑虚胶子的自能和顶角修正后,红外发散被消除了。如同在计算 $P_{qq}(z)$ 时一样,虚胶子的贡献可以用把 $\frac{1}{1-z}$ 换为 $\frac{1}{(1-z)_+}$ 并引入一个正比于 $\delta(1-z)$ 的项来包括。$\delta(1-z)$ 项的系数可以由式(8.104)定出来,这样就得到

$$P_{GG}(z)=2C_2(G)\left[\frac{z}{(1-z)_+}+\frac{1-z}{z}+z(1-z)+\left(\frac{11}{12}-\frac{1}{3}\frac{T(F)}{C_2(G)}\right)\cdot\delta(z-1)\right]\tag{8.107}$$

上式满足(8.102)中的第三式,对于量子色动力学,$T(F)=\frac{f}{2}$。

令

$$M_s^S(t)=\int_0^1\mathrm{d}x\cdot x^{s-1}\sum_{i=1}^{2f}\rho^i(x,t)$$

$$M_s^G(t)=\int_0^1\mathrm{d}x\cdot x^{s-1}\rho^G(x,t)$$

由式(8.98)及(8.101)得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M_s^S(t)=\frac{\alpha_s(t)}{\pi}[A_s^{qq}M_s^S(t)+2fA_s^{qG}M_s^G(t)]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M_s^G(t)=\frac{\alpha_s(t)}{\pi}[A_s^{Gq}M_s^S(t)+A_s^{GG}M_s^G(t)]\tag{8.108}$$

其中

$$A_s^{ba} = \int_0^1 dz \cdot z^{s-1} P_{ba}(z) \tag{8.109}$$

利用式(8.95)可得

$$A_s^{Gq} = C_2(F)\frac{2+s+s^2}{s(s^2-1)}$$

$$A_s^{qG} = \frac{2+s+s^2}{2s(s+1)(s+2)}$$

$$A_s^{GG} = C_2(G)\left[-\frac{1}{6}+\frac{2}{s(s-1)}+\frac{2}{(s+1)(s+2)}-2\sum_{j=2}^{s}\frac{1}{j}-\frac{1}{3}\frac{f}{C_2(G)}\right] \tag{8.110}$$

令 $-8\pi^2\tilde{\gamma}_{s,0}^{\pm}$ 为矩阵

$$\begin{vmatrix} A_s^{qq} & 2fA_s^{qG} \\ A_s^{Gq} & A_s^{GG} \end{vmatrix}$$

的两个本征值，则由联立方程式(8.108)得到

$$M_s^s(t) \simeq \sum_{a=\pm} M_s^a(t_0)\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\tilde{\gamma}_{s,0}^a/2b_0} \tag{8.111}$$

上式与重整化群方程的结果一致。

由本节的结果很容易理解量子色动力学中标度性破坏的特点。随着 $q^2$ 增大，价夸克辐射更多的共线胶子而减少它的动量，因此价夸克分布函数向 $x$ 小的方向移动，但保持 $\int_0^1 \rho^{N_s}(x,t)dx$ 不变。同时由于 $q^2$ 增大，更多的胶子分裂为共线夸克-反夸克对，海夸克对数将增加。这两个效应都是使 $x$ 小处的结构函数增加。

本节所用的方法除了有比较具体和直观的优点外，还能推广到其他一些算符乘积展开方法不能应用的过程。这一点将在下一节中讨论。

## 8.4 QCD 微扰论对各种过程的应用、因子化定理

在前两节中讨论的 $e^+ + e^- \to$ 喷注及深度非弹性过程是用 QCD 微扰论研究过的最简单的过程。还有其他一些研究过的过程，如

$$\gamma^* + \gamma \to X \tag{8.112}$$

$$e^+ + e^- \to h + X \tag{8.113}$$

$$e^- + P \to e^- + h + X \tag{8.114}$$

$$P + \bar{P} \to \gamma^* + X \to \mu^+ + \mu^- + X \tag{8.115}$$

$$P+\bar{P}\to W(Z)+X \tag{8.116}$$

$$\Upsilon\to 3g\to 3\text{ 喷注}$$

$$\Upsilon\to 2g+\gamma\to 2\text{ 喷注}+\gamma \tag{8.117}$$

$$P+\bar{P}\to \text{喷注}+X \tag{8.118}$$

在上面这几个公式中，$h$ 代表一个测量了动量的大横动量强子，$X$ 代表没有测量的强子，$\gamma^*$ 代表远离质壳的虚光子。过程式(8.112)是一个远离质壳的类空虚光子 $\gamma^*$ 与接近质壳的虚光子 $\gamma$ 的散射。$\gamma$ 可以转化为夸克-反夸克对。在这个过程中光子 $\gamma$ 代替了核子作为深度非弹性过程中的靶。过程式(8.116)是 $P\bar{P}$ 对撞产生传递弱作用的中间 Bose 子 $W$ 或 $Z$。过程式(8.117)中 $\Upsilon$ 是一个质量约为 10GeV 的矢量介子，它是由重夸克 $b$ 和其反粒子 $\bar{b}$ 组成的束缚态。这是一个重介子的强衰变过程。过程式(8.118)是两个高能强子碰撞产生喷注的过程。

在上述的过程中始态和末态中有一些具有确定动量的强子(或与夸克-反夸克对耦合的虚光子)。在把 QCD 微扰论用于这些过程时，都需要计算始态和末态中具有确定动量的夸克或胶子的过程，这些粒子的动量 $p_i$ 与它们所属的强子的动量 $P_i$ 近似平行。当所有的 $p_i\cdot p_j\,(i\neq j)$ 都很大时，QCD 有效耦合常数很小，有可能用微扰论研究。特别简单的是所有 $p_i\cdot p_j$ 都有相同的量级的情况，$O(p_i\cdot p_j)\equiv O(q^2)$。这时如果用 $\alpha_s(q^2)$ 展开，微扰论公式中可能出现的大因子都是与红外发散或共线发散相联系的。在 8.3 节中对深度非弹性过程在领头对数近似下证明了的共线发散因子化可以推广为一个普遍的定理。这个定理的内容是[11,16]：对零级近似下可以用部分子模型计算的过程，在高能极限下 QCD 的截面中与每个具有确定动量的部分子(夸克或胶子)线相联系的共线发散项可以因子化。这个因子与具体过程无关，因此具有普适性。它可以与部分子在强子中的分布函数 $\rho(x)$ 或表征由末态部分子产生的末态强子的纵动量分布的碎裂函数 $D(z)\,(P_i=z_ip_i)$ 合并。因此在高能极限下 QCD 修正的总效果只是把 $\rho(x)$ 和 $D(z)$ 修正为一个与动量有关的函数 $\rho(x,q^2)$ 或 $D(z,q^2)$。$\rho_h^p(x,q^2)$ 和 $D_p^h(z,q^2)$ 只与强子 $h$ 和部分子 $p$ 的种类有关，与强子参加的过程无关。因此，高能量、大动量转移物理过程的截面被表为两个因子的卷积。一个因子描述各个强子中部分子间的长距离非微扰相互作用及其重整化群修正，它与过程无关；另一个因子描述部分子的短距离相互作用，可由微扰论的低阶计算。这个定理是 QCD 微扰论对各种过程的应用的基础。

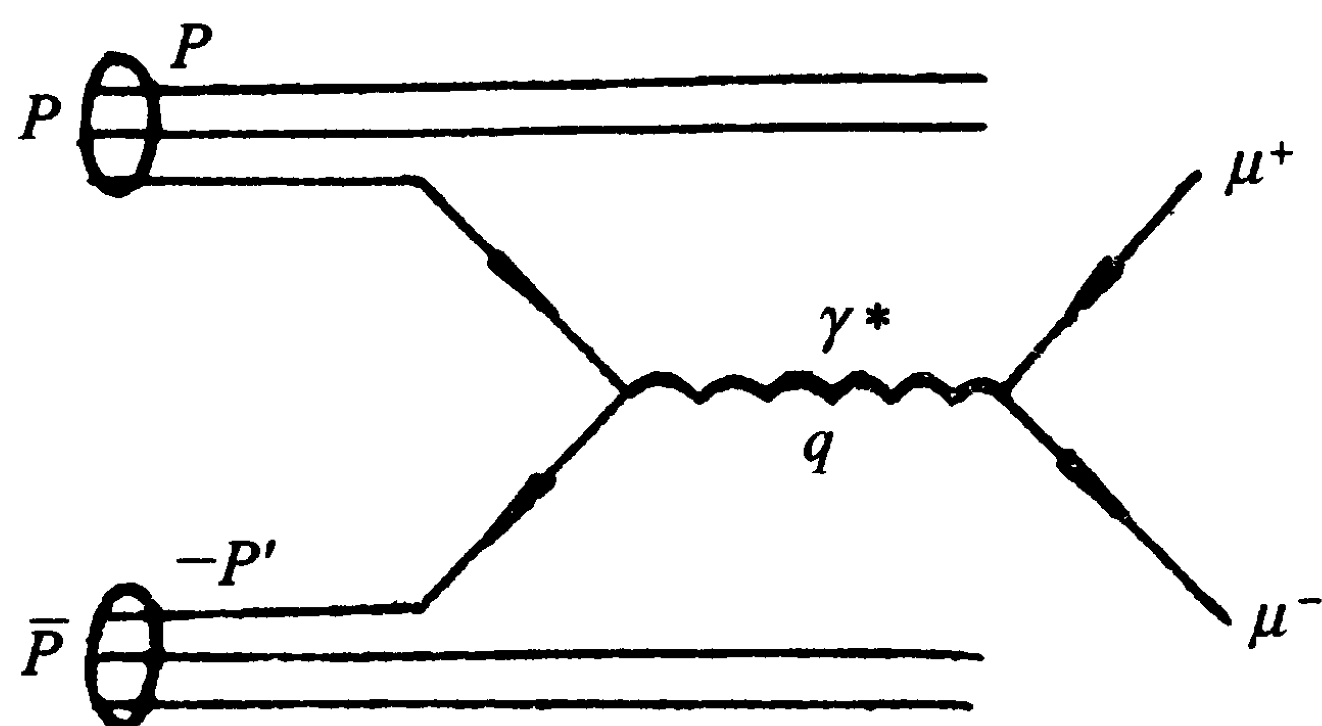



图 8.15

我们以过程式(8.115)为例说明因子化定理。这个过程称为 Drell-Yan (颜东茂)过

程。在部分子模型中它可以按图 8.15 计算,即质子中的一个夸克与反质子中的一个反夸克湮灭为虚光子 $\gamma^*$,然后转换为 $\mu^+\mu^-$ 对(为了简单,这里省略了海夸克的贡献)。令 $P$ 及 $P'$ 分别为质子和反质子的动量,$q$ 为虚光子的动量,$s=-(P+p')^2$。部分子模型的总截面为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\,|q^2|}=\frac{1}{3}\sum_{q=u,d}\int_0^1\mathrm{d}x_1\int_0^1\mathrm{d}x_2\,\delta(x_1x_2s-|q^2|)\rho_p^q(x_1)\rho_{\bar{p}}^{\bar{q}}(x_2)\sigma^{q\bar{q}\to\mu^+\mu^-}(q^2) \tag{8.119}$$

上式中,$\rho_p^q(x)$ 为质子中夸克 $q$ 的分布函数,$\rho_{\bar{p}}^{\bar{q}}$ 为反质子中反夸克 $\bar{q}$ 的分布函数。系数 $\frac{1}{3}$ 是由于夸克有三种色,而且只有互为共轭的夸克-反夸克对才能湮灭为光子。在部分子模型中忽略了强作用的修正,这时

$$\sigma^{q\bar{q}\to\mu^+\mu^-}(q^2)=\frac{4\pi\alpha^2}{-3q^2}Q_q^2\equiv\sigma_0^{q\bar{q}\to\mu^+\mu^-} \tag{8.120}$$

其中,$Q_q$ 为 $q$ 夸克的电荷。

在 QCD 计算中需要考虑始态中 $q$ 和 $\bar{q}$ 与胶子的作用。因此式(8.120)不再成立。这里遇到的第一个问题是红外发散。如前面已提到的,由于初态有两个夸克,即使在把末态存在软胶子的过程包括在内的 Bloch-Nordsiek 截面中,红外发散也不抵消[7]。但是文献[7]中的两圈图计算表明,剩余的红外发散项有一个 $O\left(\frac{m^4}{s^2}\right)$ 压低因子。在文献[13],[14]中给出了一般的论证,说明到微扰论任意阶 Drell-Yan 过程的红外发散有 $O\left(\frac{m^2}{s}\right)$ 的压低因子。由于在强子中夸克不是严格在质壳上的,这样的压低因子使我们可以不考虑红外发散项。第二个问题是质子中参与湮灭为光子过程的夸克 $q$ 与反质子中不参与湮灭为光子过程的一个旁观反夸克在湮灭发生以前可以交换低能胶子,这种作用可以改变 $q$ 的色,从而改变式(8.119)中的系数 $\frac{1}{3}$[15]。但是到二圈图的计算表明[16],这样的项在 $s\to\infty$ 的极限下消失。在文献[11]中给出因子化定理的一个证明。但是这个证明是不完全的,其中没有考虑到与上面提到的问题有关的一些复杂性。在文献[17]中给出了进一步的证明。按照文献[11]和[17]的结果,在 $|q^2|\to\infty$ 极限下 QCD 的截面为

$$\mathrm{d}\sigma^{q\bar{q}\to\mu^+\mu^-}(p,q)=\int\prod_{i=q,\bar{q}}\Gamma_i(z_i,q^2/m^2)\mathrm{d}z_i\cdot\mathrm{d}\sigma_0^{q\bar{q}\to\mu^+\mu^-}(z_ip_i,q) \tag{8.121}$$

其中,$\int\Gamma_i(z_i,q^2/m^2)\mathrm{d}z_i$ 为 $m^2\to0$ 时共线发散的因子,这个因子与夸克参加的过程无关。把 $\Gamma_i$ 合并到部分子的分布函数 $\rho^i(x)$ 中,同时注意到来自夸克-反夸克湮灭顶点动量守恒的 $\delta$ 函数应换为 $\delta(x_1z_1x_2z_2s-|q^2|)$,就得到 $|q^2|\to\infty$ 时

Drell-Yan 过程的 QCD 截面

$$\frac{\mathrm{d}\sigma^{p\bar{p}\to\mu^+\mu^-}}{\mathrm{d}|q^2|}=\frac{1}{3}\sum_q\int\mathrm{d}y_1\int\mathrm{d}y_2\delta(y_1y_2s-|q^2|)$$

$$\times\rho_p^q(y_1,q^2)\rho_{\bar{p}}^{\bar{q}}(y_2,q^2)\sigma_0^{q\bar{q}\to\mu^+\mu^-}(q^2)\qquad(8.122)$$

其中

$$\rho_p^q(y,q^2)=\int\rho_p^q(x)\Gamma(z,q^2/m^2)\delta(y-xz)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\qquad(8.123)$$

因此 QCD 截面与部分子模型截面的关系只是把 $\rho(x)$ 换为与 $q^2$ 有关的函数 $\rho(x,q^2)$。这里的 $\rho(x,q^2)$ 与深度非弹性过程中的 $\rho(x,q^2)$ 是同一函数。如在8.3节中所说明的，这个函数在领头对数近似下是可以在微扰论中计算的。除重整化修正因子外，式(8.122)相当于如图 8.16 的图形，图中虚线代表与 $p$ 或 $p'$ 共线的胶子。

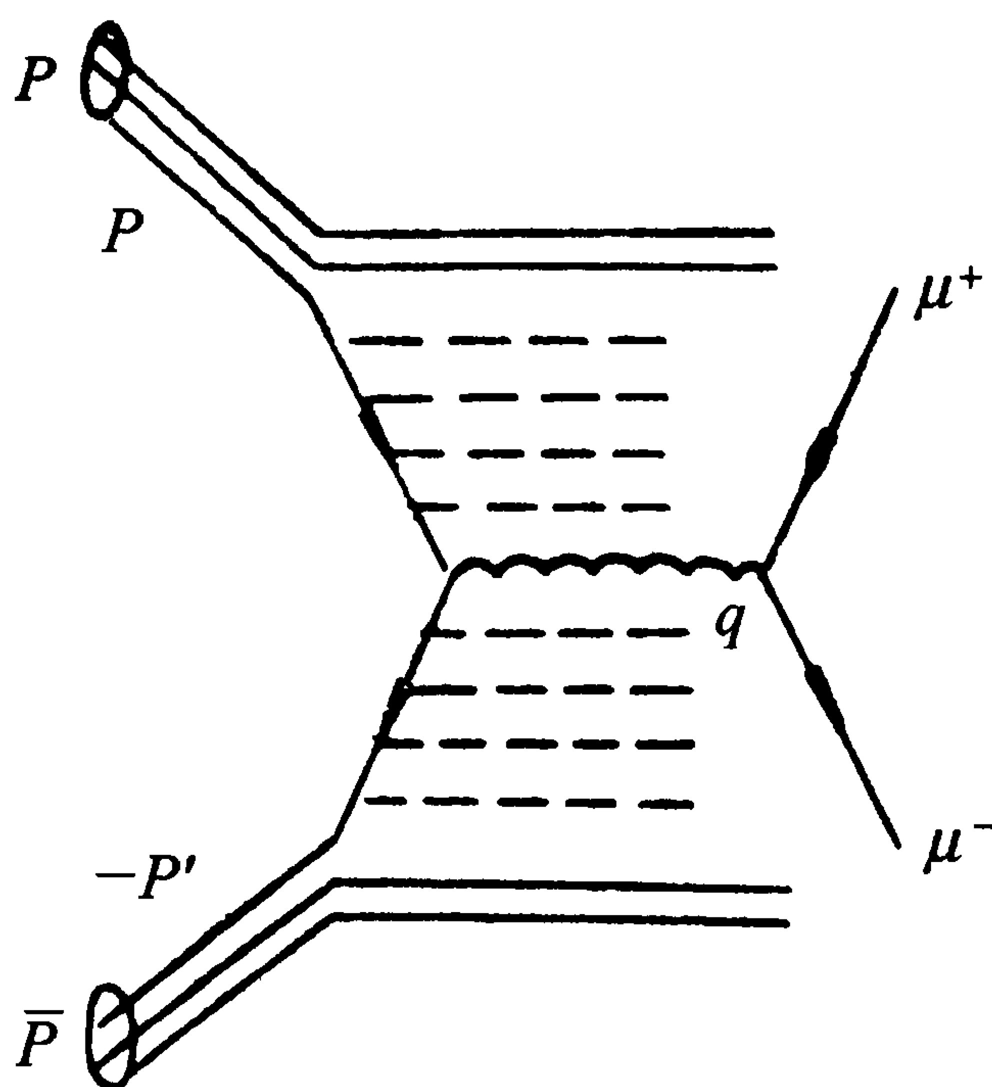



图 8.16

还可以考虑 Drell-Yan 过程中虚光子的横动量 $q_\perp$ 的分布，这是一个有两个能标的更复杂的问题，可参看文献[13]，[18]及[17]等。

在把 QCD 微扰论计算的截面与实验比较时常用第六章式(6.134)

$$g^2(\mu^2)=-\frac{1}{b_0\ln\frac{\mu^2}{\Lambda^2}}-\frac{b_1}{b_0^3}\frac{\ln\ln\mu^2/\Lambda^2}{\ln^2\mu^2/\Lambda^2}\qquad(8.124)$$

以 $\Lambda$ 作为理论的参数。微扰论的计算须在一定的重整化方案下进行。$g^2(\mu^2)$ 以及参数 $\Lambda$ 与重整化方案有关。在第五章中已经提到可以采取在欧氏动量区做减除或采取最小减除方案。最小减除方案有计算简便的优点。但为了方便和使微扰论级数比最小减除方案有较好的收敛性，通常用一种修改了的最小减除方案。在维数正规化的表示式中，对每个圈动量积分的发散项都来自因子 $(4\pi)^{-\frac{D}{2}}\Gamma\left(2-\frac{D}{2}\right)\sim\frac{1}{(4\pi)^2}\left(\frac{2}{\varepsilon}-\gamma+\ln4\pi\right)$，因此 $\frac{1}{\varepsilon}$ 极点项总是以 $\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{2}(\ln4\pi-\gamma)$ 的组合出现(这里 $\gamma$ 是 Euler 常数)。修改的最小减除方案是在减除 $\frac{1}{\varepsilon}$ 极点项的同时也减除掉后一项。这个减除方案仍保持与质量无关的特点，计算上也同样简便。最小减除方案下的参数 $\Lambda_{MS}$ 与修改的最小减除方案下的参数 $\Lambda_{\overline{MS}}$ 有关系

$$\Lambda_{\overline{MS}}=\Lambda_{MS}\exp\left[\frac{1}{2}(\ln4\pi-\gamma)\right]\qquad(8.125)$$

在高能量、大动量转移过程的 QCD 理论公式中，有效分布函数和碎裂函数 $\rho_h^p(x,q^2)$和 $D_p^h(z,q^2)$只与强子 $h$ 和部分子 $p$ 的种类有关，与强子参加的过程无关。它们对 $q^2$ 的依赖由重整化群方程决定，只依赖于参数 $\Lambda_{\overline{MS}}$；不同物理过程的截面公式中其余的因子是由微扰论低阶计算得到的。因此，我们可以由几个实验定出那些与过程无关的函数 $\rho_h^p(x,q^2)$和 $D_p^h(z,q^2)$在 $q^2=q_0^2$ 时的值，并调节 $\Lambda_{\overline{MS}}$值拟合截面对 $q^2$ 的曲线，由它们可以预言其他物理过程的截面及其对 $q^2$ 的依赖性。由于在现有实验的能量下，有效耦合常数 $\bar{g}^2(q^2)$还不够小，$\bar{g}^2(q^2)$的高阶项还不可忽略，同时$\frac{m^2}{q^2}$阶项在一些过程中也不可忽略。在考虑了 $\bar{g}^2$ 高一阶的次领头项并部分考虑高扭度项以后，大量的过程的理论计算与实验符合很好。在 10～200GeV 的能区内，实验定出的 $\Lambda_{\overline{MS}}$值约为 200MeV，这是 QCD 很大的成功。但也不时出现一些实验与理论的矛盾。因此，作出 QCD 微扰论是否精确地与实验符合的结论还有待于能量更高的实验和进一步的理论分析。

## 参 考 文 献


1 D R Yennie, S C Frautschi and H Surra. Ann of Phys. 1961, 13:379; G Grammer Jr and D R Yennie. Phys Rev. 1973, D18:4332

2 Y P Yao. Phys. Rev Lett. 1976, 36: 542; L Tyburscki. Phys Rev Lett. 1976, 37: 319; T Appelquist, J Carazzone, H Kluberg-Stern and M Roth. Phys Rev Lett. 1976, 36: 768; A Sugamoto. Phys Rev. 1977, D15:1065

3 吴泳时(Wu Yong-shi)，戴元本(Dai Yuan-ben). Scientia Sinica. 1976, 19:65; J Cornwall and G Tiktopoulos. Phys Rev. 1976, D13:3370; J Carazzone, E Poggio and H Quinn. Phys Rev. 1975, D11:1228; Phys Rev. 1975, D12:3368

4 J Frenkel, M-L Frenkel and J C Taylor. Nucl Phys. 1977, B124:268

5 T Kinoshita and A Ukawa. Phys Rev. 1977, D16:332

6 S B Libby and G Sterman. Phys Rev. 1979, D19:2468

7 R Doria, J Frenkel and J C Taylor. Nucl Phys. 1980, B168:93; J Frenkel, J G M Gatheral and J C Taylor. Nucl Phys. 1983, B228:529

8 T D Lee and M Nauenberg. Phys Rev. 1964, 133:1549; T Kinoshita. Jour Math Phys. 1962, 3: 1950

9 G Sterman and S Weinberg. Phys Rev Lett. 1977, 39:1436

10 D Amati, R Petronzio and G Veneziano. Nucl Phys. 1978, B140:54; Nucl phys. 1978, B146:29

11 E K Ellis, H Geogi, M Machack, H D Politzer and G G Ross. Nucl Phys. 1979, B152:285

12 G Altarelli and G Parisi. Nucl Phys. 1977, B126:298

13 Yu Dokshitzer, D Dyakonov and S Troyan. Phys Reports. 1980, 58, No5

14 J Frenkel, J G M Gatheral and J C Taylor. Nucl Phys. 1984, B233:307

15 G T Bodwin, S J Brodsky and G P Lepage. Phys Rev Lett. 1981, 47:1799

16 W W Lindsay, D A Ross and C T Sachrajda. Phys Lett. 1982, 117B: 105; Nucl Phys. 1983, B222: 189

17 J C Collins, D E Soper and G Sterman. Phys Lett. 1984, 134B: 263; G Bodwin. Phys Rev. 1985, D31: 2616

18 G Parisi and R Petronzio. Nucl Phys. 1979, B154: 427; G Altarelli, R K Ellis, M Greco and G Martinelli. CERN Preprint TH/3851, 1984

# 第九章　弱作用电磁作用统一规范理论

在物理学的发展历史中,电和磁曾经被认为是两种互相独立的作用。经过Faraday 和 Maxwell 等的研究,证明了电和磁是统一的电磁作用的两个方面。现在知道的自然界四种基本作用(强作用、电磁作用、弱作用和引力作用)之间是否也有某种内在联系可以统一描述呢? Einstein 等曾经致力于在经典物理的范围内建立引力作用和电磁作用的统一理论,但是没有成功。在规范场理论发展起来后提出了弱作用和电磁作用的统一理论。这个理论已经取得很大的成就,这是粒子物理中近年来最重要的发展之一。

在本章中,我们将首先回顾弱相互作用的唯象性理论,从分析它的成就和局限性可以比较自然地导致弱电统一规范理论的思想,然后再叙述弱电统一规范理论的基本概念,着重讨论在与实验的符合上相当成功的 Weinberg-Salam 模型并简略地叙述这个理论与实验比较的结果。Weinberg-Salam 模型的成就和强作用理论中SU(3)色规范理论的发展促使人们考虑包括强、电、弱三种相互作用甚至也包括引力作用在内的大统一理论。这方向已经有不少尝试,将在第十一章中讨论它们。

## 9.1　弱相互作用的现象性理论

### 9.1.1　弱作用的流-流耦合理论

由 Feynman、Gell-Mann 和 Cabbibo 等发展起来的 V-A 型流-流耦合理论是弱作用的一系列实验和理论研究的结果。这方面的详细讨论可参看文献[1],[2],文献[3]是一篇较新的评述。在这个理论中弱相互作用由如下的拉氏函数密度描述

$$\mathscr{L}_{\text{int}} = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{\mathscr{J}}_\mu \mathscr{J}_\mu \tag{9.1}$$

其中,$G$ 是 Fermi 弱相互作用常数

$$\bar{\mathscr{J}}_\mu = \pm \mathscr{J}_\mu^\dagger \qquad \mu = 1,2,3,4$$

$\mathscr{J}_\mu$是弱作用流,它包含轻子流 $j_\mu$ 和强子流$J_\mu$ 两个部分,$\mathscr{J}_\mu = 2\sqrt{2}(j_\mu + J_\mu)$。轻子流的形式为

$$j_\mu = \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathrm{i}[\bar{e}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu_e + \bar{\mu}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu_\mu] \tag{9.2}$$

这里,$e$,$\mu$,$\nu_e$ 和$\nu_\mu$ 分别为电子,$\mu$ 子,电子型中微子和 $\mu$ 子型中微子的场算符。

由式(9.1)和(9.2)算出 $\mu$ 子衰变概率

$$\Gamma(\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu) = \frac{G^2 m_\mu^5}{192\pi^3}$$

由 $\mu$ 衰变实验定出

$$G = 1.17 \times 10^{-5}\text{GeV}^{-2} \simeq 10^{-5} m_p^{-2} \tag{9.3}$$

强子流的形式为

$$\begin{aligned} J_\mu &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathrm{i}(\bar{d}\cos\theta_c + \bar{s}\sin\theta_c)\gamma_\mu(1+\gamma_5)u \\ &= \cos\theta_c(V_\mu^{\Delta s=0} + A_\mu^{\Delta s=0}) + \sin\theta_c(V_\mu^{\Delta s=1} + A_\mu^{\Delta s=1}) \end{aligned} \tag{9.4}$$

其中，$\theta_c$ 是一个常数，称为 Cabbibo 角。$u, d, s$ 代表三种层子的场算符。$V_\mu, A_\mu$ 代表 $\gamma_\mu$ 和 $\gamma_\mu\gamma_5$ 部分。采用夸克模型，$u, d$ 两种夸克的电荷分别为 $\frac{2}{3}e$ 及 $-\frac{1}{3}e$，奇异数为 0，它们组成一个强作用同位旋 SU(2)二重态。$s$ 夸克的电荷为 $-\frac{1}{3}e$，奇异数为 $-1$，是强作用同位旋单态。由式(9.3)和(9.4)可以看到，$j_\mu$ 和 $J_\mu$ 都使电荷改变一个单位($\Delta Q=1$)，因此称为带电流。强子流 $J_\mu$ 有一个不改变奇异数的部分($\Delta s=0$)和一个改变奇异数的部分，后者满足 $\Delta s=\Delta Q=1$ 的经验规律。

这个理论概括了弱相互作用的一些经验规律，其中我们特别指出以下几点：

(1) 弱作用流是 $V_\mu - A_\mu$ 左手矢量。

(2) $\mu$ 和 $e$ 的普适性。如果我们在式(9.3)中 $\bar{e}\nu_e$ 项之前乘一个系数 $\alpha$，则由 $\pi \to e\nu_e$ 和 $\pi \to \mu\nu_\mu$ 两过程的实验结果得到

$$|1-\alpha| \lesssim O(10^{-3})$$

(3) 强子弱作用流 $J_\mu$ 及 $\bar{J}_\mu$ 的 $\Delta s=0$ 矢量流部分分别正比于

$$V_\mu^{\Delta s=0} = \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{2}}(\bar{u}, \bar{d})\gamma_\mu\tau_- \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

$$\bar{V}_\mu^{\Delta s=0} = \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{2}}(\bar{u}, \bar{d})\gamma_\mu\tau_+ \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

$u, d$ 夸克的电磁流可以写为

$$J_\mu^{\text{em}} = \mathrm{i}(\bar{u}, \bar{d})\gamma_\mu\left(\frac{\tau_3}{2} + \frac{1}{6}\right)\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

因此 $V_\mu^{\Delta s=0}$，$(V_\mu^{\Delta s=0})^\dagger$ 和电磁流的同位旋矢量部分合起来组成一个同位旋矢量。由于强作用的同位旋 SU(2)不变性，由电磁流守恒 $\partial_\mu J_\mu^{\text{em}}=0$ 可以得到弱作用矢量流守恒

$$\partial_\mu V_\mu^{\Delta s=0} \tag{9.5}$$

考虑到强作用的同位旋空间转动不变性，$V_\mu^{\Delta s=0}$ 在质子与中子态之间的矩阵元为

$$\langle n \mid V_\mu^{\Delta s=0}(0) \mid p\rangle = \bar{u}(p_n)\left[\mathrm{i}\gamma_\mu F_1(q^2) + \frac{\mu_p - \mu_n}{4m}\sigma_{\mu\nu}q_\nu F_2(q^2)\right]u(p_p) \tag{9.6}$$

其中，$q = p_n - p_p$，$F_1$，$F_2$ 为核子电磁形状因子的同位旋矢量部分。$\mu_p$ 和 $\mu_n$ 是质子和中子的反常磁矩。这使我们可以精确地计算 $\beta$ 衰变过程的矢量流矩阵元。矢量流守恒已为吴剑雄等的实验所证实[1]。

(4) 由原子核的 $\beta$ 衰变定出

$$\cos^2\theta_c = 0.948 \pm 0.004 \tag{9.7}$$

由奇异粒子的衰变定出

$$\sin\theta_c = 0.230 \pm 0.003 \tag{9.8}$$

由式(9.7)和(9.8)两个实验值得到

$$\cos^2\theta_c + \sin^2\theta_c = 1.001 \pm 0.004$$

考虑到电磁辐射修正以后，$\cos^2\theta_c + \sin^2\theta_c = 1$ 在 1% 的误差范围内与实验符合[2]，因此强子的弱作用流与轻子的弱作用流近似有相同的“长度”。这是强子与轻子之间的 Cabbibo 普适性。

上述弱作用的流-流耦合理论取得很大的成功，它很好地给出 $\mu$ 子衰变、原子核的 $\beta$ 衰变以及 $\pi$ 介子和奇异粒子的半轻子衰变的实验结果。在奇异粒子的非轻子衰变方面，这个理论也取得一些成就。这方面的理论计算需要用到轴矢流部分守恒和流代数，可参看文献[4]。非轻子衰变中 $\Delta I = \frac{1}{2}$ 增加的经验规律不是这个理论的自然结果，也许要在强作用性质中寻找它的原因。

### 9.1.2 流-流耦合理论的困难，中间 Bose 子理论

流-流耦合的理论虽然取得很大的成功，但却有重要的缺陷。式(9.1)中的 Fermi 型相互作用是不可重整化的，不能用它计算微扰论高阶弱作用修正。原因是：Fermi 弱作用常数 $G$ 具有量纲 $M^{-2}$，由量纲的考虑，在 $G$ 的高阶项中被积函数必然包含阶数愈来愈高的内部线的动量。因此随着微扰论阶数的增高，发散度也愈高，不能通过有限个物理参数的重整化来消除。由于同样的原因，在用微扰论来计算流-流耦合理论中的散射截面 $\sigma$ 时得到的结果破坏幺正性[5]。这是因为，由于量纲的考虑，当质心系总能量 $\sqrt{s}$ 比外线粒子的质量 $m$ 大得很多时，必然有

$$\sigma \propto G^2 s$$

即截面按 $s$ 的一次幂趋于∞。

以 $\nu_\mu + e^- \to \nu_e + \mu^-$ 过程为例。当$\frac{\sqrt{s}}{m_\mu} \gg 1$ 时,由式(9.1)得到的微扰论最低阶的散射截面(对左旋的 $e^-$)为

$$\sigma = \frac{2G^2 s}{\pi} \tag{9.9}$$

另一方面,总角动量为 $j$ 的分波散射矩阵满足幺正性条件

$$\hat{T}^j = \frac{1}{\mathrm{i}}(\hat{S}^j - \hat{I}) \tag{9.10}$$

$$(\hat{S}^j)^\dagger(\hat{S}^j) = \hat{I} \tag{9.11}$$

其中,$\hat{I}$ 为单位矩阵。因此 $\hat{S}^j$ 和 $\hat{T}^j$ 的矩阵元满足条件

$$|\hat{S}^j_{mn}| \leqslant 1$$

$$|\hat{T}^j_{mn}| \leqslant 1, \qquad m \neq n \tag{9.12}$$

按照角动量的普遍理论,$a + b \to c + d$ 过程散射矩阵元可以按总角动量 $j$ 展开[6]

$$T_{\lambda_c\lambda_d;\lambda_a\lambda_b}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{p}\sum_j \left(j + \frac{1}{2}\right) T^j_{\lambda_c\lambda_d;\lambda_a\lambda_b}(p) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda-\mu)\phi} d^j_{\lambda\mu}(\theta) \tag{9.13}$$

其中,$\lambda_a, \lambda_b$ 及 $\lambda_c, \lambda_d$ 分别为始态及终态粒子的螺旋度,$\lambda = \lambda_c - \lambda_d$, $\mu = \lambda_a - \lambda_b$, $\boldsymbol{p}$ 为始态质心系动量,$p \equiv |\boldsymbol{p}|$。由于在 $\bar{\psi}\gamma_\mu(1 + \gamma_5)\psi$ 型的作用中参加作用的粒子都是左旋的(忽略粒子的质量),对 $\nu_\mu + e^- \to \nu_e + \mu^-$ 过程式(9.13)化为

$$T_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2};-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{p}) = \sum_j \frac{1}{p}\left(j + \frac{1}{2}\right) T^j_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2};-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(p) P_j(\cos\theta)$$

其中,$\theta$ 为散射角。又因为式(9.1)中的相互作用是点作用,散射振幅显然与 $\theta$ 无关,故上式中只有 $j = 0$ 的分波有贡献,即

$$T_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2};-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2p} T^0_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2};-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \tag{9.14}$$

$\nu_\mu + e^- \to \nu_e + \mu^-$ 过程的散射振幅是 $\hat{T}^0$ 矩阵的一个非对角元,它满足不等式(9.12)。因此散射截面 $\sigma$ 满足

$$\sigma = \int |T|^2 \mathrm{d}\Omega \simeq \frac{4\pi}{s} |T^0|^2 \leqslant \frac{4\pi}{s} \tag{9.15}$$

比较式(9.9)与(9.15)可以看出,当 $s > \frac{\sqrt{2}\pi}{G} = 4.2 \times 10^5 (\mathrm{GeV})^2$ 时,微扰论最低阶计算结果破坏幺正性。

由于上述原因,流-流耦合理论被认为是一个唯象性理论,式(9.1)只是一个在微扰论最低阶用来描述低能现象的有效拉氏作用量。

对流-流耦合理论的一个改进是中间 Bose 子理论。式(9.1)的形式使人们猜测,弱相互作用是由矢量 Bose 子传递的。在中间 Bose 子理论中,相互作用拉氏函数密度取为

$$\mathscr{L}_{\text{int}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} g(\mathscr{J}_\mu W_\mu + \mathscr{J}_\mu^\dagger W_\mu^\dagger) \tag{9.16}$$

其中,$\mathscr{J}_\mu$ 即是前面已写下的弱作用流,$W_\mu$ 是带电中间 Bose 子的场算符。以 $\nu_\mu + e^- \to \mu^- + \nu_e$ 散射过程为例,相当于图 9.1 的 Born 散射振幅为

$$-\mathrm{i}\frac{1}{8} g^2 \bar{\mu}(p_3)\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu_\mu(p_1) \cdot \bar{\nu}_e(p_4)\gamma_\mu(1+\gamma_5)e(p_2)\Delta_{\mu\nu}(k) \tag{9.17}$$

其中

$$-\mathrm{i}\Delta_{\mu\nu}(k) = (-\mathrm{i})\frac{\delta_{\mu\nu} + \dfrac{k_\mu k_\nu}{m_W^2}}{k^2 + m_W^2} \tag{9.18}$$

为中间 Bose 子的传播子,$m_W$ 为中间 Bose 子质量。$k = p_3 - p_1 = p_2 - p_4$ 为中间 Bose 子所带的动量。由 $\mathrm{i}\bar{\nu}_e(p_4)\gamma_\mu k_\mu e(p_2) = -m_e\bar{\nu}_e(p_4)e(p_2)$,$\mathrm{i}\bar{\mu}(p_3)\gamma_\mu k_\mu \nu_\mu(p_1) = -m_\mu\bar{\mu}(p_3)\nu_\mu(p_1)$可以知道,对 $\nu_\mu + e^- \to \nu_e + \mu^-$ 过程 $\Delta_{\mu\nu}$ 中的$\frac{k_\mu k_\nu}{m^2}$项在 $m_W^2 \gg m_\mu^2$ 时可以忽略。对低能现象 $k^2 \ll m_W^2$,式(9.12)可近似化为 Fermi 作用的形式。与流-流耦合理论比较得到

$$\frac{g^2}{8m_W^2} = \frac{G}{\sqrt{2}} \tag{9.19}$$

在高能下式(9.17)与流-流耦合理论相比较多一个压低因子$\frac{1}{k^2}$。这个因子大大地改善了截面的高能行为。但是对如下的过程

$$\nu + \bar{\nu} \to W^+ + W^-$$

按图 9.2 的计算,仍旧破坏幺正性。这个理论也是不可重整的。原因是,$\Delta_{\mu\nu}$ 中包含了有量纲的常数 $m_W^{-2}$ 的项$\frac{k_\mu k_\nu}{m_W^2}$,随着微扰论阶数的升高,这种项使得发散的阶数也升高。在与一个中性流耦合的中性矢量介子理论中,可以证明$\frac{k_\mu k_\nu}{m_W^2}$项的贡献为零。对于上述的带电中间 Bose 子理论。详细的研究证明,这样的项是不能消去的。因此单纯引入带电中间 Bose 子还不足以解决重整化和幺正性的问题,要得到一个在微扰论中可以自洽地进行计算的理论,还需要另外加入其他的因素。

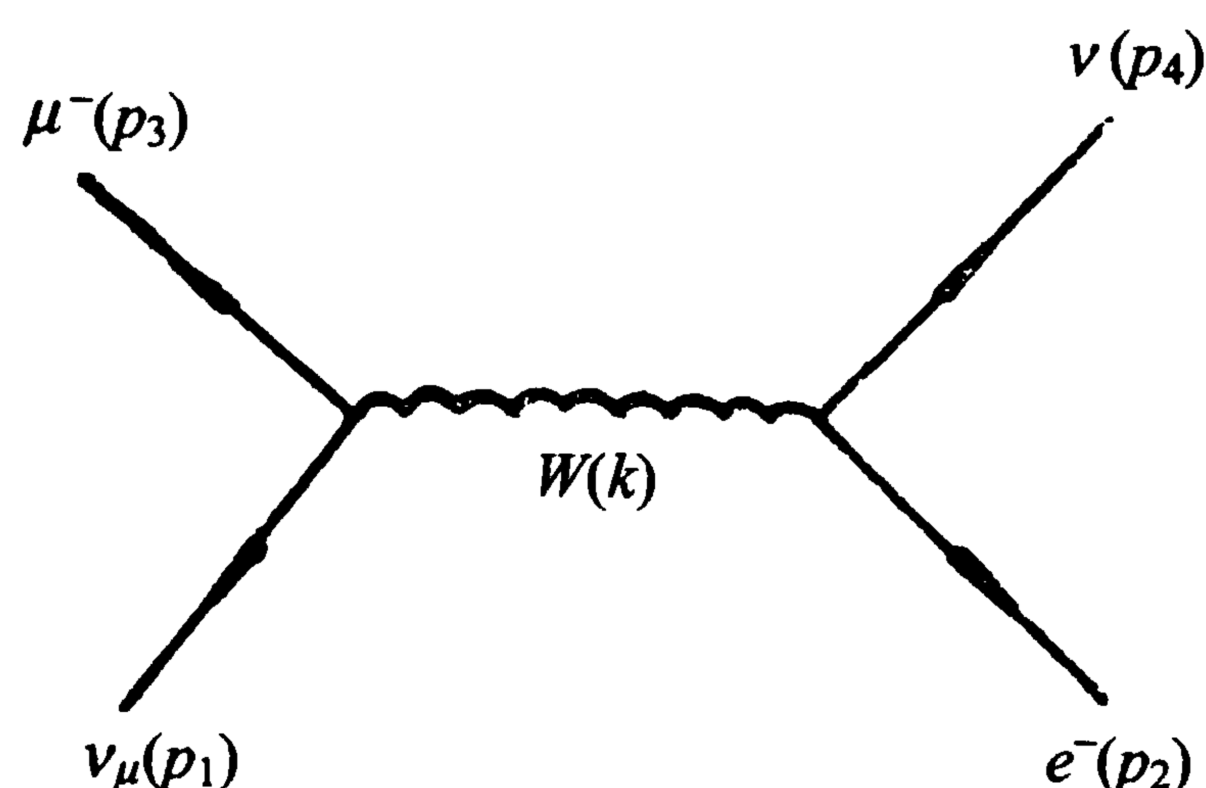



图 9.1

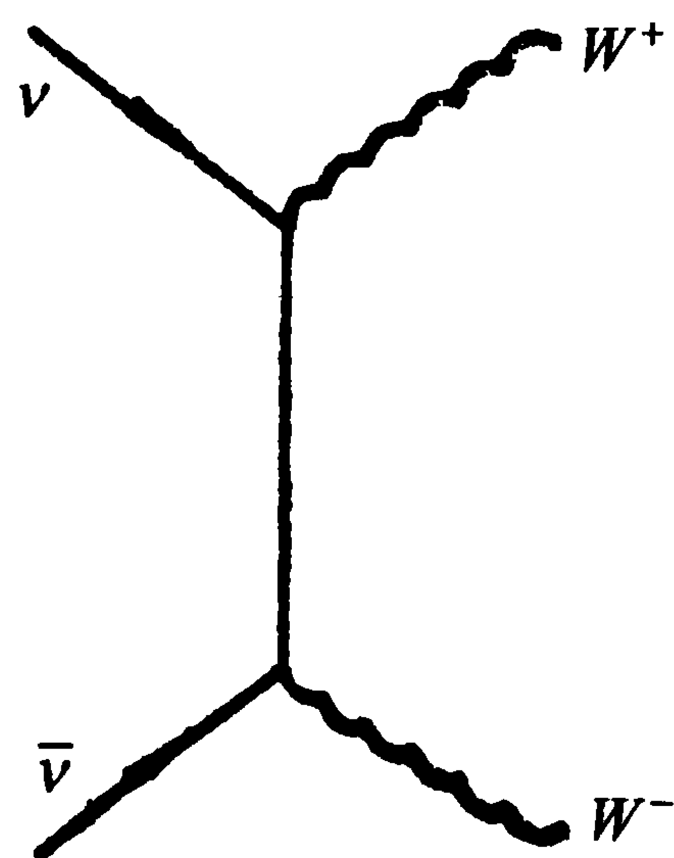



图 9.2

由 9.1.1 小节中叙述的弱相互作用的几个特点可以看到，弱相互作用与电磁相互作用之间有不少相似和相互联系之处。像电磁相互作用一样，弱作用是矢量耦合的性质，可能是由矢量粒子传递的。它和电磁作用一样有普适性，而且强子弱作用流与电磁流通过 SU(2)和 SU(3)对称性相互联系，因此电磁作用和弱作用有可能统一地描述。电磁场是一种规范场，自然可以设想弱电统一理论应是一种规范理论。电磁作用与弱作用在耦合强度上相差很大。但是由式(9.19)可以看到，只要 $m_W$ 足够大，$g$ 有可能与电荷 $e$ 有相同的数量级。这些观察导致 Glashow、Weinberg 和 Salam 提出弱电统一的规范场理论。由于规范场理论是可以重整化的，可以用它进行微扰论的高阶计算和克服幺正性的困难。

## 9.2　弱电统一的 Weinberg-Salam 模型

### 9.2.1　轻子部分

在本节中我们将介绍第一个，也是获得很大成就的一个弱电统一自发破缺规范理论，即 Weinberg-Salam 模型[7,8]。

在规范理论中需要先确定一个对称群 $G$。在不引入与 $\nu_e,\nu_\mu$ 耦合的其他轻子时，能够给出式(9.2)中的弱作用流的规范群是 SU(2)群。引入符号

$$\psi_L^e = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L, \qquad \psi_L^\mu = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L$$

其中，L 表示手征性为 $\gamma_5\psi=\psi$ 的部分，称为左手部分，例如 $e_L^- = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)e^-$（在零质量极限下自旋为左旋）。式(9.2)可写为

$$j_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}(\bar{\psi}_L^e\gamma_\mu\tau_-\psi_L^e + \bar{\psi}_L^\mu\gamma_\mu\tau_-\psi_L^\mu)$$

其中

$$\tau_- = \frac{1}{2}(\tau_1 - \mathrm{i}\tau_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

定义左手流

$$j_\mu^i = \frac{\mathrm{i}}{2}(\bar{\psi}_\mathrm{L}^e \gamma_\mu \tau_i \psi_\mathrm{L}^e + \bar{\psi}_\mathrm{L}^\mu \gamma_\mu \tau_i \psi_\mathrm{L}^\mu), \qquad i = 1,2,3 \tag{9.20}$$

及 $j_\mu^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(j_\mu^1 - \mathrm{i}j_\mu^2)$，$j_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(j_\mu^1 + \mathrm{i}j_\mu^2)$（$j_\mu^-$ 与式(9.2)中 $j_\mu$ 相同）。相应于式(9.20)中的流的荷为

$$\hat{T}_i^\mathrm{L} = \int j_0^i(x)\mathrm{d}^3 x \tag{9.21}$$

容易验证它们满足 SU(2)代数的对易关系

$$[T_i, T_j] = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk} T_k \tag{9.22}$$

因此可以看出，为构成 SU(2)代数，必须引入中性流 $j_\mu^3$。由式(9.20)知道，中性流 $j_\mu^3$ 不是电流。为了在理论中包括电磁作用，必须把对称群扩大。最小的扩大方式是引入一个与 SU(2)群对易的 U(1)对称群。因此，Weinberg 和 Salam 假设规范对称群为 $\mathrm{SU(2)_L \times U(1)_Y}$，其中 $Y$ 表示 U(1)群的生成元。令 $y$ 表示相应于 $Y$ 的量子数。在 W-S 理论中轻子有两个左手 $\mathrm{SU(2)_L}$ 双重态

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_\mathrm{L}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_\mathrm{L}, y = -1 \tag{9.23}$$

和两个右手 $\mathrm{SU(2)_L}$ 单态

$$e_\mathrm{R}^-, \mu_\mathrm{R}^-, \ y = -2 \tag{9.24}$$

其中，$e_\mathrm{L} = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)e$，$e_\mathrm{R} = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)e$。在式(9.23)中同一个 $\mathrm{SU(2)_L}$ 表示中，各分量有相同的 $y$ 值，因此满足直乘群的要求

$$[\hat{T}_i^\mathrm{L}, \hat{Y}] = 0 \tag{9.25}$$

由式(9.23)和(9.24)容易验证电荷算符 $\hat{Q}$ 为

$$\hat{Q} = \hat{T}_3^\mathrm{L} + \frac{\hat{Y}}{2} \tag{9.26}$$

式(9.26)表示，现在电荷算符出现在对称群的李代数之内，电磁流是由对称群决定的守恒流。因此这个理论可以包含电磁作用。式(9.26)的形式与强作用的 Gell-Mann-Nishijima 法则相似，所以 $T_i^\mathrm{L}$ 称为弱同位旋，$Y$ 称为弱超荷。

对应于 $\mathrm{SU(2)_L \times U(1)_Y}$ 群的四个生成元 $T_i^\mathrm{L}$ 及 $Y$，W-S 模型中有四个规范场 $\boldsymbol{W}_\mu^i$ 及 $B_\mu$。拉氏函数密度中包含规范场部分 $\mathscr{L}_g$ 和轻子部分 $\mathscr{L}_l$。这两部分的形式

是由 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 群规范不变性及轻子所属的表示式(9.23)和(9.24)唯一确定的

$$\mathscr{L}_g = -\frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^i_{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G_{\mu\nu} \tag{9.27}$$

其中

$$F^i_{\mu\nu} = \partial_\mu W^i_\nu - \partial_\nu W^i_\mu + g\varepsilon_{ijk}W^j_\mu W^k_\nu$$

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

$$\mathscr{L}_l = -\bar{\psi}^e_L\gamma_\mu\left(\partial_\mu + \frac{i}{2}g'B_\mu - ig\frac{\tau^i}{2}W^i_\mu\right)$$

$$\cdot\,\psi^e_L - \bar{e}_R\gamma_\mu(\partial_\mu + ig'B_\mu)e_R + e \rightarrow \mu \text{ 项} \tag{9.28}$$

其中,$g$ 和 $\frac{g'}{2}$分别为相应于 $SU(2)_L$ 及 $U(1)_Y$ 群的耦合常数,$-\frac{1}{2}g'$项的系数是 $\psi^e_L$ 和 $e_R$ 的 $y$ 值。注意,轻子质量项 $m_e\bar{e}e = m_e(\bar{e}_Re_L + \bar{e}_Le_R)$是破坏 $SU(2)_L$ 对称的,所以式(9.28)中没有这样的项。

如果拉氏函数中只有式(9.27)和(9.28)两项,则四个规范粒子都是零质量的,其中一个带电荷+1,一个带电荷-1,另外两个是中性的。实验上只有光子是零质量。为使其他三个规范粒子获得质量必须使规范群 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 自发破缺。按照 Higgs 机制的一般原则,必须有三个 Goldstone 粒子,分别带电荷+1,0,-1,它们将转化为三个获得质量的规范粒子的纵向部分。此外,理论中至少还有一个中性的 Higgs 场,它的真空平均值不为零,这将导致自发破缺。另一方面,只有标量场属于 $SU(2)_L$ 二重态时,它才能与左手属于 $SU(2)_L$ 二重态右手属于单态的 Fermi 子组成 $SU(2)_L$ 不变的汤川型耦合。W-S 模型采用满足这些要求的最简单的方案,引入一个 $SU(2)_L$ 二重态的 Higgs 复标量场

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \tag{9.29}$$

并设它有 $y=1$ 的 $U(1)_Y$ 量子数。满足 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范不变及可重整性要求的最普遍的拉氏函数中的 $\phi$ 场项为

$$\mathscr{L}_s = -\left(\partial_\mu\phi^\dagger + ig\frac{\tau_i}{2}W^i_\mu\phi^\dagger + \frac{ig'}{2}B_\mu\phi^\dagger\right)$$

$$\times\left(\partial_\mu\phi - \frac{ig'}{2}B_\mu\phi - ig\frac{\tau_i}{2}W^i_\mu\phi\right) - V(\phi^\dagger\phi) \tag{9.30}$$

$$V = -\mu^2\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 \tag{9.31}$$

$\phi$ 场与轻子场可以有满足 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 对称的汤川作用项

$$\mathscr{L}_{s-l} = -f_e(\bar{e}_R\phi^\dagger\psi_L^e + \bar{\psi}_L^e\phi e_R) - f_\mu(\bar{\mu}_R\phi^\dagger\psi_L^\mu + \bar{\psi}_L^\mu\phi\mu_R) \tag{9.32}$$

总的拉氏函数密度为

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_g + \mathscr{L}_l + \mathscr{L}_s + \mathscr{L}_{s-l} \tag{9.33}$$

在 $\mu^2>0$ 时 $\phi$ 场有自发破缺。设 $\phi$ 的中性分量 $\phi^0$ 有一个真空平均值$\frac{1}{\sqrt{2}}v$

$$\langle\phi\rangle_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{9.34}$$

不失一般性，可选取 $v$ 为实数(通过一个不依赖于坐标的 $\mathrm{U}(1)_Y$ 变换可以做到这一点)。由式(9.31)

$$v = [\mu^2/\lambda]^{\frac{1}{2}} \tag{9.35}$$

显然对 $\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}\times\mathrm{U}(1)_Y$ 的生成元 $T_i^\mathrm{L}$ 及 $Y$

$$T_i^\mathrm{L}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \neq 0, \qquad Y\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \neq 0$$

由式(9.25)

$$Q\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = 0$$

按照以前叙述的自发破缺一般理论，在这个模型中 $\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}\times\mathrm{U}(1)_Y$ 对称自发地破缺，但还保留一个以电荷 $Q$ 为生成元的电磁 $\mathrm{U}(1)_Q$ 规范不变性。

过渡到幺正规范，将 $\phi$ 场写为

$$\phi(x) = U^{-1}(\theta)\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v+\varphi(x)) \end{bmatrix} \tag{9.36}$$

$$U(\theta) = \exp(-\mathrm{i}\tau_i\theta_i(x)/2v) \tag{9.37}$$

其中，$\theta(x)$，$\varphi(x)$为实场。由式(9.34)知

$$\langle\varphi(x)\rangle_0 = 0 \tag{9.38}$$

以 $U(\theta)$做 $\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}$ 规范变换

$$\phi \to U(\theta)\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v+\varphi \end{pmatrix} \tag{9.39}$$

$\psi_\mathrm{L}$ 及 $W_\mu^i$ 也做相应的变换。在此规范变换下，拉氏函数密度式(9.33)的形式保持不变，但是现在

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v+\varphi \end{pmatrix} \tag{9.40}$$

Goldstone粒子的场 $\theta_i(x)$ 在规范变换后消失了。

将式(9.40)代入式(9.32)得到

$$\mathscr{L}_{s-l} = -\frac{f_e}{\sqrt{2}}\bar{e}e\varphi - \frac{f_e v}{\sqrt{2}}\bar{e}e + e \to \mu \text{ 项} \tag{9.41}$$

由上式看到电子和 $\mu$ 子获得质量

$$m_e = \frac{1}{\sqrt{2}}f_e v, \qquad m_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}f_\mu v \tag{9.42}$$

$\nu_e$ 和 $\nu_\mu$ 仍旧没有质量。

将式(9.40)代入式(9.30)得到

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_s = &-\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi - \frac{(v+\varphi)^2}{8}[(g'B_\mu - gW_\mu^3)(g'B_\mu - gW_\mu^3) \\ &+ g^2(W_\mu^1W_\mu^1 + W_\mu^2W_\mu^2)] - V\left[\left(\frac{\varphi+v}{\sqrt{2}}\right)^2\right]\end{aligned} \tag{9.43}$$

上式中 $\varphi$ 的二次项为 $-\mu^2\varphi^2$,因此Higgs粒子的质量为

$$m_\varphi = \sqrt{2}\mu = (2\lambda)^{\frac{1}{2}}v \tag{9.44}$$

矢量场的二次项为

$$-\frac{1}{8}v^2(g'B_\mu - gW_\mu^3)(g'B_\mu - gW_\mu^3) - \frac{g^2v^2}{4}W_\mu^+W_\mu^- \tag{9.45}$$

其中,$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \pm \mathrm{i}W_\mu^2)$,由上式看出,带电中间Bose子的质量是

$$m_{\mathrm{W}} = \frac{1}{2}gv \tag{9.46}$$

为了使式(9.45)中 $B_\mu$ 及 $W_\mu^3$ 中性矢量场部分的质量矩阵对角化,我们做幺正变换

$$\begin{aligned}A_\mu &= \cos\theta_{\mathrm{W}}B_\mu + \sin\theta_{\mathrm{W}}W_\mu^3 \\ Z_\mu &= -\sin\theta_{\mathrm{W}}B_\mu + \cos\theta_{\mathrm{W}}W_\mu^3\end{aligned} \tag{9.47}$$

其中

$$\tan\theta_{\mathrm{W}} = \frac{g'}{g} \tag{9.48}$$

$\theta_{\mathrm{W}}$ 称为Weinberg角。由式(9.45)可知,$Z_\mu$ 和 $A_\mu$ 是质量矩阵的本征矢量,因此相应于物理的矢量粒子,它们的质量分别为

$$m_{Z^0} = \frac{1}{2}\sqrt{g^2 + g'^2}\,v$$

$$m_A = 0 \tag{9.49}$$

将 $\mathscr{L}_l$ 中规范场与轻子相互作用的项用物理粒子的场 $W_\mu^\pm$，$Z_\mu$ 及 $A_\mu$ 表示，式(9.28)中与 $W_\mu^\pm$ 有关的部分为

$$\begin{aligned} & \mathrm{i}\frac{g}{2}\bar{\psi}_\mathrm{L}^e\gamma_\mu(\tau_1 W_\mu^1 + \tau_2 W_\mu^2)\psi_\mathrm{L}^e + e \to \mu \text{ 项} \\ &= \mathrm{i}\frac{g}{\sqrt{2}}[\bar{\nu}_e\gamma_\mu e_\mathrm{L} W_\mu^+ + \bar{e}_\mathrm{L}\gamma_\mu\nu_e W_\mu^-] + e \to \mu \text{ 项} \\ &= g(j_\mu^- W_\mu^+ + j_\mu^+ W_\mu^-) \end{aligned} \tag{9.50}$$

其中

$$j_\mu^- = \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{i}\bar{e}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu_e + e \to \mu \text{ 项} \tag{9.51}$$

恰好是式(9.2)中的轻子流，$j_\mu^+ = \bar{j}_\mu^-$。由式(9.47)

$$\begin{aligned} B_\mu &= \cos\theta_\mathrm{W} A_\mu - \sin\theta_\mathrm{W} Z_\mu \\ W_\mu^3 &= \sin\theta_\mathrm{W} A_\mu + \cos\theta_\mathrm{W} Z_\mu \end{aligned} \tag{9.52}$$

将上式代入式(9.28)中并利用式(9.48)，得到 $Z_\mu$，$A_\mu$ 与轻子的作用项

$$\begin{aligned} & \mathrm{i}\frac{g}{2}\bar{\psi}_\mathrm{L}^e\gamma_\mu\tau_3\psi_\mathrm{L}^e W_\mu^3 - \frac{g'}{2}\mathrm{i}(2\bar{e}_\mathrm{R}\gamma_\mu e_\mathrm{R} + \bar{\psi}_\mathrm{L}^e\gamma_\mu\psi_\mathrm{L}^e)B_\mu + e \to \mu \text{ 项} \\ &= + e j_\mu^{\mathrm{em}}(x)A_\mu(x) + \frac{g}{\cos\theta_\mathrm{W}} Z_\mu(x) j_\mu^z(x) \end{aligned}$$

其中，$j^{\mathrm{em}}$ 为轻子的电流(本章中约定 $e>0$)

$$\begin{aligned} j_\mu^{\mathrm{em}} &= -\mathrm{i}(\bar{e}_\mathrm{R}\gamma_\mu e_\mathrm{R} + \bar{e}_\mathrm{L}\gamma_\mu e_\mathrm{L}) + e \to \mu \text{ 项} \\ j_\mu^z &= j_\mu^3 - \sin^2\theta_\mathrm{W} j_\mu^{\mathrm{em}} \end{aligned} \tag{9.53}$$

$j_\mu^3$ 是式(9.20)中 $i=3$ 的分量

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \tag{9.54}$$

带电轻子的动能项及其与 $A_\mu$ 场的作用项合起来可写为

$$-\bar{e}\gamma_\mu(\partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu)e - \mathrm{i}\bar{\mu}\gamma_\mu(\partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu)\mu \tag{9.55}$$

由式(9.55)可看出，零质量的中性矢量场 $A_\mu$ 与带电轻子的电流 $\mathrm{i}\bar{e}\gamma_\mu e + \mathrm{i}\bar{\mu}\gamma_\mu\mu$ 耦合，而且式(9.55)在 U(1)规范变换

$$\begin{aligned} & e \to \exp(-\mathrm{i}\alpha(x))e, \qquad \mu \to \exp(-\mathrm{i}\alpha(x))\mu \\ & A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \end{aligned} \tag{9.56}$$

下不变，不难验证带电中间 Bose 子 $W_\mu^+$，$W_\mu^-$ 与 $A_\mu$ 的耦合在此规范变换下也是不变的。这就是上面已提到的自发破缺后剩余的 $\mathrm{U}(1)_Q$ 规范不变性。因此 $A_\mu$ 场代表光子，$-e$ 代表电子的电荷。

式(9.53)中的 $Z_\mu$ 项代表轻子弱作用中性流 $\frac{g}{\cos\theta_{\mathrm{W}}}[j_\mu^3-\sin^2\theta_{\mathrm{W}}j_\mu^{\mathrm{em}}]$ 与 $Z_\mu$ 中性中间 Bose 子的耦合，它的效应不包含在只有带电流的流-流耦合有效拉氏函数式(9.1)中。中性流的存在是 $\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}}\times\mathrm{U}(1)_Y$ 对称性的必然结果。在下节中可以看到强子也有中性弱作用流。中性流已经在 1973 年由实验发现了。

总的说，在此模型中 $\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}}\times\mathrm{U}(1)_Y$ 对称性自发破缺到 $\mathrm{U}(1)_Q$ 对称。除轻子 $e,\nu_e,\mu,\nu_\mu$ 外，此模型还有如下几种物理粒子，两个带电中间 Bose 子 $W^+$，$W^-$；一个中性中间 Bose 子 $Z$；一个光子 $A$ 和一个中性 Higgs 标量粒子 $\varphi$。由于自发破缺，中间 Bose 子 $W^+$，$W^-$ 和 $Z^0$ 获得质量，带电轻子 $e$ 和 $\mu$ 也获得质量，只剩下 $\nu_e,\nu_\mu$ 和光子是无质量的。

把式(9.50)和(9.51)用于 $\mu$ 衰变振幅，按照前面得到式(9.19)的讨论可以得到 Fermi 弱作用常数的表示式

$$\frac{G}{\sqrt{2}}=\frac{g^2}{8m_{\mathrm{W}}^2} \tag{9.57}$$

由式(9.54)及(9.48)

$$g\sin\theta_{\mathrm{W}}=e,\qquad g'\cos\theta_{\mathrm{W}}=e$$

因此

$$m_{\mathrm{W}}=\frac{e}{\sin\theta_{\mathrm{W}}}\left[\frac{\sqrt{2}}{8G}\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sin\theta_{\mathrm{W}}}\simeq\frac{38}{\sin\theta_{\mathrm{W}}}\mathrm{GeV}/c^2 \tag{9.58}$$

由式(9.49)、(9.46)及(9.58)得到

$$m_Z=\frac{m_{\mathrm{W}}}{\cos\theta_{\mathrm{W}}}\simeq\frac{38\mathrm{GeV}/c^2}{\frac{1}{2}\sin2\theta_{\mathrm{W}}} \tag{9.59}$$

所以带电的和中性的中间 Bose 子都具有很大质量，而且 $m_Z>m_{\mathrm{W}}$。

在这个理论中，对 Higgs 粒子的质量 $m_\varphi=\sqrt{2}\mu$ 不能做确定的预言。Higgs 粒子与轻子的耦合常数 $f_e$ 满足由式(9.41)和(9.42)得到的关系式

$$f_e=\frac{\sqrt{2}m_e}{v} \tag{9.60}$$

由式(9.46)及(9.57)

$$v=\left(\frac{1}{\sqrt{2}G}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{9.61}$$

故有

$$f_e = (2)^{\frac{3}{4}} \sqrt{G} m_e \simeq 2 \times 10^{-6} \tag{9.62}$$

$$f_\mu = (2)^{\frac{3}{4}} \sqrt{G} m_\mu \simeq 1 \times 10^{-4} \tag{9.63}$$

因此 Higgs 粒子与轻子的耦合比中间 Bose 子与轻子的耦合弱得多。例如,对 $\mu$ 子衰变过程,轻子间交换 Higgs 粒子的振幅与交换规范粒子的振幅之比为$\frac{m_\mu m_e}{m_\varphi^2}$。如果 Higgs 粒子的质量 $m_\varphi$ 比 $m_\mu$ 大得多,在微扰论一级近似下可以不考虑 $\varphi$ 的效应。

### 9.2.2 强子部分

将式(9.4)中强子流的形式与式(9.2)中轻子流的形式比较,容易看到,为了描述强子的弱作用可以引入一个 $SU(2)_L$ 二重态

$$\begin{pmatrix} u \\ \cos\theta_c d + \sin\theta_c s \end{pmatrix}_L$$

但是这时理论中将有中性流项 $\cos\theta_c \sin\theta_c (\bar{d}_L \gamma_\mu s_L + \bar{s}_L \gamma_\mu d_L)$。这是一个改变奇异数的中性流。如果这样的项存在,将在弱作用 $G$ 的一阶中导致如下的过程

$$K_L^0 \to \mu^+ + \mu^-$$

$$K^+ \to \pi^+ + e^+ + e^-$$

但是实验上 $K_L^0 \to \mu^+ + \mu^-$ 过程的分支比只有$(9.1 \pm 1.8) \times 10^{-9}$,$K^+ \to \pi^+ + e^+ + e^-$ 过程的分支比小于$(2.6 \pm 0.5) \times 10^{-7}$,都比一阶弱作用小得多。这是建立强子弱作用规范理论曾遇到的一个困难。

为了克服这个困难,Glashow、Illiopoulos 和 Maiani[9] 提出一个模型。这个模型中有一个新的夸克 $c$,它的电荷为$\frac{2}{3}e$。$c$ 夸克的同位旋为 0,奇异数为 0,它带有一个在强作用下守恒的量子数 $c=1$。引入两个 $SU(2)_L$ 二重态

$$q_L^u = \begin{pmatrix} u \\ d_c \end{pmatrix}_L, \qquad q_L^c = \begin{pmatrix} c \\ s_c \end{pmatrix}_L \tag{9.64}$$

其中

$$\begin{aligned} d_c &= \cos\theta_c d + \sin\theta_c s \\ s_c &= -\sin\theta_c d + \cos\theta_c s \end{aligned} \tag{9.65}$$

在 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 理论中,由式(9.26)$Q = T_3 + \frac{Y}{2}$得到这两个二重态有 $U(1)_Y$ 量子数 $y = \frac{1}{3}$。右手夸克 $u_R, d_R, c_R$ 和 $s_R$ 都是 $SU(2)_L$ 单态,它们的 $U(1)_Y$ 量子

数分别为$y=\frac{4}{3},-\frac{2}{3},\frac{4}{3},-\frac{2}{3}$。

拉氏函数密度中的层子项为

$$\mathscr{L}_q=-\bar{q}_{\mathrm{L}}^u\gamma_\mu\left(\partial_\mu-\frac{\mathrm{i}}{6}g'B_\mu-\mathrm{i}g\frac{\tau_i}{2}W_\mu^i\right)q_{\mathrm{L}}^u-\bar{u}_{\mathrm{R}}\gamma_\mu\left(\partial_\mu-\mathrm{i}\frac{2}{3}g'B_\mu\right)u_{\mathrm{R}}$$
$$-\bar{d}_{\mathrm{R}}\gamma_\mu\left(\partial_\mu+\mathrm{i}\frac{g'}{3}B_\mu\right)d_{\mathrm{R}}+\left[\begin{matrix}u\to c\\ d\to s\end{matrix}\text{项}\right]\tag{9.66}$$

上式中夸克与带电中间 Bose 子的作用项为

$$g(J_\mu^1W_\mu^1+J_\mu^2W_\mu^2)=g(J_\mu^-W_\mu^++J_\mu^+W_\mu^-)\tag{9.67}$$

其中

$$J_\mu^i=\mathrm{i}\bar{q}_{\mathrm{L}}^u\frac{\tau_i}{2}\gamma_\mu q_{\mathrm{L}}^u+\mathrm{i}\bar{q}_{\mathrm{L}}^c\frac{\tau_i}{2}\gamma_\mu q_{\mathrm{L}}^c$$

$$W_\mu^\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1\pm\mathrm{i}W_\mu^2)$$

$$J_\mu^-=\frac{1}{\sqrt{2}}(J_\mu^1-\mathrm{i}J_\mu^2)=\frac{1}{2\sqrt{2}}[\cos\theta_c\mathrm{i}\bar{d}\gamma_\mu(1+\gamma_5)u$$
$$+\sin\theta_c\mathrm{i}\bar{s}\gamma_\mu(1+\gamma_5)u+\cos\theta_c\mathrm{i}\bar{s}\gamma_\mu(1+\gamma_5)c-\sin\theta_c\mathrm{i}\bar{d}\gamma_\mu(1+\gamma_5)c]\tag{9.68}$$

利用式(9.48)、(9.52)及(9.54)。式(9.66)中夸克与$B_\mu$，$W_\mu^3$相互作用的部分可写为

$$\mathrm{i}\frac{g'}{3}B_\mu\left[\frac{1}{2}\bar{u}_{\mathrm{L}}\gamma_\mu u_{\mathrm{L}}+2\bar{u}_{\mathrm{R}}\gamma_\mu u_{\mathrm{R}}+\frac{1}{2}\bar{d}_{\mathrm{L}}\gamma_\mu d_{\mathrm{L}}-\bar{d}_{\mathrm{R}}\gamma_\mu d_{\mathrm{R}}+\left(\begin{matrix}u\to c\\ d\to s\end{matrix}\text{项}\right)\right]$$
$$+gW_\mu^3J_\mu^3=eJ_\mu^{\mathrm{em}}A_\mu+\frac{g}{\cos\theta_{\mathrm{W}}}[J_\mu^3-\sin^2\theta_{\mathrm{W}}J_\mu^{\mathrm{em}}]Z_\mu\tag{9.69}$$

其中

$$J_\mu^{\mathrm{em}}=\mathrm{i}\left(\frac{2}{3}\bar{u}\gamma_\mu u-\frac{1}{3}\bar{d}\gamma_\mu d+\frac{2}{3}\bar{c}\gamma_\mu c-\frac{1}{3}\bar{s}\gamma_\mu s\right)\tag{9.70}$$

为与$A_\mu$耦合的强子电流，

$$J_\mu^3=\mathrm{i}\bar{q}_{\mathrm{L}}^u\gamma_\mu\frac{\tau_3}{2}q_{\mathrm{L}}^u+\mathrm{i}\bar{q}_{\mathrm{L}}^c\gamma_\mu\frac{\tau_3}{2}q_{\mathrm{L}}^c$$
$$=\frac{\mathrm{i}}{2}(\bar{u}_{\mathrm{L}}\gamma_\mu u_{\mathrm{L}}-\bar{d}_{\mathrm{L}}\gamma_\mu d_{\mathrm{L}}+\bar{c}_{\mathrm{L}}\gamma_\mu c_{\mathrm{L}}-\bar{s}_{\mathrm{L}}\gamma_\mu s_{\mathrm{L}})\tag{9.71}$$

在式(9.69)与(9.71)中，我们看到，由于在中性流$\bar{q}_{\mathrm{L}}^u\gamma_\mu\tau_3q_{\mathrm{L}}^u$与$\bar{q}_{\mathrm{L}}^c\gamma_\mu\tau_3q_{\mathrm{L}}^c$中的$\sin\theta_c\cos\theta_c\bar{d}_{\mathrm{L}}s$项互相抵消，现在不存在改变奇异数的中性流。这称为消去改变奇异数的中性流的 GIM 机制。

式(9.69)中 $Z$ 与强子的耦合项为$\frac{g}{\cos\theta_W}J_\mu^z Z_\mu$

$$J_\mu^z = [J_\mu^3 - \sin^2\theta_W J_\mu^{em}] \tag{9.72}$$

由式(9.57)、(9.59)及(9.53)、(9.69)知道,中性流项在低能现象中与带电流有相同的有效 Fermi 作用常数,等效拉氏函数密度可写为

$$\frac{G}{\sqrt{2}}(\bar{j}_\mu^z + \bar{J}_\mu^z)(j_\mu^z + J_\mu^z) \tag{9.73}$$

如同 9.2.1 小节中讨论的轻子的情形一样,由于 $SU(2)_L$ 不变性的要求,夸克质量项不能出现在拉氏函数中,夸克的质量是在自发破缺后得到的。

满足 $SU(2)_L\times U(1)_Y$ 不变性的夸克与 Higgs 场 $\phi$ 相互作用的项的最一般形式为

$$\begin{aligned}&-(f_u\bar{q}_L^u\tilde{\phi}u_R + f_c\bar{q}_L^c\tilde{\phi}c_R + f_d\bar{q}_L^u\phi d_R + f_s\bar{q}_L^c\phi s_R + f_u'\bar{q}_L^c\tilde{\phi}u_R\\&+ f_c'\bar{q}_L^u\tilde{\phi}c_R + f_d'\bar{q}_L^c\phi d_R + f_s'\bar{q}_L^u\phi s_R) + \text{h.c.}\end{aligned} \tag{9.74}$$

其中,$\tilde{\phi}=\mathrm{i}\tau_2\phi^*$。$\tilde{\phi}$ 在 $SU(2)_L$ 下与 $\phi$ 的变换性质一样,但其 $U(1)_Y$ 量子数为 $y=-1$。在幺正规范下

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v+\varphi\end{pmatrix},\qquad \tilde{\phi} = \mathrm{i}\tau_2\phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}v+\varphi\\ 0\end{pmatrix} \tag{9.75}$$

将式(9.75)代入式(9.74)后,夸克场二次项(不含 $\varphi$ 场的项)的系数组成夸克的质量矩阵。要求 $u,d,c$ 和 $s$ 是质量矩阵的本征矢量,得到式(9.74)中的几个耦合常数满足的如下的关系式

$$f_u' + f_c' = 0$$

$$-(f_d - f_s)\sin\theta_c = (f_d' + f_s')\cos\theta_c$$

四个夸克质量为

$$m_u = \frac{1}{\sqrt{2}}f_u v,\qquad m_c = \frac{1}{\sqrt{2}}f_c v$$

$$m_d = \frac{v}{\sqrt{2}}(f_d\cos\theta_c - f_d'\sin\theta_c)$$

$$m_s = \frac{v}{\sqrt{2}}(f_s\cos\theta_c + f_s'\sin\theta_c)$$

由于 $\varphi$ 场只以 $\varphi+v$ 的组合出现,汤川耦合项在用夸克质量及 $v$ 表示时为

$$-(m_u\bar{u}u + m_c\bar{c}c + m_d\bar{d}d + m_s\bar{s}s)\left(1+\frac{\varphi}{v}\right) \tag{9.76}$$

Higgs 粒子与夸克 $q$ 的耦合常数为

$$\frac{m_q}{v} = (\sqrt{2}G)^{\frac{1}{2}} m_q$$

因此在 Higgs 粒子的质量 $m_\varphi \gg m_q$ 时，它与夸克的相互作用在 $G$ 的一阶中是可以忽略的。

## 9.3　弱电统一模型的进一步讨论

### 9.3.1　建立模型的一般程序

W-S 模型是最早的一个，也是不与实验矛盾的最简单的一个弱电统一规范模型，其后为了不同的目的提出过许多模型。建立弱电统一规范模型一般包含如下一些程序：

(1) 确定一个半单纯或单纯规范群 $G$。对应于群的每个生成元，有一个规范粒子。它们在拉氏函数密度中贡献一项 $-\frac{1}{4}\sum_i F^i_{\mu\nu}F^i_{\mu\nu}$。

(2) 确定模型的 Fermi 子内容及左、右手 Fermi 子所属的 $G$ 群表示。Fermi 子与规范场的耦合是最小耦合。在拉氏函数中有一项 $-\sum_\alpha \bar{\psi}^\alpha \gamma_\mu (\partial_\mu - \mathrm{i}g_i T^i_\alpha W^i_\mu)\psi^\alpha$，这里 $\alpha$ 标志 Fermi 子表示，$T^i_\alpha$ 为群的生成元在表示 $\alpha$ 中的矩阵，$g_i$ 在一个单纯群的内部是一样的。

(3) 确定 Higgs 场的内容及所属表示。它们除与规范场有最小耦合 $-\sum_\alpha |(\partial_\mu - \mathrm{i}g_i T^i_\alpha W^i_\mu)\phi^\alpha|^2$ 外还有满足群 $G$ 下不变及可重整性要求的自作用位势 $V(\phi^\alpha)$。$V(\phi^\alpha)$ 必须有自发破缺的性质，即它的极小不在所有 Higgs 场都等于零处。$V$ 的形式必须能保证定域规范群 $G$ 破缺到 $\mathrm{U}(1)_Q$ 群，即真空平均值只有 $\mathrm{U}(1)_Q$ 对称性。

(4) 确定 Fermi 子场与 Higgs 场的满足群 $G$ 不变要求的汤川型耦合项。

在取幺正规范并对相应于物理 Higgs 粒子的场做平移(减去真空平均值)后，除光子外所有规范粒子都获得质量。对 Higgs 场做平移后所得到的拉氏函数中，包含一些规范场的二次项和 Fermi 子场的二次项，它们的系数分别组成规范场质量矩阵和 Fermi 子的质量矩阵。把这些质量矩阵对角化就得到物理粒子及其质量的表示式。

由上述步骤可以看到，在确定规范群 $G$ 后拉氏函数中的规范场项是完全确定的。在确定 Fermi 子的内容及所属的表示后，拉氏函数中的 Fermi 子项也是确定的。这是规范理论的威力。但是在步骤(3)和(4)中，在 Higgs 的自作用位势和它与 Fermi 子的汤川耦合项中有一些可调的参数，它们所受的约束较少。因此理论对各种粒子的质量、它们在群表示中的混合(例如 $\theta_c$)及 Higgs 场与 Fermi 子的耦

合常数不能预言，这是现在的弱电统一规范理论的不足之处。

建立模型时还需要考虑三角图反常问题。三角图反常如果存在将会破坏规范理论的可重整性。这个问题我们留到第十章中讨论。

### 9.3.2 $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$规范模型

作为一个例子，我们简略地讨论一下 $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$规范群模型[12]。这个群的生成元及相应的规范场和耦合常数见下表

| 子群 | $SU(2)_L$ | $SU(2)_R$ | $U(1)$ |
|---|---|---|---|
| 生成元 | $T_i^L$, | $T_i^R$, | $Y$ |
| 规范场 | $W_\mu^{Li}$ | $W_\mu^{Ri}$ | $B_\mu$ |
| 耦合常数 | $g_L$ | $g_R$ | $g'$ |

上表中 $i=1,2,3$。在理论中加上左、右互换的对称性的要求，这时 $g_L = g_R = g$。拉氏函数密度中的规范场部分为

$$\mathscr{L}_g = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{Li}F_{\mu\nu}^{Li} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{Ri}F_{\mu\nu}^{Ri} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G_{\mu\nu} \tag{9.77}$$

其中

$$F_{\mu\nu}^{Li} = \partial_\mu W_\nu^{Li} - \partial_\nu W_\mu^{Li} + g\varepsilon_{ijk}W_\mu^{Lj}W_\nu^{Lk}$$

$$F_{\mu\nu}^{Ri} = \partial_\mu W_\nu^{Ri} - \partial_\nu W_\mu^{Ri} + g\varepsilon_{ijk}W_\mu^{Rj}W_\nu^{Rk}$$

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

为使理论包含电磁作用并保持左右对称性，可取电荷为

$$Q = T_3^L + T_3^R + Y \tag{9.78}$$

左手和右手夸克分别写为

$$q_L^i = \begin{pmatrix} u^i \\ d^i \end{pmatrix}_L, \qquad q_R^i = \begin{pmatrix} u^i \\ d^i \end{pmatrix}_R, \qquad i = 1,2,\cdots$$

$q_L^i$ 和 $q_R^i$ 的量子数$(T^L, T^R, Y)$分别为$\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{6}\right)$和$\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{6}\right)$，即左手夸克为$SU(2)_L$的二重态及$SU(2)_R$的单态，而右手夸克为$SU(2)_L$的单态和$SU(2)_R$的二重态。$u^i$ 和$d^i$ 的电荷分别为$\frac{2}{3}$及$-\frac{1}{3}$。容易验证，式(9.78)是满足的，$SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$不变的夸克动能项为

$$\mathscr{L}_q = -\bar{q}_L\left(\partial_\mu - ig\frac{\tau_i}{2}W_\mu^{Li} - \frac{i}{6}g'B_\mu\right)\gamma_\mu q_L - \bar{q}_R\left(\partial_\mu - ig\frac{\tau_i}{2}W_\mu^{Ri} - \frac{i}{6}g'B_\mu\right)\gamma_\mu q_R \tag{9.79}$$

为引进轻子的右手二重态,需要假设存在还未发现的右手中微子或中性重轻子。一种方案是引入如下的左手和右手轻子二重态

$$l_{\mathrm{L}}^{i}=\begin{pmatrix}\nu^{i}\\ e^{i}\end{pmatrix}_{\mathrm{L}},\qquad l_{\mathrm{R}}^{i}=\begin{pmatrix}\nu^{i}\\ e^{i}\end{pmatrix}_{\mathrm{R}},\qquad i=1,2,\cdots$$

$e^{1}=e,e^{2}=\mu,\nu^{1}=\nu_{e},\nu^{2}=\nu_{\mu}$。$l_{\mathrm{L}}^{i}$ 和 $l_{\mathrm{R}}^{i}$ 的量子数分别为 $\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)$ 和 $\left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$,因此在这个方案中 $Y=\frac{1}{2}(B-L)$,其中 $B$ 和 $L$ 分别为重子数和轻子数。

这个模型中有四个带电的和三个中性的规范粒子,除一个光子外,都需要由 Higgs 机制得到质量。此外,夸克和轻子也需要由 Higgs 场的真空平均值得到质量。能够与 $\bar{q}_{\mathrm{L}}^{i},q_{\mathrm{R}}^{i}$ 或 $\bar{l}_{\mathrm{L}}^{i},l_{\mathrm{R}}^{i}$ 组成 $\mathrm{SU(2)_L\times SU(2)_R\times U(1)}$ 不变的汤川耦合项的 Higgs 场 $\phi$ 属于 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}^{*},0\right)$ 表示,这里 * 号代表复共轭表示。取 $\phi$ 场为复场,这个表示有四个复分量。把 $\phi$ 场写成 $2\times2$ 矩阵,使它在 $\mathrm{SU(2)_L\times SU(2)_R}$ 下的变换为

$$\phi\rightarrow \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_{i}^{\mathrm{L}}\frac{\tau_{i}}{2}}\phi\,\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\alpha_{i}^{\mathrm{R}}\frac{\tau_{i}}{2}}$$

其中,$\alpha_{i}^{\mathrm{L}},\alpha_{i}^{\mathrm{R}}$ 分别为 $\mathrm{SU(2)_L}$ 及 $\mathrm{SU(2)_R}$ 的群参数。$\mathrm{SU(2)_L\times SU(2)_R\times U(1)}$ 不变的汤川耦合项一般地可写为

$$\mathscr{L}_{y}=-f_{ij}\bar{q}_{\mathrm{L}}^{i}\phi q_{\mathrm{R}}^{j}+\mathrm{h.c.}$$

$\phi$ 场的动能项为

$$\mathscr{L}_{\phi}=-\mathrm{Tr}\left[\left(\partial_{\mu}\phi^{\dagger}+\mathrm{i}g\frac{\tau_{i}}{2}W_{\mu}^{\mathrm{L}i}\phi^{\dagger}-\mathrm{i}g\frac{\tau_{i}}{2}W_{\mu}^{\mathrm{R}i}\phi^{\dagger}\right)\left(\partial_{\mu}\phi-\mathrm{i}g\frac{\tau_{i}}{2}W_{\mu}^{\mathrm{L}i}\phi+\mathrm{i}g\frac{\tau_{i}}{2}W_{\mu}^{\mathrm{R}i}\phi\right)\right]\tag{9.80}$$

设 $\phi$ 场的中性分量的真空平均值不为零

$$\langle\phi\rangle_{0}=\begin{pmatrix}\frac{v}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{v'}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\tag{9.81}$$

由于 $\phi$ 场的 $Y$ 量子数为零,且

$$\frac{\tau_{3}}{2}\begin{pmatrix}\frac{v}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{v'}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{v}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{v'}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\frac{\tau_{3}}{2}=0$$

由 Higgs 机制的一般原理知道,有两个交换子群没有破缺,它们的生成元分别是 $Q$ 及 $T_3^{\mathrm{L}}+T_3^{\mathrm{R}}$,相应的两个中性规范粒子没有质量。

使除光子以外的其他规范粒子都得到质量的一个可能方式是再引入两个 Higgs 三重态 $\Delta_{\mathrm{L}}$ 和 $\Delta_{\mathrm{R}}$,它们的量子数分别为(1,0,1)及(0,1,1)。由式(9.78)知道 $\Delta_{\mathrm{L}}$ 或 $\Delta_{\mathrm{R}}$ 的三个分量的电荷分别为 2,1,0。$\Delta_{\mathrm{L}}$ 和 $\Delta_{\mathrm{R}}$ 的动能项为

$$\begin{aligned}&-\left[\partial_\mu \Delta_{\mathrm{L}}^\dagger+\mathrm{i}g\Delta_{\mathrm{L}}^\dagger t_i W_\mu^{\mathrm{L}i}+\mathrm{i}g'B_\mu\Delta_{\mathrm{L}}^\dagger\right]\\ &\times\left[\partial_\mu\Delta_{\mathrm{L}}-\mathrm{i}gt_iW_\mu^{\mathrm{L}i}\Delta_{\mathrm{L}}-\mathrm{i}g'B_\mu\Delta_{\mathrm{L}}\right]+\mathrm{L}\leftrightarrow\mathrm{R}\text{ 项}\end{aligned}\tag{9.82}$$

其中,$t_i$ 为 SU(2)群三维表示中生成元的矩阵。设 $\Delta_{\mathrm{L}}$ 和 $\Delta_{\mathrm{R}}$ 的真空平均值为

$$\langle\Delta_{\mathrm{L}}\rangle_0=0,\qquad \langle\Delta_{\mathrm{R}}\rangle_0=\begin{pmatrix}0\\0\\ \dfrac{\lambda}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\tag{9.83}$$

这时除光子外的所有规范粒子都得到了质量。以 $W^{\mathrm{L}\pm}$ 和 $W^{\mathrm{R}\pm}$ 为基,由式(9.80)~(9.83)得到带电中间 Bose 子的质量矩阵为

$$\frac{g^2}{4}\begin{vmatrix}v^2+v'^2 & -2vv'\\ -2vv' & v^2+v'^2+4\lambda^2\end{vmatrix}\tag{9.84}$$

由于在低能实验中没有观察到右手带电流,交换 $W^{\mathrm{R}\pm}$ 所产生的有效 Fermi 作用的耦合常数必须很小。因此要求 $W^{\mathrm{R}\pm}$ 与 $W^{\mathrm{L}\pm}$ 的混合很小,且 $m_{W^{\mathrm{R}\pm}}\gg m_{W^{\mathrm{L}\pm}}$。为满足这个条件要求 $\lambda^2\gg v^2+v'^2$。这时 $W^{\mathrm{R}\pm}$ 和 $W^{\mathrm{L}\pm}$ 近似为质量矩阵的本征态

$$m_{W^{\mathrm{R}\pm}}\simeq g\lambda,\qquad m_{W^{\mathrm{L}\pm}}\simeq\frac{g}{2}\sqrt{v^2+v'^2}\equiv\frac{g}{2}\tilde{v}\tag{9.85}$$

中性规范粒子以 $W^{\mathrm{L}0}$ 和 $W^{\mathrm{R}0}$ 及 $B$ 为基矢的质量矩阵为

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}g^2\tilde{v}^2 & -g^2\tilde{v}^2 & 0\\ -g^2\tilde{v}^2 & g^2(\tilde{v}^2+2\lambda^2) & -2gg'\lambda^2\\ 0 & -2gg'\lambda^2 & 2g'^2\lambda^2\end{vmatrix}\tag{9.86}$$

这个质量矩阵有一个零本征值。由矩阵式(9.86)的第一行知道,相应于零本征值的本征矢量可写为

$$A=\sin\theta(W^{\mathrm{L}0}+W^{\mathrm{R}0})+\sqrt{\cos 2\theta}B\tag{9.87}$$

由矩阵式(9.86)的第三行知

$$\begin{gathered}\sin\theta=eg^{-1},\qquad \sqrt{\cos 2\theta}=g'^{-1}e\\ e=\frac{gg'}{\sqrt{g^2+2g'^2}}\end{gathered}\tag{9.88}$$

利用式(9.87)、(9.88)和(9.78)得到 $A$ 与 Fermi 场的耦合顶点为

$$\sin\theta g(T_3^{\mathrm{L}}+T_3^{\mathrm{R}})+\sqrt{\cos 2\theta}g'Y=eQ$$

这表示 $A$ 与电荷生成元耦合，因此它是光子，$-e$ 即是电子电荷。当 $\lambda^2\gg\tilde{v}^2$ 时，其余两个中性规范粒子 $Z$ 及 $Z'$ 的质量为

$$m_Z^2\simeq\frac{1}{2}\frac{g^2\tilde{v}^2}{\cos^2\theta}=\frac{m_{W^{\mathrm{L}\pm}}^2}{\cos^2\theta}$$

$$m_{Z'}^2\simeq(g^2+g'^2)\lambda^2 \tag{9.89}$$

在能量比 $m_{W^{\mathrm{R}\pm}}$，$m_{Z'}$ 小得多时，只有四个规范粒子 $A$，$W^{\mathrm{L}\pm}$ 及 $Z$ 起主要作用，这时不难验证，$\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}}\times\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{R}}\times\mathrm{U}(1)$ 模型的理论预言与 W-S 模型近似地相同。

Higgs 场 $\Delta_{\mathrm{L}}$，$\Delta_{\mathrm{R}}$ 不能与 Fermi 场组成满足 $\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}}\times\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{R}}\times\mathrm{U}(1)$ 对称性的汤川耦合项，因此 $\Delta_{\mathrm{R}}$ 的真空平均值对通常的 Fermi 子质量项无贡献。但是如果不外加轻子数守恒的要求，这个模型可以有如下的耦合项

$$\mathrm{i}l_{\mathrm{L}}^{iT}\tau_2\tau_a Cl_{\mathrm{L}}^i\Delta_{\mathrm{L}}^a,\qquad \mathrm{i}l_{\mathrm{R}}^i\tau_a\tau_2 Cl_{\mathrm{R}}^j\Delta_{\mathrm{R}}^a \tag{9.90}$$

其中，$C$ 为电荷共轭矩阵。$l^TCl$ 组成洛伦兹不变量，由于轻子的 $Y$ 值为 $-\dfrac{1}{2}$，式(9.90)是 $\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}}\times\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{R}}\times\mathrm{U}(1)$ 不变的。在 9.6 节中将看到这种耦合可以产生所谓 Majorana 质量项。

$\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}}\times\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{R}}\times\mathrm{U}(1)$ 模型有一些变种，选取不同的 Higgs 场和 Fermi 场表示可以得到不同的模型。这类模型的特点是拉氏量是左右对称的。低能现象的左右不对称是由于真空平均值左右不对称。因此宇称不守恒是自发破缺的结果。在高能极限下所有的质量都可以忽略，这时左右对称就恢复了。

## 9.4　Weinberg-Salam 模型与实验的比较

在本节中我们将从带电流和中性流两个方面扼要叙述 Weinberg-Salam 模型的理论预言及其与实验的比较。

### 9.4.1　带电流过程

首先，我们注意到，在低能现象中 W-S 模型，对带电流过程给出了由式(9.1)所表示的有效拉氏函数。因此它能符合 $\mu$ 衰变、$\beta$ 衰变、$\pi$ 介子和奇异粒子的半轻子衰变的实验结果。如 9.1 节中提到的。

后来这方面的实验检验之一是中微子深度非弹性散射过程

$$\nu_\mu + N \to \mu^- + \text{强子}, \qquad \bar{\nu}_\mu + N \to \mu^+ + \text{强子}$$

上式中,$N$ 代表初态原子核。所谓深度非弹性是说动量传递和能量传递都远大于 1GeV。当动量传递 $q^2 \ll m_W^2$ 时,W-S 模型的有效拉氏函数密度为

$$\frac{G}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2}j_\mu)(2\sqrt{2}J_\mu)$$

其中,$j_\mu$ 和 $J_\mu$ 由式(9.51)和(9.68)表示。由这个有效拉氏函数密度计算中微子深度非弹性散射截面需要用部分子模型[10,11]。本书第七章中推导了截面公式,结果是那里的式(7.71)、(7.72)和(7.80)~(7.83)。由于部分子模型在电磁作用的电子(或 $\mu$ 子)-核子深度非弹性过程

$$e(\mu) + N \to e(\mu) + \text{强子}$$

中得到验证,式(7.71)、(7.72)和(7.80)~(7.83)与实验的比较在相当程度上可以检验弱相互作用的 W-S 模型。在已做过的实验中,中微子的能量达到几百 GeV,W-S 理论仍与实验符合得相当好。由式(7.71)和(7.72)知道,左手流和右手流对 $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}y}$ 的贡献有不同的形式,如果忽略反夸克的贡献,对于左手流 $\frac{\mathrm{d}\sigma^{\nu N}}{\mathrm{d}y} \propto$ 常数,$\frac{\mathrm{d}\sigma^{\bar{\nu}N}}{\mathrm{d}y} \propto (1-y)^2$;对右手流 $\frac{\mathrm{d}\sigma^{\nu N}}{\mathrm{d}y} \propto (1-y)^2$,$\frac{\mathrm{d}\sigma^{\bar{\nu}N}}{\mathrm{d}y} \propto$ 常数。实验上没有右手流存在的证据,这是与 W-S 模型一致的。实验与式(7.71)和(7.72)的偏离主要在于这些公式中的 $F_\alpha$ 只与 $x$ 有关,而实验上 $F_\alpha$ 与动量传递 $q^2$ 有缓慢的依赖关系,$F_\alpha = F_\alpha(x, q^2)$。这种偏离与在电子($\mu$ 子)的深度非弹性过程中观察到的相似。它来源于强作用对部分子模型的修正,可以用量子色动力学解释。

第二是关于 $c$ 夸克参加的过程的实验验证。1973、1976 和 1977 年先后发现 $J/\psi$ 粒子、$D$ 粒子和 $F$ 粒子等一系列新粒子,这些粒子的寿命比和它们质量相近的普通粒子长得多,表明它们与一个在强作用中守恒的新量子数有关。它们可以解释为由 $c$ 夸克参加组成的束缚态,$J/\psi = (c\bar{c})$,$D^0 = (c, \bar{u})$,$D^+ = (c, \bar{d})$,$F = (c, \bar{s})$。由于 $\sin^2\theta_c \simeq 0.05$,由式(9.68)可以看到,$c$ 夸克在弱衰变中主要衰变为 $s$ 夸克。因此 $D$ 和 $F$ 粒子主要衰变为带 $K$ 介子的终态。实验上的确如此。如 $D^0$ 的主要衰变道为 $D^0 \to K^- \pi\pi\pi, K^- \pi\pi, K^- \pi^+$ 等,而相应的把 $K^-$ 换成 $\pi$ 的过程分支比则小得多。

### 9.4.2 中性流过程

现在我们来讨论 W-S 模型中的中性流过程。由式(9.73)知道,中性流过程与带电流过程有相同的有效Fermi作用耦合常数。因此,在W-S模型中,对于中性流过程,只有一个可以调节的常数 $\sin^2\theta_W$。下面我们分别讨论 W-S 模型对现在已有

实验结果的各种中性流过程的预言。

首先，讨论纯轻子过程。

(a) $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$

(b) $\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-$

这两个过程由图 9.3 中的Feynman图表示。将中性流中电子的部分写为 $\mathrm{i}g_{\mathrm{L}}\bar{e}_{\mathrm{L}}\gamma_\mu e_{\mathrm{L}} + \mathrm{i}g_{\mathrm{R}}\bar{e}_{\mathrm{R}}\gamma_\mu e_{\mathrm{R}}$。由图 9.3 算得的截面为

$$\sigma_{\nu_\mu e^-} = \frac{8G^2 m_e E_\nu}{\pi}\left\{|g_{\mathrm{L}}|^2 + \frac{1}{3}|g_{\mathrm{R}}|^2\right\} \tag{9.91}$$

$$\sigma_{\bar{\nu}_\mu e} = \frac{8G^2 m_e E_\nu}{\pi}\left\{\frac{1}{3}|g_{\mathrm{L}}|^2 + |g_{\mathrm{R}}|^2\right\} \tag{9.92}$$

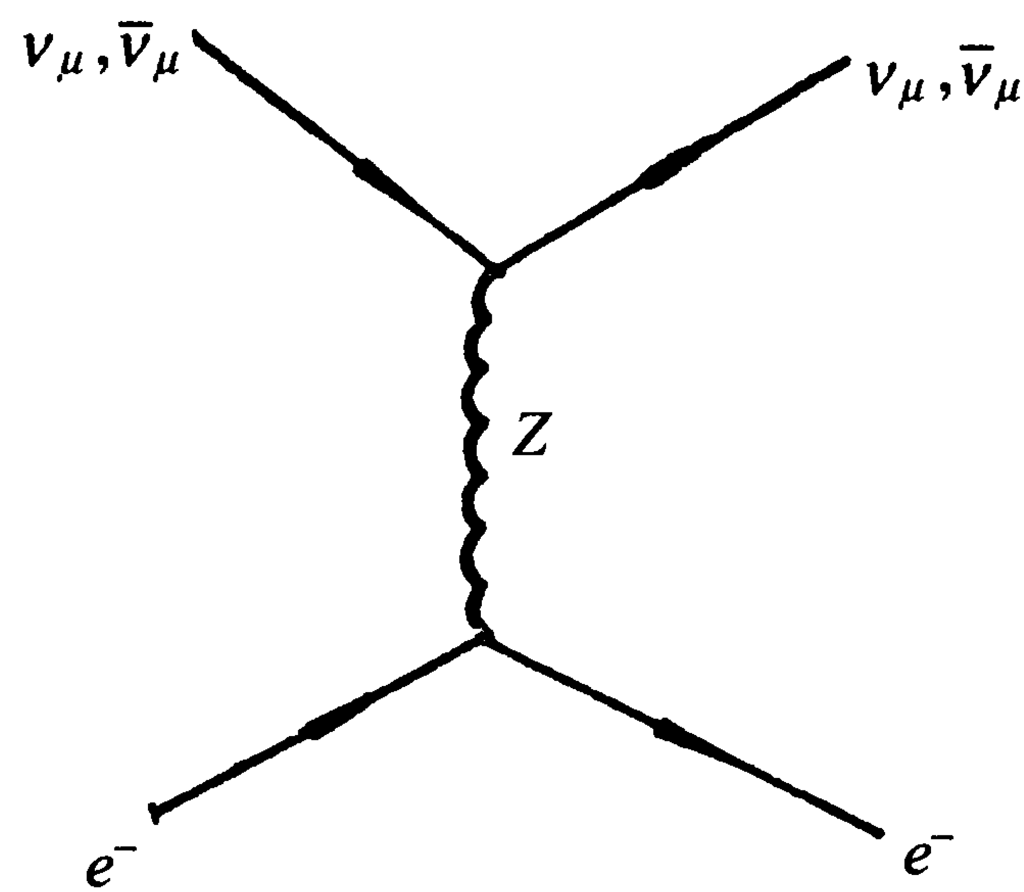



图 9.3

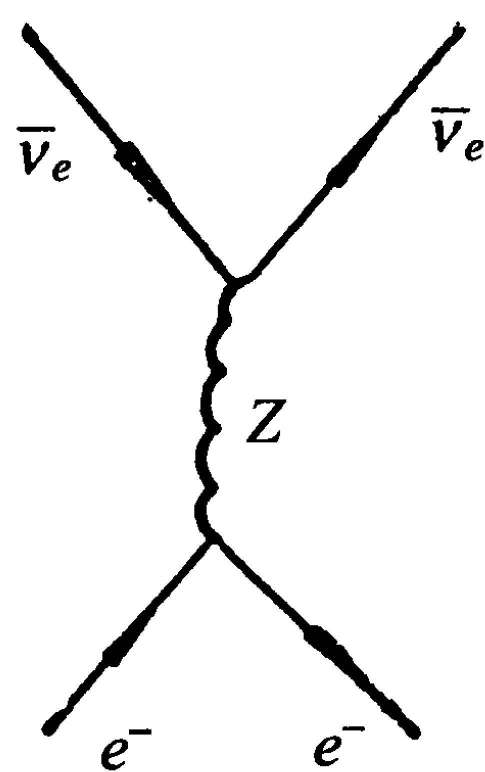
其中，$E_\nu$ 为实验室系中中微子入射能量。由式(9.53)，在 W-S 模型中

$$g_{\mathrm{L}} = -\frac{1}{2} + \sin^2\theta_{\mathrm{W}}, \qquad g_R = \sin^2\theta_{\mathrm{W}} \tag{9.93}$$

(c) $\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-$

这个过程由图 9.4 中的两个 Feynman 图表示，其截面为

$$\sigma_{\bar{\nu}_e e^-} = \frac{8G^2 m_e E_{\bar{\nu}}}{\pi} \times \left\{|g_{\mathrm{R}}|^2 + \frac{1}{3}|1 + g_{\mathrm{L}}|^2\right\} \tag{9.94}$$



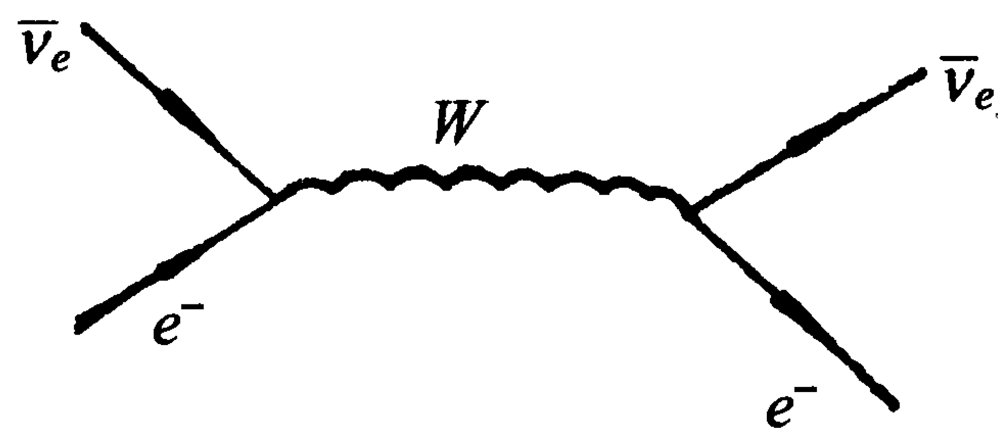




图 9.4

中微子与核子弹性散射过程有

(d) $\nu_\mu + P \rightarrow \nu_\mu + P$

(e) $\bar{\nu}_\mu + P \rightarrow \bar{\nu}_\mu + P$

这是中微子与质子交换 $Z$ 粒子的过程。计算这个过程的截面需要知道 $J_\mu^z$ 在质子态间的矩阵元。对于质子态 $J_\mu^z$ 中只有 $u$ 和 $d$ 夸克的项起作用。在只考虑 $u, d$ 夸

克项时 $J_\mu^z$ 和$J_\mu^{em}$ 一般地可以按同位旋矢量及同位旋标量分解为

$$J_\mu^z = \alpha V_\mu^3 + \beta A_\mu^3 + \frac{1}{3}\gamma V_\mu^0 + \delta A_\mu^0$$

$$J_\mu^{em} = V_\mu^3 + \frac{1}{3}V_\mu^0 \tag{9.95}$$

其中

$$V_\mu^3 = \mathrm{i}\frac{1}{2}(\bar{u},\bar{d})\gamma_\mu\tau_3\begin{pmatrix}u\\d\end{pmatrix}, \qquad V_\mu^0 = \mathrm{i}\frac{1}{2}(\bar{u},\bar{d})\gamma_\mu\begin{pmatrix}u\\d\end{pmatrix}$$

$$A_\mu^3 = \mathrm{i}\frac{1}{2}(\bar{u},\bar{d})\gamma_\mu\gamma_5\tau_3\begin{pmatrix}u\\d\end{pmatrix}, \qquad A_\mu^0 = \mathrm{i}\frac{1}{2}(\bar{u},\bar{d})\gamma_\mu\gamma_5\begin{pmatrix}u\\d\end{pmatrix} \tag{9.96}$$

对于 W-S 模型

$$\alpha = \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2\theta_{\mathrm{W}}), \qquad \beta = \frac{1}{2}$$

$$\gamma = -\sin^2\theta_{\mathrm{W}}, \qquad \delta = 0 \tag{9.97}$$

电磁流在核子态间的矩阵元可以写成如下的形式

$$\langle N,p' \mid J_\mu^{em}(0) \mid N,p\rangle = \bar{u}(p')\Big[\mathrm{i}\gamma_\mu \frac{1}{2}(F_1^s(q^2) + F_1^v(q^2)\tau_3)$$

$$+ \sigma_{\mu\nu}q_\nu \frac{1}{2m_p}\left(\frac{\mu_p + \mu_n}{2}F_2^s(q^2) + \frac{\mu_p - \mu_n}{2}F_2^v(q^2)\tau_3\right)\Big]u(p) \tag{9.98}$$

其中,$q^2=(p'-p)^2$,$\mu_p$ 和 $\mu_n$ 分别为质子和中子的反常磁矩,$F_i^s$ 和 $F_i^v$ 分别对应于$\frac{1}{3}V_\mu^0$ 及 $V_\mu^3$ 项,它们是核子电磁形状因子的同位旋标量和矢量部分。由 Lorentz 不变性及 $G$ 宇称守恒,$A_\mu^i$ 的矩阵元可以写成如下的形式

$$\langle N,p' \mid A_\mu^i(0) \mid N,p\rangle = \bar{u}(p')\frac{\tau_i}{2}[\mathrm{i}\gamma_\mu\gamma_5 F_A(q^2) + \mathrm{i}q_\mu\gamma_5 F_p(q^2)]u(p) \tag{9.99}$$

由于中微子无质量,$\gamma_5 q_\mu$ 项与轻子流相乘后贡献为零。由 $\beta$ 衰变定出 $F_A(0)=1.23$。因此在 $J_\mu^z$ 矩阵元的计算中,仅形状因子 $F_A(q^2)/F_A(0)$有不确定的因素。由式(9.95)、(9.98)和(9.99)算出的微分截面为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma^{(\nu,\bar{\nu})}}{\mathrm{d}q^2} = \frac{G^2}{2\pi}\frac{1}{16m_p^2E^2}\{(q^2 - 4m_pE)^2W_2 + q^2[8m_p^2W_1$$

$$- (q^2 + 4m_p^2)W_2] \pm 2q^2(q^2 - 4m_pE)W_3\} \tag{9.100}$$

其中

$$W_1 = \left(1 + \frac{q^2}{4m_p^2}\right)(\beta+\delta)^2F_A^2(q^2) + \frac{q^2}{4m_p^2}\left(\alpha + \frac{1+\mu_p+\mu_n}{1+\mu_p-\mu_n}\gamma\right)^2 G_M^2(q^2)$$

$$W_2 = (\beta+\delta)^2 F_A^2(q^2) + \Big[(\alpha+\gamma)^2 G_E^2(q^2) + \frac{q^2}{4m_p^2}\Big(\alpha + \frac{1+\mu_p+\mu_n}{1+\mu_p-\mu_n}\gamma\Big)^2 G_M^2(q^2)\Big] \times \Big(1+\frac{q^2}{4m_p^2}\Big)^{-1}$$

$$W_3 = -2\Big(\alpha + \frac{1+\mu_p+\mu_n}{1+\mu_p-\mu_n}\gamma\Big)(\beta+\delta) G_M(q^2) F_A(q^2) \qquad (9.101)$$

其中，$G_M = F_1 + 2m_p F_2$，$G_E = F_1 - \frac{q^2}{2m_p}F_2$。

中性流中微子深度非弹性过程有

(f) $\nu_\mu + N \rightarrow \nu_\mu +$ 强子

(g) $\bar{\nu}_\mu + N \rightarrow \bar{\nu}_\mu +$ 强子

用与带电流深度非弹性过程一样的部分子模型计算可以得到(f)和(g)两个过程的散射截面。显然，过程(f)和(g)的截面公式形式分别和式(7.71)和(7.72)一样。$F_{左}$ 和 $F_{右}$ 的表示式的形式也和式(7.73)、(7.74)一样，只是其中的系数 $c_\alpha$ 和 $c'_\alpha$ 应由式(9.53)和(9.72)定出。

其他实验研究过的过程有

(h) $\nu_\mu + N \rightarrow \nu_\mu + N + \pi^0$

(i) $\bar{\nu}_\mu + N \rightarrow \bar{\nu}_\mu + N + \pi^0$

(j) 用极化电子束轰击氘靶，

$$e^-\ (\text{极化}) + D \rightarrow e^- + \text{强子}$$

由于中性流破坏宇称守恒，螺旋性为 $\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$ 的入射截面不相等。实验测量不对称系数

$$A = \frac{\sigma(+) - \sigma(-)}{\sigma(+) + \sigma(-)}$$

其中，+，- 表示电子的螺旋性的符号，$A$ 也可以用部分子模型计算，得到

$$A = \frac{q^2 G_F}{2\sqrt{2}\alpha}\Big[a + \frac{1-(1-y)^2}{1+(1-y)^2} b\Big]$$

$$a = 2\sin^2\theta_W - \frac{9}{10}$$

$$b = -\frac{9}{10}(1 - 4\sin^2\theta_W)$$

对以上叙述的 10 个过程，在取

$$\sin^2\theta_W \simeq 0.22 \qquad (9.102)$$

时，理论都与实验在误差范围内符合，其中过程(f)、(g)和(j)的实验结果和理论计

算比较精确。由于在 W-S 模型中对这些中性流过程只有一个可调的参数 $\sin^2\theta_W$，这个成就是引人注目的。

1976 年发现了质量为 1.78GeV 的 $\tau$ 重轻子、1977 年发现的质量接近 10GeV 的 $\Upsilon$ 矢量粒子寿命比较长，它是由另一种新夸克 $b$ 组成的束缚态($b\bar{b}$)，后来又发现了($b\bar{u}$)束缚态的粒子 $B$。为了容纳这些粒子需要扩大原来的 W-S 模型，这只要引进另一个夸克 $SU(2)_L$ 二重态

$$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$$

及另一个轻子 $SU(2)_L$ 二重态

$$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$$

及相应的右手 $SU(2)_L$ 单态就可以了。

由式(9.102)中的 $\sin^2\theta_W$ 值及式(9.58)和(9.59)得到中间 Bose 子的质量为

$$m_W \simeq 83\text{GeV}/c^2 \qquad m_Z \simeq 93\text{GeV}/c^2 \tag{9.103}$$

1983 年在欧洲联合核子中心的对撞机上先后发现了 $W^\pm$ 和 $Z$ 粒子。它们的质量在误差范围内与式(9.103)符合。这项发现证实了 W-S 模型的一个关键之点，使得人们相信弱电统一规范理论是正确的弱作用理论①。

# 9.5 CP 破坏的规范理论

## 9.5.1 CP 破坏的实验结果和唯象理论

直到本世纪初 CP 破坏的效应实验上只在长寿命中性 $K$ 介子的衰变过程 $K_L^0 \to \pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0$ 和 $K_L^0 \to \pi^\pm l^\mp \nu_l$ 的电荷不对称性中观察到。对 S 波，2π 态的 CP 值为 +，$K_L^0$ 主要衰变为 CP 值为 − 的 3π 态，因此，观察到 $K_L^0 \to 2\pi$ 衰变证明 CP 破坏。实验数据是

$$\eta_{+-} \equiv |\eta_{+-}| e^{i\phi_{+-}} \equiv \frac{A(K_L^0 \to \pi^+\pi^-)}{A(K_S^0 \to \pi^+\pi^-)}$$

$$\eta_{00} \equiv |\eta_{00}| e^{i\phi_{00}} \equiv \frac{A(K_L^0 \to \pi^0\pi^0)}{A(K_S^0 \to \pi^0\pi^0)}$$

---

① 注：从那时以后，W-S 模型又通过了大量实验的检验。除 Higgs 粒子外，包含三代夸克和轻子(见 9.5 节中的讨论)的 W-S 模型中预言的粒子都已在实验中被发现。特别是，1989～2003 年间在 CERN，SLAC 和 Fermilab 三个实验室中在 90～200GeV 的高能区做了一系列精确的实验，与作了弱作用单圈修正的 W-S 模型精确计算结果比较，符合得相当好。但是也存在一些矛盾，有待澄清。由于成功地解释了实验，包含三代夸克和轻子的 W-S 模型与 QCD 合在一起被称为标准模型。

$$|\eta_{+-}|\simeq|\eta_{00}|\simeq 2.3\times 10^{-3}$$

$$\phi_{+-}\simeq\phi_{00}\simeq 44^{\circ}$$

$$\delta\equiv\frac{\Gamma(K_L^0\rightarrow\pi^- l^+\bar{\nu}_l)-\Gamma(K_L^0\rightarrow\pi^+ l^-\nu_l)}{\Gamma(K_L^0\rightarrow\pi^- l^+\bar{\nu}_l)+\Gamma(K_L^0\rightarrow\pi^+ l^-\nu_l)}\simeq 3.3\times 10^{-3}$$

注意,以上实验结果与 $\eta_{+-}\simeq\eta_{00}$ 不矛盾。这个实验结果有一种简单的解释,即破坏 CP 的作用像不破坏 CP 的作用一样满足同位旋选择规则 $\Delta I=\frac{1}{2}$,这时 $K_L^0$ 和 $K_S^0$ 主要衰变到 $I=0$ 的 $2\pi$ 道。

在其他过程中寻找 CP 破坏的效应都没有找到。这些实验的精确度一般是百分之几。精确度最高的是中子电偶极矩的实验,给出的上限是

$$|D_n|<10^{-26}e\text{cm}$$

由于 CP 破坏,$K_L^0$ 和 $K_S^0$ 中各混有 CP 宇称相反的成分。混合系数可以用质量-衰变宽度矩阵的矩阵元表示。以强作用的本征态 $|K^0\rangle$ 和 $|\bar{K}^0\rangle$ 为基矢,中性 $K$ 介子的质量-衰变宽度矩阵可写为

$$\widetilde{M}_{\alpha\beta}=\left(M-\frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma\right)_{\alpha\beta},\qquad \alpha,\beta=1,2=K^0,\bar{K}^0$$

到弱作用哈密顿量 $H_w$ 的第二阶

$$\Gamma_{12}=\Gamma_{21}^*=2\pi\sum_n\langle K^0|H_w|n\rangle\langle n|H_w|\bar{K}^0\rangle\delta(E_n-m_K)$$

$$M_{12}=M_{21}^*=\langle K^0|H_w|\bar{K}^0\rangle+\sum_n\mathrm{P}\left\{\frac{\langle K^0|H_w|n\rangle\langle n|H_w|\bar{K}^0\rangle}{m_K-E_n}\right\}\tag{9.104}$$

上式中,P 表示在奇点处取主值。假设 CPT 不变性,$(\mathrm{CPT})H_w(\mathrm{CPT})^{-1}=H_w$

$$M_{11}=M_{22}=\langle K^0|H_w|K^0\rangle+\sum_n\mathrm{P}\left\{\frac{\langle K^0|H_w|n\rangle\langle n|H_w|K^0\rangle}{m_K-E_n}\right\}$$

$$\Gamma_{11}=\Gamma_{22}=2\pi\sum_n\langle K^0|H_w|n\rangle\langle n|H_w|K^0\rangle\delta(E_n-m_K)$$

质量-宽度矩阵的本征值为

$$m_{\substack{L\\S}}-\frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma_{\substack{L\\S}}=\widetilde{M}_{11}\pm\sqrt{\widetilde{M}_{12}\widetilde{M}_{21}}$$

$m_L,m_S$ 和 $\Gamma_L,\Gamma_S$ 分别代表 $K_L^0,K_S^0$ 的质量和宽度。相应的本征矢量可写为

$$K_{\substack{L\\S}}^0=\frac{1}{\sqrt{2(1+|\bar{\varepsilon}|^2)}}[(1+\bar{\varepsilon})K^0\pm(1-\bar{\varepsilon})\bar{K}^0]\tag{9.105}$$

其中

$$\bar{\varepsilon}=\frac{\widetilde{M}_{12}-\widetilde{M}_{21}}{(\sqrt{\widetilde{M}_{12}}+\sqrt{\widetilde{M}_{21}})^2}$$

$\bar{\varepsilon}$ 是混合系数，它依赖于 $|K^0\rangle$ 和 $|\overline{K}^0\rangle$ 相对位相的选择。我们选 $|\overline{K}^0\rangle=-\mathrm{CP}|K^0\rangle$。因此在 $\bar{\varepsilon}=0$ 时 $K_L^0$，$K_S^0$ 分别为 CP = − 和 + 的本征态。令 $H_w=H_w^+ + H_w^-$

$$(\mathrm{CP})^{-1}H_w^{\pm}(\mathrm{CP})=\pm H_w^{\pm}$$

如果 CP 守恒，$H_w^-=0$。这时由式(9.104)知道 $\Gamma_{12}$ 和 $M_{12}$ 都是实数，并且有 $\Gamma_{12}=\Gamma_{21}$，$M_{12}=M_{21}$，因而 $\bar{\varepsilon}=0$。在 CP 破坏时，$\Gamma_{12}$ 和 $M_{12}$ 一般为复数。此时 $\bar{\varepsilon}\neq 0$。由于观察到的 CP 破坏效应很小，我们可取近似

$$\mathrm{Re}M_{12}\gg \mathrm{Im}M_{12},\qquad \mathrm{Re}\Gamma_{12}\gg\mathrm{Im}\Gamma_{12}$$

这时

$$\bar{\varepsilon}=\frac{\widetilde{M}_{12}-\widetilde{M}_{21}}{4\sqrt{\widetilde{M}_{12}\widetilde{M}_{21}}+(\sqrt{\widetilde{M}_{12}}-\sqrt{\widetilde{M}_{21}})^2}\simeq\frac{\widetilde{M}_{12}-\widetilde{M}_{21}}{4\sqrt{\widetilde{M}_{12}\widetilde{M}_{21}}}$$

因此有

$$\bar{\varepsilon}\simeq\frac{\frac{1}{2}\mathrm{Im}\Gamma_{12}+\mathrm{i}\mathrm{Im}M_{12}}{\frac{\mathrm{i}}{2}(\Gamma_S-\Gamma_L)+(m_L-m_S)}\tag{9.106}$$

由式(9.105)及 CPT 定理并利用不破坏 CP 的弱作用的 $\Delta S=\Delta Q$ 选择规则可得

$$\delta\simeq 2\mathrm{Re}\,\bar{\varepsilon}\tag{9.107}$$

$K^0\to 2\pi$ 过程的终态可以按同位旋分解为 $I=0$ 和 $I=2$ 两个部分。令

$$\varepsilon=\frac{\langle I=0|H_w|K_L\rangle}{\langle I=0|H_w|K_S\rangle},\qquad \varepsilon'=\frac{\langle I=2|H_w|K_L\rangle}{\sqrt{2}\langle I=0|H_w|K_S\rangle}\tag{9.108}$$

$$\omega=\frac{\langle I=2|H_w|K_S\rangle}{\langle I=0|H_w|K_S\rangle}\tag{9.109}$$

则测量到的 $K^0\to 2\pi$ CP 破坏参量可写为

$$\eta_{+-}=\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}\omega}(\varepsilon+\varepsilon')$$

$$\eta_{00}=\frac{1}{1-\sqrt{2}\omega}(\varepsilon-2\varepsilon')\tag{9.110}$$

由于 CP 守恒的过程中 $\Delta I=\frac{1}{2}$ 是很好的选择规则，我们有 $\omega\ll 1$，因此式(9.109)中的 $\omega$ 可以忽略。把振幅 $\langle I|H_w|K^0\rangle$ 写为

$$\langle I \mid H_w \mid K^0 \rangle = A_I e^{i\delta_I}, \qquad I = 0,2 \tag{9.111}$$

其中，$\delta_I$ 为同位旋 = $I$ 的态的 $\pi$-$\pi$ 散射相移。对强相互作用本征态，在时间反演下，$|K^0\rangle$波函数的变换可取为$\langle |K^0\rangle \to \langle K^0| \rangle$。式(9.111)中的末态是出射波态$\langle \pi\pi, \text{out}|$，$\langle \pi\pi, \text{out}| \rangle$，有末态相互作用相因子 $e^{i\delta_I}$；在时间反演下$\langle \pi\pi, \text{out}| \rangle$变成入射波态波函数$\langle \mid \pi\pi, \text{in} \rangle$，$\langle \pi\pi, \text{in}| \rangle$有相因子 $e^{-i\delta_I}$。如果 $H_w$ 有时间反演不变性，则

$$\langle \pi\pi, \text{out} \mid H_w \mid K^0 \rangle = \langle \pi\pi, \text{in} \mid H_w \mid K^0 \rangle^*$$

因此可得，式(9.111)中的 $A_I$ 应为实数。由于 CP 破坏，因而时间反演也破坏，$A_I$ 实际上是复数，它可以写为

$$A_I = |A_I| e^{i\zeta_I} \tag{9.112}$$

由 CPT 不变性和式(9.111)得到

$$-\langle \pi\pi, \text{out} \mid H_w \mid K^0 \rangle = \langle \pi\pi, \text{in} \mid H_w \mid \overline{K}^0 \rangle^*$$

$$\langle I \mid H_w \mid \overline{K}_0 \rangle = -A_I^* e^{i\delta_I} \tag{9.113}$$

由式(9.105)、(9.108)、(9.111)和(9.113)可得

$$\varepsilon \doteq \bar{\varepsilon} + i\zeta_0 \tag{9.114}$$

$$\varepsilon' \doteq \frac{i}{\sqrt{2}} e^{i(\delta_2 - \delta_0)} \left| \frac{A_2}{A_0} \right| (\zeta_2 - \zeta_0) \tag{9.115}$$

$\bar{\varepsilon}$ 的值依赖于 $|K^0\rangle$和$|\overline{K}^0\rangle$态的相位的选择。如果我们重新定义这两个态，使$|K^0\rangle \to e^{-i\zeta_0}|K^0\rangle$，$|\overline{K}^0\rangle \to e^{i\zeta_0}|\overline{K}^0\rangle$，则式(9.111)和(9.113)中的 $A_0$ 变为实数，式(9.114)中的 $i\zeta_0$ 项消失，它被吸收到新的 $\bar{\varepsilon}$ 值中了。因此 $\varepsilon$ 本质上是$|K^0\rangle$和$|\overline{K}^0\rangle$在质量矩阵中的混合所产生的 CP 破坏效应。而式(9.115)中的 $\varepsilon'$则是由$|K^0\rangle$和$|\overline{K}^0\rangle$衰变振幅的 CP 不对称相因子引起的。注意，此项的存在要求衰变振幅中包含两项，它们有不同的 CP 不对称相因子，因而不能通过重新定义$|K^0\rangle$和$|\overline{K}^0\rangle$的位相消去。

实验结果表明

$$|\varepsilon| \simeq 2.3 \times 10^{-3} \qquad |\varepsilon'/\varepsilon| < 10^{-2}\text{①} \tag{9.116}$$

描述 CP 破坏的有效拉氏函数现在还不清楚。一种描述 CP 破坏的唯象理论称为超弱理论[14]。在这种理论中，拉氏函数有一项 $\Delta S = 2$。强度$\sim 10^{-8}G$ 的破坏 CP 的 Fermi 作用项。由于 $\Delta S = 2$ 的选择规则，在微扰论最低阶，这项在 $K^0$ 或 $\overline{K}^0$ 与 $2\pi$ 或 $\pi l \nu$ 态间的矩阵元为零。但是它对 $K^0$ 和 $\overline{K}^0$ 的质量矩阵元 $M_{12}$有贡献，

① 注：$\varepsilon'/\varepsilon$ 值已于 2001 年由实验测量出来，约为 $2 \times 10^{-3}$。

因而对混合系数 ε 有贡献。这时，在 $K_L^0$ 介子的衰变中破坏 CP 的效应几乎完全是由混合引起的，由式(9.105)可以得到

$$\eta_{+-} \simeq \eta_{00} \simeq \bar{\varepsilon}, \qquad \delta \simeq 2 \mid \eta_{+-} \mid \cos\varphi_{+-}$$

此外，$\mathrm{Im}M_{12}$是 $H_w^-$ 的量级，$\mathrm{Im}\Gamma_{12}$是 $H_w^- H_w^+$ 的量级，由式(9.106)可得

$$\phi_{+-} \simeq \phi_{00} \simeq \arg\varepsilon \simeq \tan^{-1}\left[\frac{2(m_L - m_S)}{\Gamma_S - \Gamma_L}\right]$$

代入 $m_L - m_S$ 和 $\Gamma_S - \Gamma_L$ 的实验值得到 $\phi_{+-} \simeq \phi_{00} \simeq 45°$。这个理论很好地解释了实验已观察到的 CP 破坏效应。由于作用是超弱的，在其他过程中，CP 破坏效应都观察不到。在 $K^0$ 介子衰变中由于质量差 $m_L - m_S$ 很小，是 $H_w$ 的二阶的量级，所以它在 ε 中的贡献被放大了，$\varepsilon \sim \dfrac{10^{-8} G}{G^2 m_K^2} \sim 10^{-3}$。

另一类唯象理论称为毫弱理论。在这类理论中，拉氏函数有一项强度为 $10^{-3} G$的破坏 CP 的 Fermi 作用项，它满足 $\Delta S = 1, \Delta I = \dfrac{1}{2}$的选择规则。因此，这样的项可以在最低阶给出 $K^0, \overline{K}^0$ 到 2π 态的跃迁。但是，如前面所述，我们可以重新定义$|K^0\rangle$和$|\overline{K}^0\rangle$态的位相使 $\zeta_0 = 0$。由于现在不存在 $I = 2$ 的末态，$A_2 = 0$。因此，由式(9.114)和(9.115)得到

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon}, \qquad \varepsilon' = 0 \tag{9.117}$$

$\bar{\varepsilon}$ 是$H_w^-/H_w^+$ 的量级，由上式和式(9.116)得到 $H_w^-/H_w^+ = O(10^{-3})$，因此 $H_w^-$ 称为毫弱作用。由于 $\varepsilon' = 0$，这时 $K_L^0 \to 2\pi$ 的 CP 破坏效应几乎全部来自混合系数。由于 $K^0$ 到 $I = 0$ 的 2π 态以外的其他态的衰变分支比只有 $10^{-4}$，由式(9.117)和(9.104)$\Gamma_{12}$近似为实数，因此 arg $\varepsilon \simeq 45°$。所以这样的毫弱理论能近似地给出超弱理论关于 $K_L^0$ 衰变的结果。但是某些过程中毫弱理论有 $10^{-3}$数量级的 CP 破坏效应。目前最严格的检验是中子电偶极矩的实验上限。

CP 破坏在基本理论中的起源还不清楚，在 9.5.2 小节中我们将讨论弱电统一理论中的 CP 破坏。一般来说，如果相互作用哈密顿量中的耦合常数有不能通过场的重新定义来消去的复相因子，CP 就破坏了。这是因为，按 CPT 定理，如果 CP 不破坏时间反演就不会破坏。相互作用哈密顿量一般可写为 $\sum_i g_i O_i$ + h.c.，其中 $O_i$ 是场算符的乘积，$g_i$ 是耦合常数。在时间反演下，场算符的变换是线性的，不会变为其厄米共轭(参看 Bjorken-Drell 书 15.13 节)。因此，如果 $O_i$ 不是厄米的就不会变为其厄米共轭。如果要保持哈密顿量在时间反演下不变，$O_i$ 最多变一个相因子，已说过这个相因子不能消去 $g_i$ 的位相，但是在时间反演下 $g_i$ 要变为其复共轭。因此，如果 $g_i$ 有复相因子时间反演不变必然破坏。

### 9.5.2　弱电统一理论中的 CP 破坏

在弱电统一理论中可以用不同的方式引入 CP 破坏。在本小节中我们将着重讨论 W-S 类型的模型中的 CP 破坏问题。

首先，讨论有一个 Higgs $SU(2)_L$ 二重态和 $N$ 个夸克 $SU(2)_L$ 二重态的情形[13]。用符号

$$q_{0L}^i = \begin{pmatrix} u_0^i \\ d_0^i \end{pmatrix}_L, \qquad i = 1,2,\cdots,N$$

表示这些夸克二重态，右手的夸克 $u_{0R}^i, d_{0R}^i$ 都是单态。Higgs 场与夸克的耦合项的最一般形式为

$$\mathscr{L}_y = -\sum_{i,j=1}^{N} \{ f_{ij}\bar{q}_{0L}^i \tilde{\phi} u_{0R}^j + f'_{ij}\bar{q}_{0L}^i \phi d_{0R}^j \} + \text{h.c.} \tag{9.118}$$

其中，$f_{ij}, f'_{ij}$ 可以是复数。在过渡到幺正规范后，将式(9.40)代入式(9.118)得到

$$\mathscr{L}_y = -\sum_{i,j=1}^{N} \{ \bar{u}_{0L}^i M_{ij}^{(u)} u_{0R}^j + \bar{d}_{0L}^i M_{ij}^{(d)} d_{0R}^j \} \left(1 + \frac{\varphi}{v}\right) + \text{h.c.} \tag{9.119}$$

其中

$$M_{ij}^{(u)} = f_{ij}\frac{v}{\sqrt{2}}, \qquad M_{ij}^{(d)} = f'_{ij}\frac{v}{\sqrt{2}} \tag{9.120}$$

一般是复数。

质量矩阵 $M_{ij}^{(u)}$ 和 $M_{ij}^{(d)}$ 可以通过对左、右手的 $u$ 型和 $d$ 型夸克分别做幺正变换来使其对角化。这是因为对任意矩阵 $M$(不一定厄米)，存在幺正矩阵 $V_L$ 和 $V_R$ 使

$$V_L M V_R^\dagger = M_D \tag{9.121}$$

为对角矩阵。我们现在来证明式(9.121)。考虑矩阵 $MM^\dagger$，它是厄米的，并且有正定的本征值。因此存在幺正变换 $V_L$ 使

$$V_L M M^\dagger V_L^\dagger = M_D^2 \tag{9.122}$$

$V_L$ 不是唯一的，它还有乘一个对角位相矩阵的任意性。令 $F=(F_{mn})$

$$F_{mn} = \delta_{mn} e^{i\alpha_n} \tag{9.123}$$

则由式(9.122)知

$$(FV_L)MM^\dagger(FV_L)^\dagger = M_D^2 \tag{9.124}$$

可以选择矩阵 $F$，使式(9.121)中的 $M_D$ 的对角元为非负实数

$$(M_D)_{mn} = \delta_{mn} m_n, \qquad m_n \geqslant 0 \tag{9.125}$$

令

$$V_L^\dagger M_D V_L = H \tag{9.126}$$

$H$ 是一个厄米矩阵。又令

$$S = H^{-1} M \tag{9.127}$$

$$SS^\dagger = H^{-1} M M^\dagger H^{-1} = H^{-1} V_L^\dagger M_D^2 V_L H^{-1} = H^{-1} HHH^{-1} = I \tag{9.128}$$

因此 $S$ 是一个幺正矩阵。由式(9.126)及(9.127)得到

$$M_D = V_L H V_L^\dagger = V_L M S^\dagger V_L^\dagger$$

由上式得到式(9.121),其中

$$V_R = V_L S \tag{9.129}$$

为幺正矩阵。令

$$u_0 \equiv \begin{pmatrix} u_0^1 \\ u_0^2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

记幺正变换为

$$u_{L,R} = V_{L,R}^{(u)} u_{0L,R}, \qquad d_{L,R} = V_{L,R}^{(d)} d_{0L,R} \tag{9.130}$$

这里,$V_{L,R}^{(u)}$,$V_{L,R}^{(d)}$都是 $N \times N$ 幺正矩阵,它们满足

$$V_L^{(u)} M^{(u)} V_R^{(u)\dagger} = | m_u^i \delta_{ij} |, \qquad V_L^{(d)} M^{(d)} V_R^{(d)\dagger} = | m_d^i \delta_{ij} |$$

由此可得

$$| (m_u^i)^2 \delta_{ij} | = V_R^{(u)} M^{(u)\dagger} M^{(u)} V_R^{(u)\dagger} = V_L^{(u)} M^{(u)} M^{(u)\dagger} V_L^{(u)\dagger}$$

因此,$V_{L,R}^{(u)}$可以用标准的方法求出。对于 $M^{(d)}$ 的对角化,自然有相似的公式。用质量矩阵的本征矢量表示,$\mathscr{L}_y$ 变为

$$\mathscr{L}_y = -\sum_{i=1}^{N} (m_u^i \bar{u}^i u^i + m_d^i \bar{d}^i d^i)\left(1 + \frac{\varphi}{v}\right) \tag{9.131}$$

将式(9.130)代入夸克的带电流表示式,得

$$J_\mu = \mathrm{i} \sum_{i=1}^{N} \bar{u}_{0L}^i \gamma_\mu d_{0L}^i = \mathrm{i} \sum_{i,j=1}^{N} \bar{u}_L^i \gamma_\mu U_{ij} d_L^j \tag{9.132}$$

其中,$U = V_L^{(u)\dagger} V_L^{(d)}$ 是一个 $N \times N$ 幺正矩阵。它有 $N^2$ 个实参数。通过位相变换 $u^i \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_u^i} u^i$,$d^i \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_d^i} d^i$ 重新定义夸克算符,这时 $U_{ij} \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\delta_u^i - \delta_d^j)} U_{ij}$,因此适当地选择 $2N-1$ 个位相差 $\delta_u^i - \delta_d^i$ 可以使 $U$ 的 $2N-1$ 个矩阵元变为实数。这时 $U$ 矩阵中还有 $N^2 - (2N-1) = (N-1)^2$ 个实参数。

在原始的 W-S-GIM 模型中，只有两个夸克二重态，$U$ 为 $2\times2$ 幺正矩阵，它有四个实参数。通过重新定义夸克场使 $U$ 的三个矩阵元变为实数。这时 $U$ 中只有一个实参数，它可一般地写为

$$U=\begin{vmatrix}\cos\theta_c & \sin\theta_c\\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c\end{vmatrix}\tag{9.133}$$

将式(9.133)代入式(9.132)即得夸克的 Cabbibo 流。Higgs 场的位能项是

$$V(\phi)=-\mu^2\phi^\dagger\phi+\lambda(\phi^\dagger\phi)^2$$

由于 $V$ 的厄米性，$\mu^2$ 及 $\lambda$ 必须是实数。由式(9.131)～(9.133)可以看到，这时拉氏函数回到 9.2 节中所写出的形式，其中所有耦合常数都是实的。因此，只有两个左手夸克二重态和一个 Higgs 场二重态的原始 W-S-GIM 模型不能有 CP 破坏。

附带地说，由以上的讨论可以看到，在原始的 W-S-GIM 模型中 Cabbibo 流的形式是自然得到的，由于只有两个夸克二重态和一个 Higgs 二重态，带电流一定可以写成这样的形式，与模型中的参数无关，只有 $\theta_c$ 的数值才依赖于参数的选择。

在 $N\geqslant3$ 时，$U$ 中的复矩阵元不能通过位相变换全部变成实数。这时带电流过程有 CP 破坏。例如，在 Kobayashi 和 Maskawa 考虑的 $N=3$ 的情形，$u^i=(u,c,t)$，$d^i=(d,s,b)$。在做位相变换后可使 $U$ 的第一行和第一列的元素为实数，这时幺正矩阵 $U$ 可以一般地写为

$$U=\begin{vmatrix}c_1 & -s_1c_3 & -s_1s_3\\ s_1c_2 & c_1c_2c_3-s_2s_3e^{i\delta} & c_1c_2s_3+s_2c_3e^{i\delta}\\ s_1s_2 & c_1s_2c_3+c_2s_3e^{i\delta} & c_1s_2s_3-c_2c_3e^{i\delta}\end{vmatrix}\tag{9.134}$$

其中，$c_i=\cos\theta_i$，$s_i=\sin\theta_i\,(i=1,2,3)$。为与 Cabbibo 流符合，$s_2$，$s_3$ 必须很小。$\delta\neq0$ 时带电流产生 CP 破坏。因此，在这个模型中 CP 破坏与 Cabbibo 角有同一起源，都来自夸克质量矩阵中不同 $\mathrm{SU(2)_L}$ 多重态的混合。

现在我们直接检验有 $N$ 代夸克的 W-S 模型的 CP 破坏。在 CP 变换下物理 Higgs 场、规范场和夸克场分别做如下的变换

$\varphi\to\varphi$

$A_\mu\to\pm A_\mu$

$Z_\mu\to\pm Z_\mu$，　　这里 + 号对应于 $\mu=1,2,3$，− 号对应于 $\mu=4$。

$W_\mu\to\pm\overline{W}_\mu$

$\psi^i\to-e^{i\alpha^i}\gamma_2\overline{\psi^i}$，　　$\overline{\psi^i}\to e^{-i\alpha^i}\psi^i\gamma_2$

考虑到 Dirac 场的反对易性，由上式可得带电流的变换

$$\bar{J}_\mu=U_{ij}\bar{J}^{(ij)}_{L\mu}=i\,\overline{u^i_L}\gamma_\mu U_{ij}d^j_L\to\pm e^{i(\alpha^j-\beta^i)}\,i\,\overline{d^i_L}\gamma_\mu U^T_{ij}u^j_L=\pm e^{i(\alpha^j-\beta^i)}U^T_{ij}J^{(ij)}_{L\mu}$$

$$J_\mu \to \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_i-\beta_j)} U_{ij}^* \bar{J}_{\mathrm{L}\mu}^{(ij)}$$

带电流耦合 $W_\mu J_\mu + \overline{W}_\mu \bar{J}_\mu$ 在 CP 下不变要求 $J_\mu \to \pm \bar{J}_\mu$。因此上式要求 $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha^i-\beta^j)} \cdot U_{ij}^* = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha^i-\beta^j)} U_{ij}$，即 $\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha^i-\beta^j)} U_{ij}$ 为实数，也就是要求通过重新定义 $2N$ 个夸克场的位相使 $U_{ij}$ 为实数。前面已经证明在 $N \geqslant 3$ 时这个条件一般不能满足。容易验证 W-S 模型中物理 Higgs 粒子的耦合和规范场与中性流的耦合都是 CP 不变的。

由 $b$ 夸克组成的介子已于 1977 年后在实验中发现，后来又发现了带电的重轻子 $\tau$，因此客观世界的描述必须用第三代的夸克和轻子。由 $b$ 和 $\bar{u}$ 或 $\bar{d}$ 组成的 $B$ 介子的衰变数据已证实 $s_1 \gg s_2, s_3$。$s_1 \simeq \sin\theta_c \simeq 0.22, s_2, s_3 \simeq O(10^{-2})$。

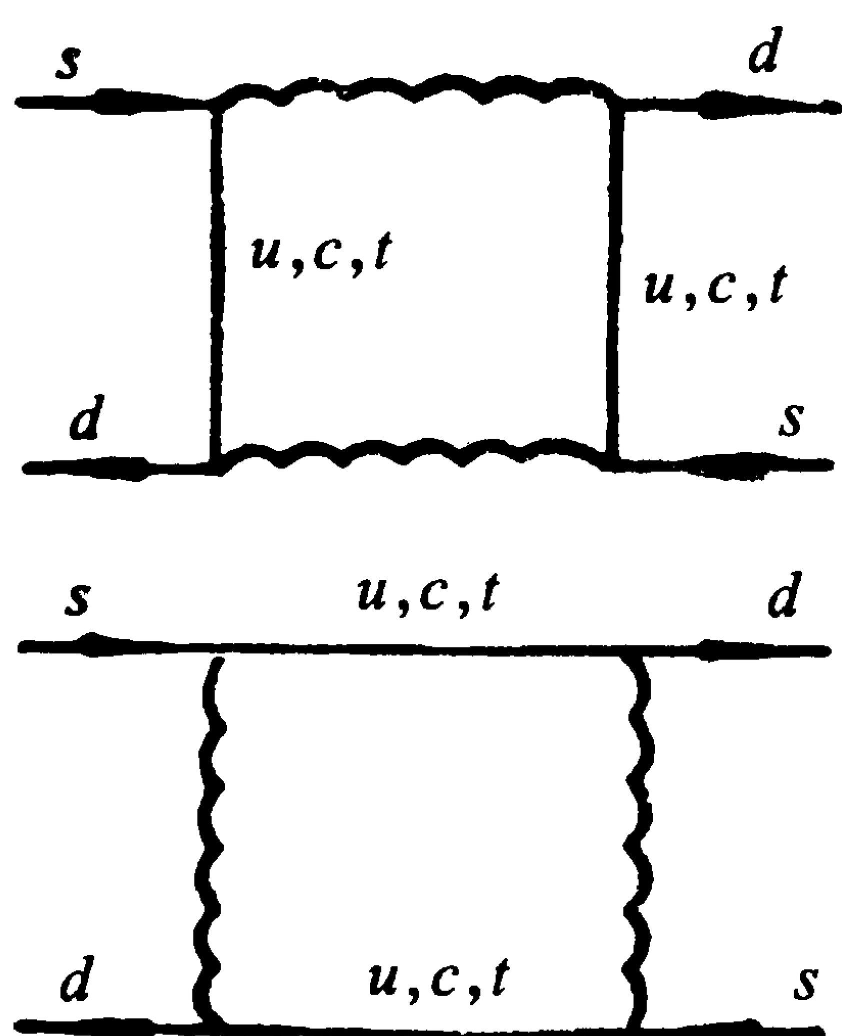



图 9.5

把 $K^0$ 和 $\overline{K}^0$ 介子看作$(d\bar{s})$和$(s\bar{d})$的夸克组合。计算它们的 CP 破坏效应的方法是考虑包含 $s, \bar{d}, \bar{s}$ 和 $d$ 外线的 Feynman 图形，由此得到包含 CP 破坏的 $\Delta s = 2$ 有效哈密顿量 $H_{\mathrm{W}}^{\Delta s=2}$。这样得到的 $H_{\mathrm{W}}^{\Delta s=2}$ 由 $s, \bar{d}, \bar{s}$ 和 $d$ 场算符组成，它已包含 $\Delta s = 1$ 的有效作用的二次项。直接把它在 $K^0$ 和 $\overline{K}^0$ 态之间取矩阵元即可算出 $K^0$ 和 $\overline{K}^0$ 系统的 CP 破坏参数 $\widetilde{M}_{\alpha\beta}$[14]。

产生 $\Delta s = 2$ 的有效 Fermi 作用的微扰论最低阶图形如图 9.5 所示。图 9.5 中的两个 Feynman 图的振幅相等，忽略外线动量，它们的和为

$$M = -2 \cdot \frac{g^4}{4} \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2+m_{\mathrm{W}}^2)^2} \cdot \left\{ \gamma_\alpha (\not{k} + \mathrm{i} m_i) \gamma_\beta \frac{1+\gamma_5}{2} \right\}$$
$$\times \left\{ \gamma_\beta (\not{k} + \mathrm{i} m_j) \gamma_\alpha \frac{1+\gamma_5}{2} \right\} \cdot \sum_{i,j} \beta_i \beta_j \frac{1}{(k^2+m_i^2)(k^2+m_j^2)} \qquad (9.135)$$

其中

$$\beta_i = U_{id}^* U_{is} \qquad (9.136)$$

式(9.135)中对动量 $k$ 的积分为

$$\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2+m_{\mathrm{W}}^2)^2 (k^2+m_i^2)(k^2+m_j^2)} = -\frac{\mathrm{i}}{64\pi^2} \delta_{\mu\nu} C(r_i, r_j) \qquad (9.137)$$

其中

$$r_i = m_i^2 / m_{\mathrm{W}}^2 \qquad (9.138)$$

$$C(r_i, r_j) = \frac{f(r_i) - f(r_j)}{r_i - r_j} \qquad (9.139)$$

$$f(r_i)=\frac{1}{1-r_i}+\frac{r_i^2\ln r_i}{(1-r_i)^2} \tag{9.140}$$

利用

$$\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\beta=\delta_{\alpha\mu}\gamma_\beta+\delta_{\mu\beta}\gamma_\alpha-\delta_{\alpha\beta}\gamma_\mu+\varepsilon_{\alpha\mu\beta\nu}\gamma_5\gamma_\nu \tag{9.141}$$

可得

$$\begin{aligned}&\left\{\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\beta\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\right\}\left\{\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma_\alpha\ \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\right\}\\&=4\left\{\gamma_\alpha\ \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\right\}\left\{\gamma_\beta\ \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\right\}\end{aligned} \tag{9.142}$$

将式(9.137)及(9.142)代入式(9.135)，得到

$$M=\mathrm{i}\frac{G}{\sqrt{2}}\frac{g^2}{4\pi^2}\sum_{i,j}\beta_i\beta_jC(r_i,r_j)(\bar{d}_L\gamma_\mu s_L)(\bar{d}_L\gamma_\mu s_L) \tag{9.143}$$

上式中的振幅可以由如下的有效 Fermi 作用哈密顿量产生

$$H_{\mathrm{W}}^{\Delta s=2}=-\frac{G_F}{\sqrt{2}}\frac{\alpha}{4\pi\sin^2\theta_{\mathrm{W}}}\sum_{i,j}\beta_i\beta_jC(r_i,r_j)\cdot(\bar{d}_{\mathrm{L}}\gamma_\mu s_{\mathrm{L}})(\bar{d}_{\mathrm{L}}\gamma_\mu s_{\mathrm{L}}) \tag{9.144}$$

式(9.144)与(9.143)的系数差 1/4，这是考虑到有四种 Wick 收缩方式对 $M$ 有贡献的结果。式(9.144)中的系数似乎是 $G_F\alpha$ 的量级，实际上是 $G_F^2m_i^2$ 的量级。这是由于 $U$ 矩阵的幺正性

$$\sum_i\beta_i=0 \tag{9.145}$$

如果我们把 $C(r_i,r_j)$ 对 $r_i$ 和 $r_j$ 展开，由式(9.145)知道，展开式的第一项对式(9.144)无贡献。在 $m_{\mathrm{W}}^2\gg m_c^2,m_t^2$ 的条件下，如果只保留展开式中 $r_i$ 的一次项则有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}}G_F\alpha\sum_{i,j}\beta_i\beta_jC(r_i,r_j)&\approx\frac{1}{\sqrt{2}}G_F\alpha\cdot\left(\sum_i\beta_i^2r_i+\sum_{i\neq j}\beta_i\beta_j\frac{r_ir_j}{r_i-r_j}\ln\frac{r_i}{r_j}\right)\\&=\frac{G_F^2}{\pi}\left(\sum_i\beta_i^2m_i^2+\sum_{i\neq j}\beta_i\beta_j\cdot\frac{m_i^2m_j^2}{m_i^2-m_j^2}\ln\frac{m_i^2}{m_j^2}\right)\end{aligned} \tag{9.146}$$

$K_{\mathrm{L}}$ 和 $K_{\mathrm{S}}$ 的质量差 $\Delta m$ 可按下式计算

$$\Delta m=m_{\mathrm{L}}-m_s=2\mid M_{12}\mid\simeq2\mathrm{Re}\langle K^0\mid H_{\mathrm{W}}^{\Delta s=2}\mid\bar{K}^0\rangle \tag{9.147}$$

由于 $K$-$M$ 矩阵中 $s_3$ 很小

$$\mid\mathrm{Re}\beta_t\mid=\mid\mathrm{Re}(U_{td}^*U_{ts})\mid\approx c_1c_3s_1s_2^2\ll s_1c_1c_3c_2^2\approx\mid\mathrm{Re}\beta_c\mid \tag{9.148}$$

$t$ 夸克在 $\mathrm{Re}H_{\mathrm{W}}^{\Delta s=2}$ 中的贡献被压低了。如果先在 $\mathrm{Re}\sum_{i,j}\beta_i\beta_j C(r_i, r_j)$ ①中忽略 $t$ 的贡献，然后取近似 $m_u=0, \frac{m_c^2}{m_{\mathrm{W}}^2}\ll 1, c_2=c_3=1$ 则由式(9.144)可得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\langle K^0 \mid H_{\mathrm{W}}^{\Delta s=2} \mid \overline{K}^0\rangle \\
&= G_F^2 \frac{1}{4\pi^2}\sin^2\theta_c\cos^2\theta_c m_c^2 \times \langle K^0 \mid (\bar{d}_{\mathrm{L}}\mathrm{i}\gamma_\mu s_{\mathrm{L}})(\bar{d}_{\mathrm{L}}\mathrm{i}\gamma_\mu s_{\mathrm{L}}) \mid \overline{K}^0\rangle
\end{aligned}
\tag{9.149}
$$

在一个粗糙的近似下，上式右方的矩阵元可以用插入一个真空中间态计算。考虑到四种收缩方式和夸克色指标以后，得到

$$
\begin{aligned}
\langle K^0 \mid (\bar{d}_{\mathrm{L}}\mathrm{i}\gamma_\mu s_{\mathrm{L}})(\bar{d}_{\mathrm{L}}\mathrm{i}\gamma_\mu s_{\mathrm{L}}) \mid \overline{K}^0\rangle &= \frac{8}{3}\langle K^0 \mid \frac{1}{2}\mathrm{i}\bar{d}\gamma_\mu\gamma_5 s \mid 0\rangle \\
&\times\langle 0 \mid \frac{1}{2}\bar{d}\mathrm{i}\gamma_\mu\gamma_5 s \mid \overline{K}^0\rangle = \frac{1}{3}f_K^2 m_K^2
\end{aligned}
\tag{9.150}
$$

其中，$f_K$ 为 $K$ 介子的衰变常数，$f_K=1.23f_\pi$。$H_{\mathrm{W}}^{\Delta s=2}$ 的矩阵元也可以用其他近似方法计算。这些计算方法都不很精确，但数量级上是一致的。由式(9.146)、(9.149)和(9.150)得到

$$
\Delta m = 2\mathrm{Re}\langle K^0 \mid H_{\mathrm{W}}^{\Delta s=2} \mid \overline{K}^0\rangle = G_F^2\frac{f_K^2}{6\pi^2}\sin^2\theta_c\cos^2\theta_c m_c^2 m_K \tag{9.151}
$$

在取实验值 $m_c=1.5\mathrm{GeV}$ 时，上式与 $\Delta m$ 的实验值 $0.35\times10^{-14}\mathrm{GeV}$ 相当接近。能取得这样的结果，与 GIM 机制有关。由于有 $U$ 矩阵的幺正性条件式(9.145)，才使原来是 $G_F\alpha$ 量级的系数变为 $G_F^2 m_c^2$ 量级的系数。在忽略 $t$ 夸克项时，这种相消的机制就是原来的 GIM 机制。

CP 破坏参数可以用式(9.144)计算。CP 破坏效应来自 $H_{\mathrm{W}}^{\Delta s=2}$ 的虚部。由于

$$
\mathrm{Im}\beta_t = -\mathrm{Im}\beta_c = -s_1 s_2 s_3 c_3\sin\delta \tag{9.152}
$$

它有一个系数

$$
G_F\alpha s_1 s_2 s_3\sin\delta
$$

由于混合角 $s_1, s_2, s_3$ 都很小，它具有超弱的强度。由式(9.106)得到

$$
\varepsilon = \mathrm{i}\frac{\mathrm{Im}M_{12}}{2\mathrm{Re}M_{12}} = \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\mathrm{Im}\langle K^0 \mid H_{\mathrm{W}}^{\Delta s=2} \mid \overline{K}^0\rangle}{\mathrm{Re}\langle K^0 \mid H_{\mathrm{W}}^{\Delta s=2} \mid \overline{K}^0\rangle} \tag{9.153}
$$

由上式及式(9.144)得到

① 注：现在实验已定出 $m_t\simeq170\mathrm{GeV}$，$m_t/m_c\simeq10^2$，因此 $t$ 夸克项不可忽略，但是以下的估计在数量级上还是对的。

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{i}}{2} \frac{\mathrm{Im}\sum_{i,j}\beta_i\beta_j C(r_i, r_j)}{\mathrm{Re}\sum_{i,j}\beta_i\beta_j C(r_i, r_j)} \tag{9.154}$$

由式(9.154)知道 $\varepsilon$ 有一个因子 $s_2 s_3 \sin\delta$。由于混合角 $s_2$ 和 $s_3$ 都很小,这个理论自然地给出小的 CP 破坏。

参数 $\varepsilon'$涉及$K^0 \to 2\pi$ 的衰变振幅的 CP 不对称。它起源于图 9.6 中的“企鹅图”,$G$ 为胶子。可以通过 $\Delta s = 1$ 的有效 Fermi 作用计算(参看 9.8 节),得到的 $\varepsilon'/\varepsilon$值是小的。但非轻子衰变的计算问题较多,$\varepsilon'$值理论的结果较不确定,是否与实验一致还不清楚。由以上讨论知道,这个模型的 CP 破坏作用虽然本质上只是通常的规范作用,但是对 $K^0$ 和 $\overline{K}^0$ 系统而言,自然地有小的 $\Delta s = 2$ 有效作用和小的 $\varepsilon'/\varepsilon$,所以它的预言有一点类似于超弱理论。但是它预言在包含 $b$ 的介子的衰变中有偏离超弱作用的较大的 CP 破坏。这个模型关于 CP 破坏的预言能否与实验符合还有待检验。

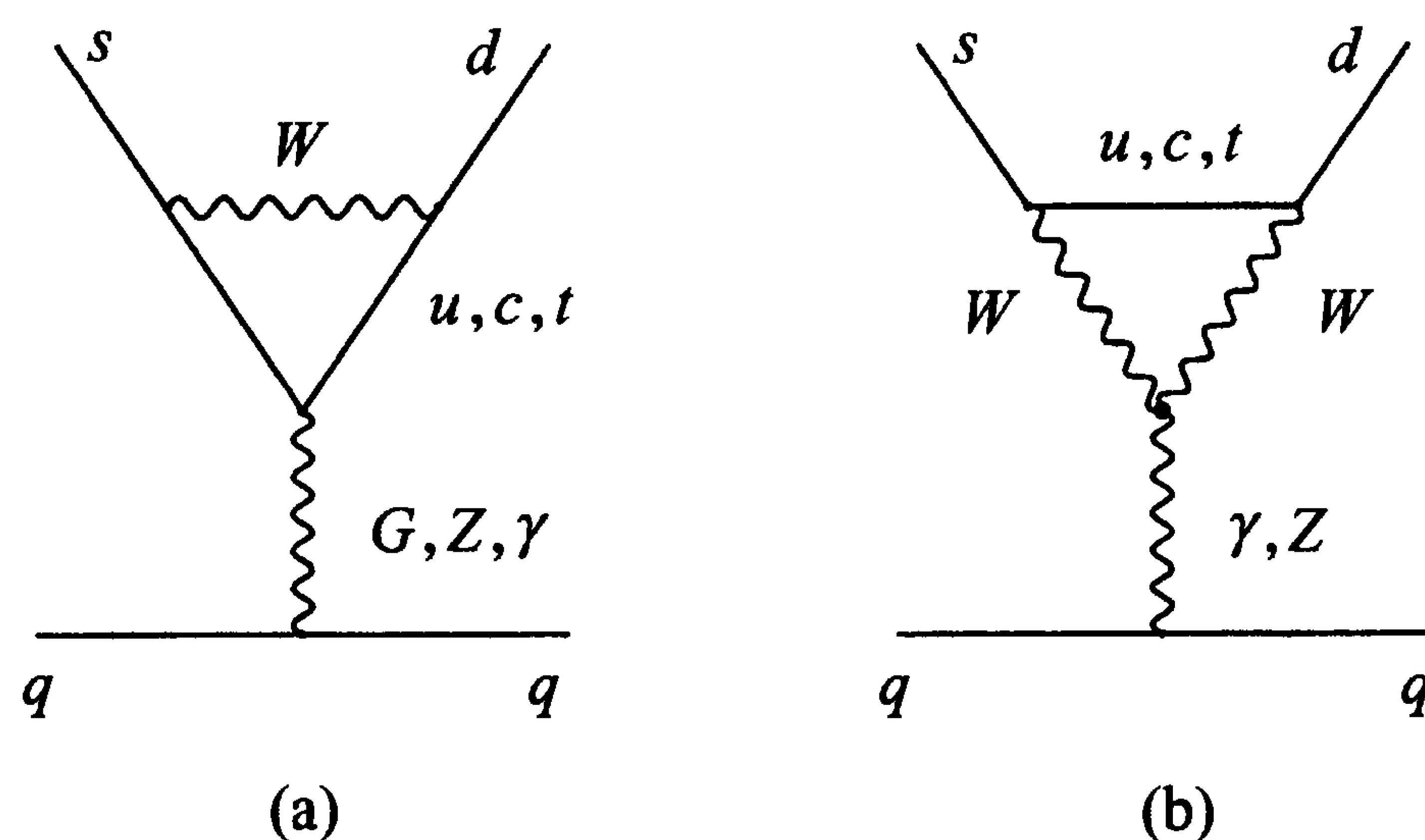



图 9.6

中子电偶极矩可以由计算 $\bar{u}u\gamma$ 顶点中的

$$ed_n \bar{u}\sigma_{\mu\nu}\gamma_5 u q_\nu A_\mu \tag{9.155}$$

项得到。研究的结果发现,由于 GIM 以及其他相消机制,这个模型的中子电偶极矩远在实验上限以下。

另一种引入 CP 破坏的可能方式是,假设存在 $n \geqslant 2$ 个 Higgs 场 $\phi^i$($i = 1, \cdots, n$)二重态。我们先考虑一个有离散对称性的情况。设汤川耦合项为

$$\mathscr{L} = -\sum_{i,j=1}^{3} \{ f_{ij}^d \overline{q_{0\mathrm{L}}^i} \phi^1 d_{0\mathrm{R}}^j + f_{ij}^u \overline{q_{0\mathrm{L}}^i} \tilde{\phi}^2 u_{0\mathrm{R}}^j \} + \mathrm{h.c.} \tag{9.156}$$

上式中,假设 $\phi^1$ 场只与 $d_{0\mathrm{R}}^j$耦合,$\phi^2$ 场只与 $u_{0\mathrm{R}}^j$耦合,其他 Higgs 场不与夸克耦合。如果要求拉氏量在变换

$$\phi^i \to -\phi^i\text{，对 } i = 1\ (2)$$

$$d_{0R}(u_{0R}) \to -d_{0R}(u_{0R})$$

下不变，则最一般的满足可重整性要求的 Higgs 场位势 $V(\phi^i)$ 有如下的形式

$$V(\phi^i) = -\sum_i \mu_i^2(\phi^{i\dagger}\phi^i) + \sum_{i,j} a_{ij}(\phi^{i\dagger}\phi^i)(\phi^{j\dagger}\phi^j)$$

$$+\sum_{i,j} b_{ij}(\phi^{i\dagger}\boldsymbol{\tau}\phi^i)(\phi^{j\dagger}\boldsymbol{\tau}\phi^j) + \sum_{i>j} c_{ij}(\phi^{i\dagger}\phi^j)(\phi^{i\dagger}\phi^j) \qquad (9.157)$$

$d_{ij}(\phi^{i\dagger}\phi^j)(\phi^{j\dagger}\phi^i)$ 项总可以通过 Fierz 类型的变换写成上式右方第二和第三项的形式。$V$ 的厄米性要求 $\mu_i^2$，$a_{ij}$ 和 $b_{ij}$ 是实数。但是，$c_{ij}$ 在 $i\neq j$ 时可以是复数。如 $n=2$，我们可以通过位相变换重新定义 $\phi^1$，$\phi^2$，使 $c_{12}$ 为实数；如 $n\geqslant 3$ 则 $c_{ij}$ 一般不能完全变成实数，这时 $\phi^i$ 场的真空平均值将是复数。此外，详细的研究表明，在 $n\geqslant 3$ 时即使 $c_{ij}$ 是实数，在某些参数值范围内，$\phi^i$ 的真实平均值也是复数，这时有 CP 的自发破缺。

现在考虑 $n=2$ 的情况。此模型中 Higgs 场有 4 个中性分量和 4 个带电分量。按照 Higgs 机制，其中包含 1 个中性和 2 个带电的 Goldstone 粒子，它们转化为 $W$，$Z$ 的纵向极化部分，剩下 3 个中性和 2 个带电的物理 Higgs 粒子。令

$$\phi^i = \begin{pmatrix} \varphi^{i+} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v^i + \varphi^i + \mathrm{i}a^i) \end{pmatrix}$$

其中，$\varphi^i$，$a^i$ 分别为 $\phi^{0i}$ 的实部和虚部。将上式代入式(9.156)并按式(9.121)把夸克质量矩阵对角化后得到中性 Higgs 粒子与夸克质量本征态的耦合项为

$$-\frac{1}{v^1}\overline{q^d}M^d q^d\varphi^1 - \frac{1}{v^2}\overline{q^u}M^u q^u\varphi^2 + \frac{\mathrm{i}}{v^1}\overline{q^d}M^d\gamma_5 q^d a^1 - \frac{\mathrm{i}}{v^2}\overline{q^u}M^u\gamma_5 q^u a^2 \qquad (9.158)$$

其中

$$q^d = (d,s,b)^{\mathrm{T}}, \qquad q^u = (u,c,t)^{\mathrm{T}},$$

$$q^{u0}_{\mathrm{L,R}} = V^u_{\mathrm{L,R}}q^u_{\mathrm{L,R}}, \qquad q^{d0}_{\mathrm{L,R}} = V^d_{\mathrm{L,R}}q^d_{\mathrm{L,R}}$$

$$M^d = \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix}, \qquad M^u = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix}$$

此项不产生改变奇异数或 Charm 数的中性流，这是做式(9.156)假设的原因。由上式也可以看到，中性 Higgs 场耦合项没有破坏 CP 的部分。令 $\tan\beta = v^2/v^1$，线性组合 $\phi^2\cos\beta - \phi^1\sin\beta$ 的真空平均值为 0，它的带电分量 $H^\pm$、中性虚部 $\frac{1}{\sqrt{2}}A$ 和中

性实部都是物理 Higgs 粒子。与它正交的线性组合 $\phi^1\cos\beta+\phi^2\sin\beta$ 的中性分量真空平均值为$\sqrt{(v^1)^2+(v^2)^2}$。这个组合起着单个 Higgs 二重态模型中的 Higgs 场的作用。因此,它的中性分量$\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi^1\cos\beta+\varphi^2\sin\beta)$是物理 Higgs 粒子,而它的其余分量都是 Goldstone 粒子。在 Higgs 场的位势函数中两个中性物理实 Higgs 场的质量矩阵一般有混合,可以通过正交变换

$$H_1^0 = \cos\alpha\varphi_1 - \sin\alpha\varphi_2, \qquad H_2^0 = \sin\alpha\varphi_1 + \cos\alpha\varphi_2$$

对角化,$H_1^0$ 和 $H_2^0$ 是质量本征态。规范粒子的质量为

$$m_Z = \frac{e}{2\sin\theta_w\cos\theta_w}[(v^1)^2+(v^2)^2]^{1/2}, \qquad m_W = \frac{e}{2\sin\theta_w}[(v^1)^2+(v^2)^2]^{1/2}$$

由式(9.158),物理的 Higgs 中性标量场 $H_1^0$,$H_2^0$ 和赝标量场 $A$ 的汤川作用为

$$-\left(\cos\alpha\,\overline{q^d}\frac{M^d}{v^1}q^d - \sin\alpha\,\overline{q^u}\frac{M^u}{v^2}q^u\right)H_1^0 - \left(\sin\alpha\,\overline{q^d}\frac{M^d}{v^1}q^d - \cos\alpha\,\overline{q^u}\frac{M^u}{v^2}q^u\right)H_2^0$$

$$-\frac{e}{2\sin\theta_W m_W}\mathrm{i}(\tan\beta\,\overline{q^d}M^d\gamma_5 q^d + \cot\beta\,\overline{q^u}M^u\gamma_5 q^u)A \qquad (9.158')$$

按式(9.121),带电 Higgs 场的汤川耦合项为

$$-\frac{\sqrt{2}}{v^1}(\overline{q_L^u}UM^d q_R^d\varphi^{1+}) + \frac{\sqrt{2}}{v^2}(\overline{q_L^d}U^{-1}M^u q_R^u\varphi^{2-}) + \text{h.c.}$$

上式利用了$\frac{v^1}{\sqrt{2}}(V_L^u)^{-1}f^dV_R^d=\frac{v^1}{\sqrt{2}}U(V_L^d)^{-1}f^dV_R^d=UM^d$,$\frac{v^2}{\sqrt{2}}(V_L^d)^{-1}f^uV_R^u=U^{-1}\cdot M^u$,其中 $U$ 为式(9.134)中的 K-M 混合矩阵。令 $H^+=\phi^{2+}\cos\beta-\phi^{1+}\sin\beta$,$H^-=(H^+)^\dagger$,上式中包含的物理带电 Higgs 粒子的汤川作用为

$$\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W m_W}[\tan\beta(\overline{q_L^u}UM^dq_R^dH^+) + \cot\beta(\overline{q_L^d}U^{-1}M^uq_R^u)H^-] + \text{h.c.} \qquad (9.159)$$

由上式可以看到,由于 K-M 混合矩阵一般为复数,带电 Higgs 粒子与夸克的耦合是另一个 CP 破坏源。

如果我们放弃 $\varphi^1$,$\varphi^2$ 只分别与 $d_{0R}$,$u_{0R}$耦合的假设,为了避免与实验矛盾的改变奇异数或 Charm 数的中性流,相应的汤川耦合常数要受到限制。此时 $\varphi^i\to-\varphi^i$不变性不再存在,即使在 $n=2$ 时 $V(\varphi^i)$一般也包含复数。

人们研究过 CP 破坏主要由 Higgs 势 $V(\varphi^i)$引起的情况。如果忽略第三代夸克的影响,带电 Higgs 粒子的汤川耦合项为

$$-\frac{\sqrt{2}}{v^1}[m_d(\cos\theta_c\bar{u}_L - \sin\theta_c\bar{c}_L)d_R + m_s(\sin\theta_c\bar{u}_L + \cos\theta_c\bar{c}_L)s_R]\varphi^{1+}$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{v^{2*}}[m_u(\cos\theta_c\bar{d}_{\mathrm{L}}+\sin\theta_c\bar{s}_{\mathrm{L}})u_{\mathrm{R}}+m_c(-\sin\theta_c\bar{d}_{\mathrm{L}}+\cos\theta_c\bar{s}_{\mathrm{L}})c_{\mathrm{R}}]\varphi^{2+}+\mathrm{h.c.}$$

夸克交换带电 Higgs 粒子图有一项如下的有效 Fermi 作用

$$A[m_d\bar{d}_{\mathrm{R}}(\cos\theta_c u_{\mathrm{L}}-\sin\theta_c c_{\mathrm{L}})+m_s\bar{s}_{\mathrm{R}}(\sin\theta_c u_{\mathrm{L}}+\cos\theta_c c_{\mathrm{L}})]$$
$$\times[m_u\bar{u}_{\mathrm{R}}(\cos\theta_c d_{\mathrm{L}}+\sin\theta_c s_{\mathrm{L}})+m_c\bar{c}_{\mathrm{R}}(-\sin\theta_c d_{\mathrm{L}}+\cos\theta_c s_{\mathrm{L}})]+\mathrm{h.c.}\quad(9.160)$$

其中

$$A=\frac{2}{v^{1*}v^2}\langle 0\mid T(\phi^{1+*}\phi^{2+})\mid 0\rangle\mid_{q=0}$$

一般是复数。因此式(9.160)中的有效作用破坏 CP。由于 $m_c\gg m_u$，式(9.160)中的 $\Delta s=1$ 项近似满足 $\Delta I=\frac{1}{2}$的选择规则。$A$ 的数量级为

$$\mid A\mid m_c m_s\simeq\frac{2}{\mid v^1 v^2\mid}\cdot\frac{m_c m_s}{m_H^2}\sim\frac{G m_c m_s}{m_H^2}\quad(9.161)$$

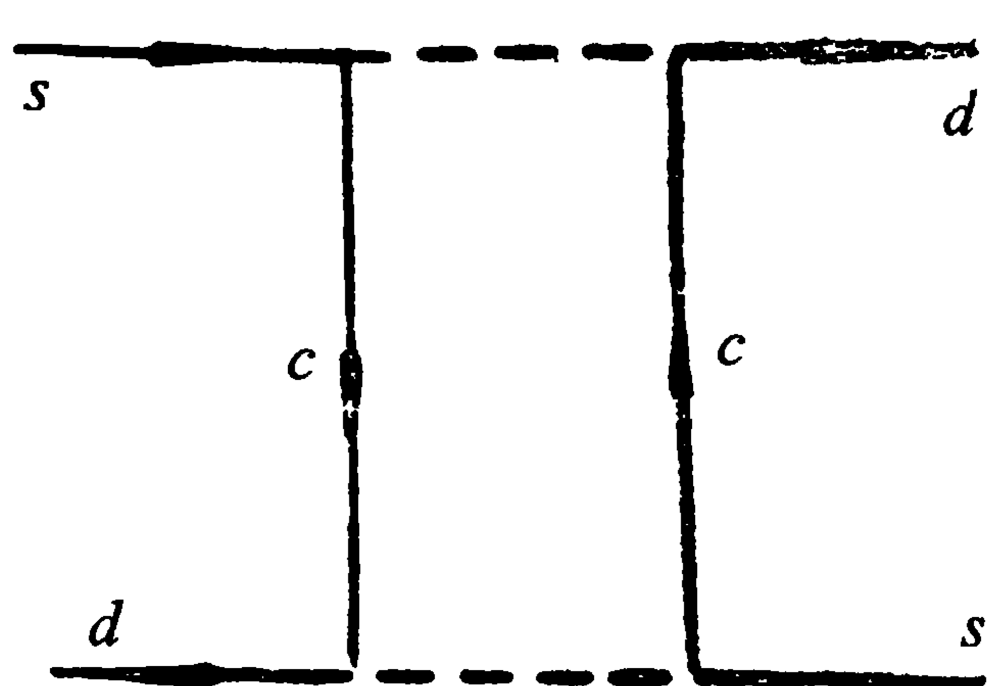


图 9.7

在$\frac{m_c m_s}{m_H^2}=O(10^{-3})$时，这是一个 $\Delta I=\frac{1}{2}$，$\Delta s=1$ 的毫弱作用。由 9.5.1 小节的一般讨论，它对 $\varepsilon$ 的贡献为$\frac{\mathrm{Im}A\cdot m_c m_s}{G}$的量级。此外，这个模型在 $G$ 的二阶中还给出相应于图 9.7 的 $\Delta s=2$ 的跃迁。相应于这个图的振幅可以计算出来，是$\frac{G^2 m_c^2 m_s^2}{m_H}$的量级，在$\frac{m_c m_s}{m_H}=O(10^{-3})$时，这是一个超弱作用。因此，由 9.5.1 小节的一般讨论可以知道，这个模型能够给出 $K_{\mathrm{L}}^0$ 衰变的实验结果。如果取 $m_c=3m_s=1.5\mathrm{GeV}$，与实验比较，要求 $m_H\simeq 15\mathrm{GeV}$。这个模型给出的中子电偶极矩和 $\varepsilon'$ 在实验上限附近。这些都不容易符合实验结果。但是如果不要求它单独解释 $K_{\mathrm{L}}^0$ 衰变的 CP 破坏，只要相关的 Higgs 粒子的质量足够大，它仍可能给出与实验不矛盾的 CP 破坏效应。在这个理论中 CP 破坏效应小的原因是 Higgs 粒子的质量大。

由以上两个例子可以看到，CP 破坏的弱电统一规范理论的优点是不需要引入特殊的 CP 破坏作用，并且能够比较自然地解释 CP 破坏效应为什么小。

以上讨论的是 $\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}}\times\mathrm{U}(1)$模型中 CP 破坏的简单的例子。如果理论中同时有多于二个的夸克二重态和多于一个的 Higgs 二重态，CP 破坏效应的讨论就更复杂一些。在规范群比 $\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}}\times\mathrm{U}(1)$更大的模型中有更多的流，往往也有更多的 Higgs 多重态，因此有更多的引入 CP 破坏的可能方式。目前的实验还不足以分

辨一些 CP 破坏的规范理论。

## 9.6 Higgs 粒子的性质

在弱电规范理论中,Higgs 粒子的性质在理论上较不确定。把理论分析与实验结果结合可以对 Higgs 粒子的性质给出一些限制。最小的 W-S 模型中包含一个 $SU(2)_L$ 二重态 Higgs 粒子 $\phi$,这是最简单的选择。9.2 节中式(9.59)得到 $m_Z = m_W/\cos\theta_W$ 并由此得到中性流作用强度与带电流作用强度相等[式(9.73)]。式(9.59)依赖于 Higgs 粒子属于 $SU(2)_L$ 二重态,否则它不一定成立。但是如果理论中有多于一个的 $SU(2)_L$ 二重态 Higgs 粒子,式(9.59)也能成立。实验结果与式(9.59)及(9.73)符合,这是对 Higgs 粒子属于二重态的支持。

如果只有一个 $SU(2)_L$ 二重态的 Higgs 粒子 $\phi$,则它与 Fermi 子的汤川耦合有式(9.119)的形式。在把质量矩阵对角化后,拉氏量中的质量项变为

$$M_{ij}\bar{\psi}^i_{0L}\psi^i_{0R} + \text{h.c.} = m_i\bar{\psi}^i\psi^i \tag{9.162}$$

其中,$\psi^i$ 表示质量本征态。由式(9.119)和(9.120)可以看到物理 Higgs 场 $\varphi$ 与 Fermi 场的耦合为

$$\frac{\sqrt{2}}{v}m_i\bar{\psi}^i\varphi\psi^i \tag{9.163}$$

由式(9.163)可以看到,当只有一个 Higgs 粒子二重态时,物理的 Higgs 粒子与物理的 Fermi 子作用不改变 Fermi 子的味,并且其汤川耦合常数正比于 Fermi 子的质量。这个作用也不改变宇称。以上结果说明,Higgs 粒子衰变时,主要产生能量守恒允许的重 Fermi 子对,如 $c\bar{c}$,$\tau\bar{\tau}$ 等,而很难产生 $e\bar{e}$。产生 Higgs 粒子也主要通过重的 Fermi 子或中间 Bose 子,但如果有多于一个 $SU(2)_L$ 二重态的 Higgs 粒子,则情况将较为复杂。这在 9.5 节中已涉及。理论不能预言 Higgs 粒子的质量。如果假设 Higgs 场的自作用是弱的,即 $\lambda<1$,则由式(9.31)知道

$$m_\varphi < \sqrt{2}v \simeq 350\text{GeV} \tag{9.164}$$

但是 Higgs 场自作用也可能强。这时不能用式(9.31)计算 Higgs 粒子质量,而要用非微扰方法。另一方面,文献[16]中指出,如果 $\lambda$ 太小,则在考虑辐射修正后,$\langle\phi\rangle_0\neq0$ 的真空态不稳定,自发破缺消失。但是文献[16]中的具体分析由于当时不知道重的 $t$ 夸克存在而不再适用。按照文献[16]我们用单圈图计算有效位势的辐射修正。在第三章中已经以标量场电动力学为例说明有效势的计算方法。在 Landau 规范下 W-S 模型的单圈图分 Higgs 内线、中间 Bose 子内线及 Fermi 子内线三种。Higgs 场及规范场单圈图的计算与第三章中对标量电动力学的计算基本相

同。在单圈图中，非 Abel 规范场与 Abel 规范场的区别只在于作用顶点。相互作用拉氏量中含 $|\phi^0|^2$ 的项为

$$-\frac{1}{4}|\phi^0|^2[(g'B_\mu - gW_\mu^3)(g'B_\mu - gW_\mu^3) + 2g^2 W_\mu^+ W_\mu^-]$$

$$= -|\phi^0|^2\left[\frac{g^2}{4}\sum_{i=1,2} W_\mu^i W_\mu^i + \frac{g^2+g'^2}{4}Z_\mu Z_\mu\right] \tag{9.165}$$

同样 $|\phi^+|^2$ 项也可写为

$$-|\phi^+|^2\left[\frac{g^2}{4}\sum_{i=1,2} W_\mu^i W_\mu^i + \frac{g^2+g'^2}{4}Z_\mu Z_\mu\right]$$

$$Z_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}(g'B_\mu + gW_\mu^3) \tag{9.166}$$

由式(9.165)和(9.166)知道，须考虑三种规范场的单圈图之和。考虑到符号的不同，由式(3.258)可以得到标量场和规范场单圈图对有效势的贡献。Fermi 子单圈图的贡献也可以算出，它正比于 $m_f^4$。因为其他夸克的质量都小，可以只保留 $t$ 夸克的贡献。这样我们得到有效势

$$= -\frac{1}{2}\mu^2\rho^2 + \frac{1}{4}\lambda\rho^4 + \frac{1}{64\pi^2}\left\{(-\mu^2+3\lambda\rho^2)^2\ln\frac{-\mu^2+3\lambda\rho^2}{\tilde{\mu}^2}\right.$$
$$+ (-\mu^2+\lambda\rho^2)^2\ln\frac{-\mu^2+\lambda\rho^2}{\tilde{\mu}^2} + 6\frac{g^4}{4}\rho^4\ln\frac{g^2\rho^2}{\tilde{\mu}^2}$$
$$\left.+ 3\frac{(g^2+g'^2)^2}{4}\rho^4\ln\frac{(g^2+g'^2)\rho^2}{\tilde{\mu}^2} - 12\frac{g_t^4}{2}\rho^4\ln\frac{g_t^2\rho^2}{\tilde{\mu}^2}\right\} \tag{9.167}$$

上式中，$\tilde{\mu}$ 是重整化能标，$\mu$ 和 $\lambda$ 以及其他耦合常数是在此能标下的重整化的参数，$\frac{1}{2}\rho^2 = \phi_c^*\phi_c$。式(9.167)只准确到单圈一级，单圈修正包含对数因子，在 $\rho$ 的值使它大于树图项时此公式不再适用。如第六章中已说明的，这些对数因子起源于重整化，可以用重整化群方程把它们求和到任意高阶的圈图。考虑耦合常数和场对重整化标度的依赖性，可以把有效势的树图项写为①

$$-\frac{1}{2}\mu^2(t)E^2(t)\rho^2 + \frac{1}{4}\lambda(t)[E^2(t)\rho^2]^2 \tag{9.168}$$

其中，$t = \ln\frac{\tilde{\mu}_t}{\tilde{\mu}}$，$\lambda(t)$满足重整化群方程

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = \beta_\lambda(\lambda, g_t), \qquad \frac{dg_t(t)}{dt} = \beta_{g_t}(\lambda, g_t) \tag{9.169}$$

① 注：参考文献[20]。

$$\lambda(0) = \lambda, \qquad g(0) = g$$

$$E(t) = \exp\left\{-\int_0^t \gamma(\lambda(t'), g_t(t'))\mathrm{d}t'\right\} \tag{9.170}$$

$\gamma$ 是 $\phi$ 场的反常量纲

$$\gamma = \frac{1}{16\pi^2}\left(\frac{1}{8}g_t^2 - \frac{3}{32}g^2 - \frac{1}{32}g'^2\right) + \text{高阶项} \tag{9.171}$$

由图 6.3、6.4 及夸克圈图算出

$$\beta_\lambda = \frac{1}{96\pi^2}(144\lambda^2 + 72\lambda g_t^2 - 36g_t^4 - 54\lambda g'^2 - 18\lambda g^2$$

$$+ \frac{9}{4}g'^2 + \frac{9}{2}g^2 + \frac{27}{4}g^4) + \text{高阶项} \tag{9.172}$$

如果取重整化能标 $\tilde{\mu}_t = \rho$，即 $t = \ln\frac{\rho}{\tilde{\mu}}$，则在 $t$ 小时，式(9.168)中 $\rho^4$ 项近似为

$$\frac{1}{4}\left[\lambda + (\beta - 4\lambda\gamma)\ln\frac{\rho}{\tilde{\mu}}\right]\rho^4$$

上式与式(9.167)在领头对数项一致。但式(9.168)可用于任意 $t$（取 $t = \ln\frac{\rho}{\tilde{\mu}}$后即任意 $\rho$ 值），这证明，在取 $t = \ln\frac{\rho}{\tilde{\mu}}$时式(9.168)是单圈有效势式(9.167)的重整化群改进式。

W-S 模型适用的能量范围是有限的。首先，由于场论的发散，必须引入能动量的切断 $\Lambda$；其次，如第六章中讨论过的，$\phi^4$ 理论不是渐近自由的，$\lambda(t)$有 Landau 极点，表示至少微扰论不能应用到那样高的能区，而格点场论的非微扰数值计算倾向于相同的结论；最后，人们还有其他的理由相信由 W-S 弱电统一理论和 QCD 所构成的标准模型不是微观世界客观真理的全部，在某个能区以外还需要一个更完整的理论。我们不在这里讨论这些理由，只是假设 W-S 模型中需引入切断能标 $\Lambda$。由于理论中未考虑引力相互作用，按照爱因斯坦引力场论，引力在 Planck 能标 $\Lambda_P = 10^{19}$ GeV 处变强，因而不可忽略，因此 $\Lambda \leqslant \Lambda_P$。另外，由于这个模型与现有实验符合很好，因而 $\Lambda \geqslant 1$TeV。

在上述能区以内我们讨论 $\lambda(t)$的变化。在式(9.172)中 $g_t = \frac{\sqrt{2}m_t}{v}$是一个量级为 1 的数。如果 $\lambda$ 的初值（即重整化能标为 $\tilde{\mu}$ 时的值）过小则 $\beta_\lambda < 0$，$\lambda(t)$将随 $t$ 增大而更变小，最终在 $\rho < \Lambda$ 区内变为负数。这时有效势式(9.168)在大的 $\rho$ 值处有大的负值，$\rho = v$ 不再是稳定真空态。另一方面，如果 $\lambda$ 的初值过大，$\beta_\lambda > 0$，$\lambda(t)$将随 $t$ 增大而更大，最终在 $\rho < \Lambda$ 区内达到 Landau 极点。这样，$\lambda$ 的初值被限制在一个范围内，从而 Higgs 粒子的质量 $m_\varphi$ 被限制在一个依赖于 $\Lambda$ 的范围。

在考虑了次领头对数修正以后，当 $\Lambda=\Lambda_{\mathrm{P}}$ 时 $m_\varphi$ 的范围约在 130～180GeV 之间。如 $\Lambda=1\mathrm{TeV}$，$m_\varphi$ 的范围约在 70～700GeV 之间。

## 9.7 中微子质量与中微子振荡，Majorana 中微子

夸克的弱作用有 Cabbibo 混合以及 K-M 矩阵。相反，在轻子的弱作用中，没有观察到类似的现象。$\mu$ 和 $e$ 的弱作用普适性在 $10^{-3}$ 精度下成立，$\mu\rightarrow e+\gamma$ 这样两代轻子之间的跃迁过程实验上没有观察到。在 W-S 模型中，这个差别可以由中微子没有质量得到自然的解释。实际上，对轻子带电流 $j_\mu$，可以做类似于前面对夸克带电流的论证，与式(9.132)相应得到

$$\bar{j}_\mu = \mathrm{i}\sum_{i,j=1}^{N}\bar{e}_{\mathrm{L}}^{i}\gamma_\mu U_{ij}^{l}\nu_{\mathrm{L}}^{j} \tag{9.173}$$

其中，$e_{\mathrm{L}}^{i}$ 和 $\nu_{\mathrm{L}}^{j}$ 为质量本征态。通过下式重新定义左手中微子场

$$\nu'^{i}_{\mathrm{L}} = U_{ij}^{l}\nu_{\mathrm{L}}^{j} \tag{9.174}$$

如果 $\nu_{\mathrm{L}}^{j}(j=1,2,\cdots,N)$ 的质量都是零，则它们是简并的态，这时 $\nu'^{j}_{\mathrm{L}}$ 也是质量本征态。把式(9.174)代入式(9.173)并去掉撇号就得到没有混合的轻子带电流。实际上通常对中微子态是由弱作用来定义的，$\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau$ 分别定义为与 $e,\mu,\tau$ 在弱作用中同时产生的中微子。对 W-S 而言，它们就是式(9.174)中的 $\nu'^{i}_{\mathrm{L}}$。在 W-S 模型中 $\nu_{\mathrm{L}}$ 无质量，这是右手中微子 $\nu_{\mathrm{R}}$ 不存在的结果。但是一般的弱电统一规范理论可以容纳有质量的中微子。如果修改模型以引入右手中微子 $\nu_{\mathrm{R}}$ 及适当的汤川作用，可以使中微子得到质量。如果中微子有质量，它将对 $\mu,e$ 的普适性产生修正并使 $\mu\rightarrow e+\gamma$ 过程得以产生。但是如果它们的质量足够小，可以不与实验矛盾。

如果中微子有质量，将会发生一种很有趣味的中微子振荡过程，即当中微子在真空中运动时 $\nu_e$ 和 $\nu_\mu$ 会自发地互相转变。例如，开始时由 $\pi\rightarrow\mu+\nu$ 衰变产生的中微子，在以后与原子核散射时，可以产生电子，发生 $\nu+N\rightarrow e+X$ 过程。在中微子有质量时，$\nu_a(a=e,\mu,\tau)$ 与质量本征态 $\nu_i(i=1,2,3)$ 不一样，

$$\nu_a = U_{ai}\nu_i \tag{9.175}$$

设在原点处有一个产生轻子 $l_a$ 和中微子的带电流衰变源，由式(9.174)，它产生的中微子态是质量本征态的叠加 $U_{ai}\mid\nu_i\rangle$。中微子产生后在空间自由运动，因此这个叠加态的波函数可写为

$$U_{ai}\langle\vec{x}\mid\nu_i\rangle = U_{ai}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_it-\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{x})} \tag{9.176}$$

如果在 $\vec{x}$ 点有一个探测仪器，中微子在其中通过带电流产生一个轻子 $l_b$ 的振幅正比于

$$A_{a\to b} = U_{ai}U_{bi}^{*}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_i t-\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{x})} \tag{9.177}$$

如果此过程稳定地进行，我们不测量衰变或产生的时间，则概率为[21]

$$P_{a\to b}(x) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |A_{a\to b}|^2\mathrm{d}t$$

由式(9.177)，上式只在 $E_i=E_j$ 时不为零。设中微子动量在 $x$ 轴方向，取 $E_i=E_j=E$ 得到

$$P_{a\to b}(x) = \sum_i |U_{ai}|^2 |U_{bi}|^2 + \sum_{i\neq j}U_{ai}U_{bi}^{*}U_{bj}U_{aj}^{*}\cos(p_i - p_j)x \tag{9.178}$$

在 $a=b$ 时，上式化为

$$P_{a\to a}(x) = 1-2\sum_{i>j} |U_{ai}|^2 |U_{ai}|^2[1-\cos(p_i - p_j)x] \tag{9.179}$$

在 $E^2\gg m_i^2$ 时，$p_i\approx E-\dfrac{m_i^2}{2E}$

$$P_{a\to a}(x) = 1-2\sum_{i>j} |U_{ai}|^2 |U_{bj}|^2\left[1-\cos\left(\frac{m_j^2-m_i^2}{2E}x\right)\right] \tag{9.180}$$

Davis 自 20 世纪 60 年代后期开始，观测由太阳内部的原子核 $\beta$ 衰变产生的中微子，观测到的事例数比由太阳内部核反应的模型计算值小许多。这是著名的“太阳中微子丢失案”，被考虑为可能是中微子振荡产生的。如果 $\nu_e\to\nu_\mu$ 或 $\nu_\tau$，由于太阳中微子能量低，不能产生 $\mu$ 或 $\tau$，只表现为探测仪器中产生电子的事例数减少。2002 年 SNO 组的太阳中微子精确实验和 2003 年 Kamland 组核反应堆实验证明 $\nu_e$ 确实丢失了，并非太阳核反应模型有误。此外，由于宇宙射线中 $\pi$ 介子的级联衰变 $\pi^-\to\mu^-+\overline{\nu_\mu}\to e^-+\overline{\nu_e}+\nu_\mu+\overline{\nu_\mu}$，大气中由这些中微子产生的次级 $\mu$ 子数应比电子数约多一倍. 但 1998 年 Super-Kamiokande 组的精确实验结果中 $\mu$ 子数明显地比预期值小，是 $\nu_\mu$ 振荡到 $\nu_\tau$ 或其他中微子的证据。以上实验结果强烈支持中微子有振荡，因此具有质量。

在规范理论中，可以用不同的方案容纳有质量的中微子。由于在低能现象中，W-S 模型是很成功的理论，我们可以首先在 $SU(2)_L\times U(1)_Y$ 规范理论范围内考虑中微子质量问题。这需要在 W-S 模型中加入一个右手中微子 $\nu_R$，它可以有如下的汤川耦合

$$-f_\nu\bar{l}_L\tilde{\phi}\nu_R + \mathrm{h.c.} \tag{9.181}$$

$\phi$ 的真空平均值使得中微子获得质量项

$$m_\nu\bar{\nu}_L\nu_R + \mathrm{h.c.} = \frac{v}{\sqrt{2}}f_\nu\bar{\nu}_L\nu_R + \mathrm{h.c.} \tag{9.182}$$

但是,在这种情况下,使得 $\nu$ 和其他轻子获得质量的是同一 Higgs 场。这就需要 $f_\nu$ 比 $f_e$ 和 $f_\mu$ 小得多。自然地得到小的 $f_\nu$ 的一个可能性是,式(9.181)中的项不出现在拉氏量中,它是高圈图的辐射修正的结果。当 $SU(2)_L\times U(1)_Y$ 规范理论是统一强和弱电作用的大统一理论(见第十一章)的一部分时,这是可能的,因为这种理论有更大的破缺对称性。

如果轻子数不是绝对守恒的,除通常的如式(9.182)形式的 Dirac 质量项外,中微子还可以有如下的质量项

$$a_1(\nu_L^T C\nu_L + \bar{\nu}_L C\bar{\nu}_L^T) + a_2(\nu_R^T C\nu_R + \bar{\nu}_R C\bar{\nu}_R^T) \tag{9.183}$$

由于电荷共轭场

$$\psi^c = C\bar{\psi}^T, \qquad \bar{\psi}^c = \psi^T C$$

式(9.183)也可写为

$$a_1(\bar{\nu}_L^c\nu_L + \bar{\nu}_L\nu_L^c) + a_2(\bar{\nu}_R^c\nu_R + \bar{\nu}_R\nu_R^c) \tag{9.184}$$

其中

$$\nu_L^c \equiv C\gamma_4\nu_L^* = (C\bar{\nu}^T)_R, \qquad \nu_R^c = (C\bar{\nu}^T)_L \tag{9.185}$$

因此 $\nu_L^c$ 是一个右手场,而 $\nu_R^c$ 是一个左手场。引入

$$\chi = \nu_L + \nu_L^c, \qquad \lambda = \nu_R + \nu_R^c \tag{9.186}$$

它们满足条件

$$\chi^c = \chi, \qquad \lambda^c = \lambda \tag{9.187}$$

式(9.184)可以写为

$$a_1\bar{\chi}\chi + a_2\bar{\lambda}\lambda \tag{9.188}$$

满足条件式(9.187)的场称为 Majorana 场,它们是电荷共轭不变的,因此式(9.188)形式的质量项称为 Majorana 质量项。

由式(9.185)和(9.186)得到

$$\nu_L = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\chi, \qquad \nu_L^c = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\chi \tag{9.187'}$$

$$\nu_R = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\lambda, \qquad \nu_R^c = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\lambda \tag{9.188'}$$

因此一般的中微子质量项可写为

$$\begin{aligned} & m_D(\bar{\nu}_L\nu_R + \bar{\nu}_R\nu_L) + a_1\bar{\chi}\chi + a_2\bar{\lambda}\lambda \\ &= \frac{1}{2}m_D(\bar{\chi}\lambda + \bar{\lambda}\chi) + a_1\bar{\chi}\chi + a_2\bar{\lambda}\lambda \end{aligned} \tag{9.189}$$

以 $\chi$ 和 $\lambda$ 为基矢,质量矩阵是

$$M = \begin{vmatrix} a_1 & \frac{1}{2}m_D \\ \frac{1}{2}m_D & a_2 \end{vmatrix} \tag{9.190}$$

这个矩阵的本征值为

$$m_{\pm} = \frac{1}{2}[a_1 + a_2 \pm \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + m_D^2}] \tag{9.191}$$

相应的本征矢量为

$$\begin{aligned} \nu_- &= (\cos\alpha)\chi - (\sin\alpha)\lambda \\ \nu_+ &= (\sin\alpha)\chi + (\cos\alpha)\lambda \end{aligned} \tag{9.192}$$

其中

$$\alpha = \frac{1}{2}\arctan\frac{m_D}{a_1 - a_2} \tag{9.193}$$

式(9.189)和(9.191)是最普遍的中微子质量公式。

在文献[19]中提出了一个自然地得到不等于零但又很小的中微子质量的方案。设 Majorana 质量项和 Dirac 质量项是由不同的 Higgs 场平均值产生的,并且有 $a_2 \gg m_D$, $a_1 = 0$。这时

$$m_+ \simeq a_2, \qquad m_- \simeq \frac{m_D^2}{4a_2} \tag{9.194}$$

如果 $m_D$ 是通常轻子质量的量级,上式中的 $m_-$ 可以比其他轻子质量小得多。由式(9.188)、(9.192)和(9.193)知道,这时 $\nu_L$ 近似是轻质量的本征态,只有量级为 $\frac{m_D}{a_2}$ 的大质量本征态的混合,而 $\nu_R$ 则近似是大质量的本征态。

在 9.2 节中讨论的 $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ 模型中,如果有式(9.90)的耦合项,则 Higgs 场 $\Delta$ 的真空平均值式(9.83)导致 Majorana 质量项。由于在那个模型中要求 $\langle\Delta_R\rangle_D \gg \langle\phi\rangle_0$,所以它有这里所要求的性质。但为了自然地得到小于实验上限的 $\nu_e$ 质量 $\langle\Delta_R\rangle_0$ 必须足够大。当 $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ 模型是统一描述强、弱和电磁作用的大统一理论(如 SO(10) 模型)的一部分时,这个要求是可以满足的。

如果中微子带有 Majorana 粒子的性质,则轻子数不守恒。这时可以有 $N^z \to N^{z+2} + e^- + e^-$ 这样的不带中微子的双 $\beta$ 衰变。

## 9.8　标准模型的低能有效理论

### 9.8.1　退耦定理和低能有效场论的一般概念

在讨论弱作用的低能有效理论以前,我们先说明低能有效理论的基本概念。

自然界中存在质量差别很大的各种粒子。如果所研究的物理过程的初、末态中只有轻的粒子,且初态粒子的能量不足以产生重的粒子,这时重粒子的场只在中间过程中出现,间接影响轻粒子之间的作用。关于重粒子对低能过程的影响有一个 Appelquist-Carazzone 退耦定理[22]。这个定理的内容如下:

设在一个可重整的场论中重粒子和轻粒子的质量分别为 $M$ 和 $m$ 的量级。考虑一个外线只有轻粒子而内线有重粒子的费曼图 G,其外线能量为 $E \ll M$ 的量级。如果图 G 和其外线只有轻粒子而内线有重粒子的子图形都不发散,则图 G 相对于没有重粒子内线的图形有一个 $\frac{E}{M}$ 或其更高幂次的压低因子。如果重粒子内线出现在外线只有轻粒子的原始发散子图形中,我们在外线动量的欧氏区内能标为 $\mu$ 处做减除,当 $M \gg \mu$ 时,减除后的图 G 有 $O\left(\frac{\mu}{M}, \frac{E}{M}\right)$ 的压低因子。这表示重粒子对重整化 Green 函数的贡献近似地与 $\mu$ 无关。

这个定理说明,在 $M \to \infty$ 极限下重粒子在重整化 Green 函数中退耦。它还说明,在 $\mu \ll M$ 区域内计算重整化群 $\beta$ 函数和反常量纲 $\gamma$ 时也可忽略重粒子的影响。

退耦定理是一个很有用的理论结果,但是 $\beta$ 函数和反常量纲 $\gamma$ 与重粒子无关的结论只适用于在外动量的欧氏区做减除的方案,这种方案下的重整化群方程比较复杂,不便于计算。对于在维数正规化下做最小减除这样的与质量无关的重整化方案,重粒子在 $\beta$ 和 $\gamma$ 的计算中并不退耦。此外,退耦定理也有不适用的情况。例如,Higgs 粒子与夸克和轻子的耦合常数是正比于它们的质量的,在 Green 函数的积分中分母上质量的增大被分子上耦合常数的增大所抵消,可以出现重粒子不退耦的情况。因此 Weinberg 提出用低能有效理论来处理重粒子的问题[23],这是一个更有力的方法。

一般来说,外线都是轻粒子的低能过程总可以用一个只包括轻粒子场的有效拉氏量 $\mathscr{L}_{\text{eff}}$ 描述,重粒子场的存在只影响 $\mathscr{L}_{\text{eff}}$ 的具体形式。如果以 $\varphi$ 代表所有的轻粒子场,以 $\phi$ 代表所有的重粒子场(不要与本章其他地方用 $\varphi$ 和 $\phi$ 代表的 Higgs 场相混),则外线只有轻粒子的 Green 函数生成泛函为

$$W[J] = \int [\mathscr{D}\phi][\mathscr{D}\varphi] \exp\left\{ i \int dx [\mathscr{L}(\phi, \varphi) + J\varphi] \right\} \tag{9.195}$$

原则上总可以从上式中积掉重粒子场 $\phi$ 得到如下形式的表示式

$$W[J] = \int [\mathscr{D}\varphi] \exp\left\{ i \left( S_{\text{eff}}[\varphi] + \int dx J\varphi \right) \right\} \tag{9.196}$$

其中,$S_{\text{eff}}$ 是轻粒子场 $\varphi$ 的泛函,称为低能有效作用量。$S_{\text{eff}}$ 不是 $\varphi$ 的定域函数的积分(参看 9.8.2 小节中的讨论),但是它总可以展开为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int\prod_{i=1}^{n}\mathrm{d}x_i\varphi_i(x_i)C(x_1,\cdots,x_n)$$

其中，$C_i(x_1,\cdots,x_n)$为确定的函数。进一步把 $\varphi_i(x_i)$作泰勒展开，可将低能有效拉氏量写为

$$S_{\mathrm{eff}} = \int\mathrm{d}^4x\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}(x)$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{\Lambda^{d_n-4}}O_n(x) \tag{9.197}$$

其中，$O_n$ 为由 $\varphi$ 场及其微商的乘积组成的定域算符，$d_n$ 为其量纲；$\Lambda$ 为量纲 = 1 的量，如果没有其他起作用的物理量，$\Lambda$ 就是重粒子质量 $M$；$C_n$ 为无量纲的耦合常数。$d_n>4$ 的算符 $O_n$ 在低能粒子态之间的矩阵元或低能 Green 函数中的贡献有一个压低因子$\left(\frac{E}{\Lambda}\right)^{d_n-4}$，$E$ 为外线粒子的能量。因此，如果 $C_n$ 不大于$O(1)$，在 $E\ll\Lambda$ 时我们可以只保留式(9.197)中量纲最低的项或前面几项。这就是原来场论的低能有效场论。

$C_n$ 原则上由原来的场论决定，实际上式(9.195)中对重粒子场 $\phi$ 的积分一般是不能严格求出的。如果 $\phi$ 场之间和它们与轻粒子场 $\varphi$ 之间的作用都比较弱，我们可以在式(9.195)中做微扰展开，即把相互作用因子 $\exp\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}x[\mathscr{L}_{\mathrm{int}}(\phi,\varphi)]\}$ 展开为耦合常数的幂级数。重粒子动能因子 $\exp\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}x[\mathscr{L}_{\mathrm{kin}}(\phi)]\}$ 是高斯型函数，这时对 $\phi$ 场的积分成为高斯型的，可以积出来从而近似地求出 $C_n$。比照 3.3 节中在泛函积分形式下对费曼规则的推导，不难证明这等价于通过外线为轻粒子而内线有重粒子的费曼图计算重粒子对轻粒子之间相互作用的贡献。如果 $\phi$ 场参与的作用不弱，微扰论不能用，我们通常只能由原来理论的对称性对低能有效理论的形式加以限制，而让实验来决定 $C_n$ 的值。

如果展开式(9.197)中最前面几项 $d_n\leqslant4$，在只保持这几项时低能有效场论是一个可重整的场论。但有时所有描述轻粒子的相互作用的项 $d_n$ 都大于 4，这时我们必须保留一些 $d_n>4$ 项。有时为了达到要求的计算精度也需要保留一些 $d_n>4$ 项。在这种情况下低能有效场论是不可重整的。按照 5.1 节中的讨论，在不可重整的场论中做圈图计算会不断产生新的发散项，相应于拉氏量中算符量纲更高的项，理论中将包含无穷多个待定的重整化耦合常数。但是如果我们假定重整化的 $C_n$ 不大于$O(1)$，由于算符 $O_n$ 在低能过程中的贡献正比于$E^{d_n}$，在 $E\ll\Lambda$ 时我们仍可忽略那些量纲更高的项。因此，不可重整的理论作为低能有效场论仍有精确的预言能力，需要考虑的问题是这个假定是否合理。为此，我们考虑拉氏量中两个

量纲 $d_n, d_m > 4$ 的项 $O_n$ 和 $O_m$ 组成的单圈图，它产生的发散项须在拉氏量中引入量纲为 $d_N$ 的项 $O_N$ 抵消。此单圈图对 $O_N$ 项的耦合常数 $C_N$ 的贡献的量级为

$$\frac{1}{\Lambda^{d_N-4}}\delta C_N \approx \frac{1}{16\pi^2}C_n C_m \frac{\Lambda_c^{d_n+d_m-d_N-4}}{\Lambda^{d_n+d_m-8}}$$

其中，$\frac{1}{16\pi^2}$为单圈图的典型因子，$\Lambda_c$ 为积分的切断动量（在维数正规化最小减除方案中则有 $\Lambda_c = \mu$）。由上式可知，如取 $\Lambda_c \leqslant \Lambda$，则当 $C_n, C_m \leqslant O(1)$时 $\delta C_N \ll 1$，因此上面的假定是合理的。

### 9.8.2　弱作用的低能有效理论

在弱作用的领域中，历史上是先知道在低能区的有效理论，即 Fermi 弱作用理论和后来的 V-A 型流-流耦合理论。这是标准模型在能量远小于中间 Bose 子质量 $m_W$ 时的低能有效理论。在这个有效理论中 $W$ 和 $Z$ 的场不再出现，此外重于 $W$ 和 $Z$ 的 $t$ 夸克和 Higgs 粒子的场也不再出现，拉氏量中只包括五种夸克和轻子、光子。

我们以与夸克过程

$$c \to su\bar{d} \tag{9.198}$$

有关的物理来说明弱作用低能有效场论的推导。因为中性流的过程不能改变夸克的味，过程式(9.198)是由 $W$ 传递的带电流过程，在微扰论最低阶由图 9.8 表示。$W$ 场与夸克相互作用的拉氏量为 $g\bar{J}_\mu \overline{W}_\mu$ + h. c.，其中 $\bar{J}_\mu = \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{i}U_{ij}\overline{u^i}\gamma_\mu(1+\gamma_5)d^j$。因此相应于图 9.8 的振幅为

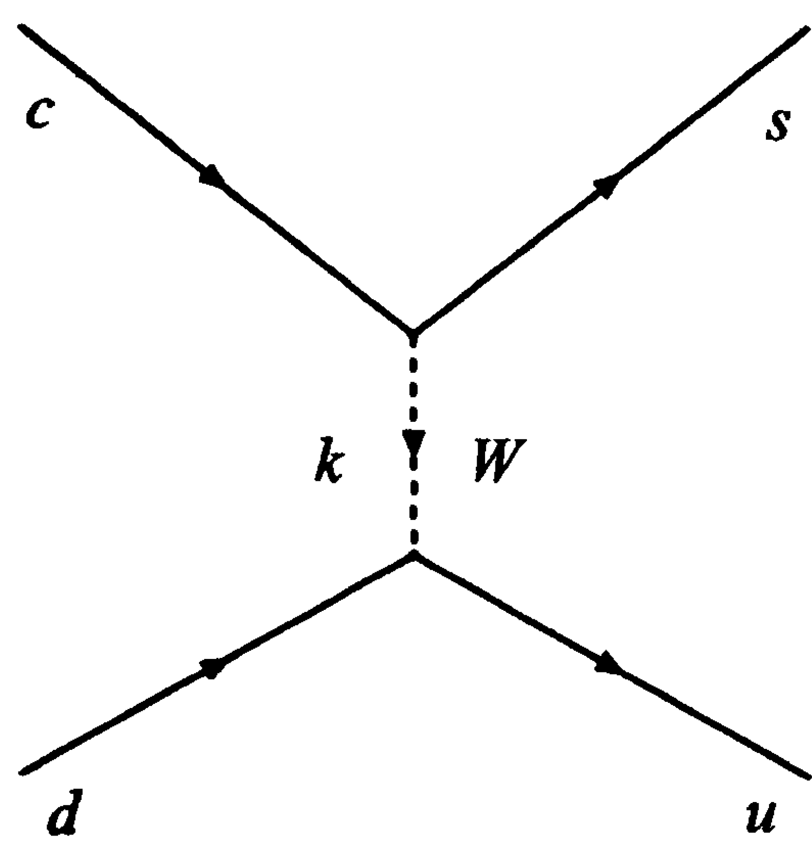



图 9.8

$$A = \mathrm{i}\frac{g^2}{8}U_{cs}^* U_{ud}\frac{\delta_{\mu\nu}+\frac{k_\mu k_\nu}{m_W^2}}{k^2+m_W^2}\bar{s}\gamma_\mu(1+\gamma_5)c\bar{u}\gamma_\nu(1+\gamma_5)d \tag{9.199}$$

其中，$k$ 为 $W$ 所带的动量。在本节中我们用同一符号 $q$ 代表夸克的场 $\psi_q$ 和旋量 $u_q$。在 $k_\mu \ll m_W$ 时上式可以近似为

$$\mathrm{i}\frac{G}{\sqrt{2}}u_{cs}^* U_{ud}(\bar{s}c)_{V-A}(\bar{u}d)_{V-A}\left\{1+O\left(\frac{k^2}{m_W^2}\right)\right\}$$

其中，$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2}$，脚标 $V-A$ 表示矩阵 $\gamma_\mu(1+\gamma_5)$。这个振幅可以用如下的拉氏

量得到

$$\mathscr{L}_{\text{effEM}} = \frac{G}{\sqrt{2}} U_{cs}^{*} U_{ud} Q + \text{含微商的高量纲算符} \tag{9.200}$$

其中，$Q = (\bar{s}c)_{V-A}(\bar{u}d)_{V-A}$。上式中首项就是 V-A 流-流耦合相互作用，在低能下它是原来理论的很好近似。$\mathscr{L}_{\text{effEM}}$不含 $W$ 场，它就是 $\Delta c = \Delta s = 1$ 过程的低能有效拉氏量。它可以用图 9.9 表示。

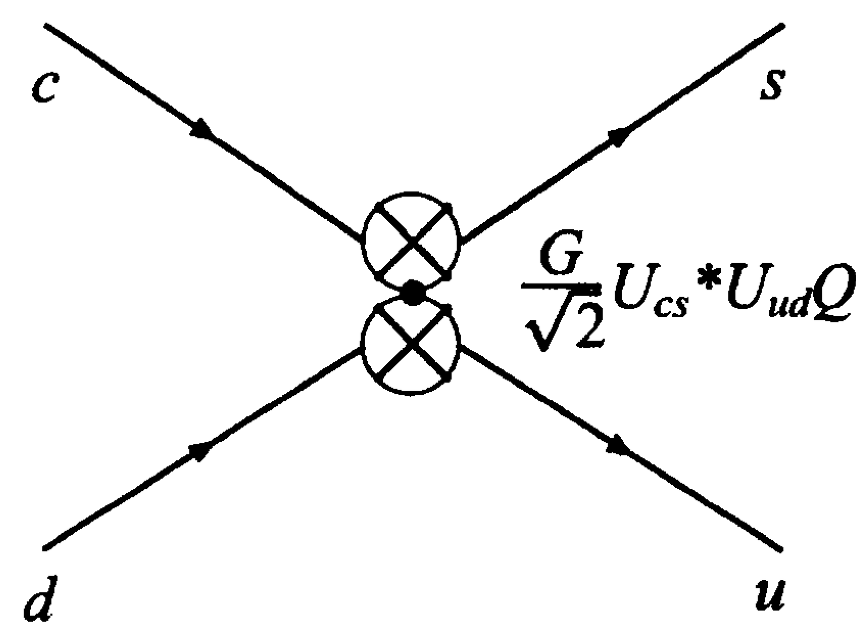



图 9.9

现在我们从泛函积分形式推导同一低能有效拉氏量。在有三代夸克的 W-S 模型中，式(9.195)中与 $W$ 场有关的因子为

$$Z_{\text{W}} = \int [\mathscr{D}\overline{W}][\mathscr{D}W] \exp\left(\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}_{\text{W}}\right)$$

$$\mathscr{L}_{\text{W}} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \overline{W}_\nu - \partial_\nu \overline{W}_\mu)(\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu) - m_{\text{W}}^2 \overline{W}_\mu W_\mu + g(\bar{J}_\mu \overline{W}_\mu + J_\mu W_\mu) \tag{9.201}$$

其中，$\bar{J}_\mu = \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathrm{i} U_{ij} \overline{u^i} \gamma_\mu (1+\gamma_5) d^j$。引入 $W$ 场的动能算符

$$K_{\mu\nu}(x,y) = \delta^4(x-y)[\delta_{\mu\nu}(\partial^2 - m_{\text{W}}^2) - \partial_\mu \partial_\nu]$$

$$Z_{\text{W}} = \int [\mathscr{D}\overline{W}][\mathscr{D}W] \exp\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x \mathrm{d}^4 y \overline{W}_\mu(x) K_{\mu\nu}(x,y) W_\nu(y) + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x (\bar{J}_\mu \overline{W}_\mu + J_\mu W_\mu)\right] \tag{9.202}$$

上式中的泛函积分是高斯型的。引入 $K_{\mu\nu}$ 的逆 $\Delta_{\mu\nu}$

$$\int \mathrm{d}^4 y K_{\mu\nu}(x,y) \Delta_{\nu\lambda}(y,z) = \delta_{\mu\lambda} \delta^4(x-z)$$

$$\Delta_{\mu\nu}(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}^4 k \Delta_{\mu\nu}(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-y)}$$

$$\Delta_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2 + m_{\text{W}}^2}\left(\delta_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_{\text{W}}^2}\right) \tag{9.203}$$

为 $W$ 场的传播子。式(9.202)可积出得到

$$Z_{\text{W}} \sim \exp\left[\mathrm{i}g^2 \iint \mathrm{d}^4 x \mathrm{d}^4 y J_\mu(x) \Delta_{\mu\nu}(x,y) \bar{J}_\nu(y)\right]$$

由此得到低能有效作用量为

$$S_{\text{eff}} = \int \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}_{q-\text{kin}} + g^2 \int \mathrm{d}^4 x \int \mathrm{d}^4 y J_\mu(x) \Delta_{\mu\nu}(x-y) \bar{J}_\nu(y) \tag{9.204}$$

上式中，$\mathscr{L}_{q-\text{kin}}$为拉氏量中夸克的动能项。由式(9.203)得

$$\Delta_{\mu\nu}(x-y)=\frac{1}{m_{\mathrm{W}}^2}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{\partial_\mu\partial_\nu}{m_{\mathrm{W}}^2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\partial^2}{m_{\mathrm{W}}^2}\right)^n\delta^4(x-y)$$

由此得到弱电低能有效拉氏量

$$\mathscr{L}_{\text{effEW}}=\frac{G}{\sqrt{2}}U_{ij}^{*}U_{kl}(\overline{d^j}\gamma_\mu(1+\gamma_5)u^i)(\overline{u^k}\gamma_\mu(1+\gamma_5)d^l)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{O_n}{m_{\mathrm{W}}^{d_n-4}} \tag{9.205}$$

上式中最后一项 $d_n>6$，在低能下通常可以忽略。它包含的 $\Delta c=\Delta s=1$ 项与式(9.200)一样。

从以上计算中我们可以看到在前面关于低能有效场论的一般讨论中已经提到的一些关键点：

(1) 重的 W 场积掉了。一般来说，如微扰论可用，泛函积分结果与直接由费曼图计算的结果一样。

(2) 积出重粒子场后得到的有效作用量 $S_{\text{eff}}$一般是轻粒子场的非定域泛函，这可以从微扰论 Feynman 图理解。在这里 $J_\mu(x)$，$\bar{J}_\nu(y)$与 $\Delta_{\mu\nu}(x-y)$相乘，而 $\Delta_{\mu\nu}(x-y)$集中在$|x-y|<m_{\mathrm{W}}^{-1}$ 处。由于在低能过程中 $J_\mu(x)$，$\bar{J}_\nu(y)$的波长$\gg m_{\mathrm{W}}^{-1}$，在$|x-y|<m_{\mathrm{W}}^{-1}$ 范围内它的变化很小，因此可用 $\int \mathrm{d}^4x\Delta_{\mu\nu}(x)=\delta_{\mu\nu}m_{\mathrm{W}}^{-2}$ 得到小距离算符乘积展开式

$$\int \mathrm{d}^4y J_\mu(x)\Delta_{\mu\nu}(x-y)\bar{J}_\nu(y)=m_{\mathrm{W}}^{-2}J_\mu(x)\bar{J}_\mu(x)+\text{高阶算符} \tag{9.206}$$

(3) 如把小距离算符乘积展开式的所有项都保留，则与原来的理论等价。但在低能下，最重要的是量纲最低的算符，高阶项可以忽略。

(4) 重的夸克场也可以积掉，如研究 $c\to su\bar{d}$ 过程，可以积掉 $t$，$b$ 夸克场。在由拉氏量式(9.205)构成的生成泛函中积掉 $t$，$b$ 夸克场时，由于我们只保留弱作用的最低阶，在现在的计算中，我们只需要积它们的动能项而忽略它们的相互作用项。积分结果只产生一个归一化因子，对 $c\to su\bar{d}$ 过程的有效作用量毫无影响。但以后考虑 QCD 对这个有效作用量的修正时会有影响。

### 9.8.3 QCD 对弱作用低能有效拉氏量的修正[24,25]

QCD 对夸克间的弱作用的修正可以用图 9.10 表示，图中的波纹线表示胶子传播子，它们的端点可以在任一夸克线上。当重整化能标 $\mu>1\text{GeV}$ 时，强作用耦合常数$\frac{\alpha_s(\mu^2)}{4\pi}<0.04$，因此胶子动量$|q^2|\geqslant\mu^2$ 的部分(称为短距离部分)可以用微

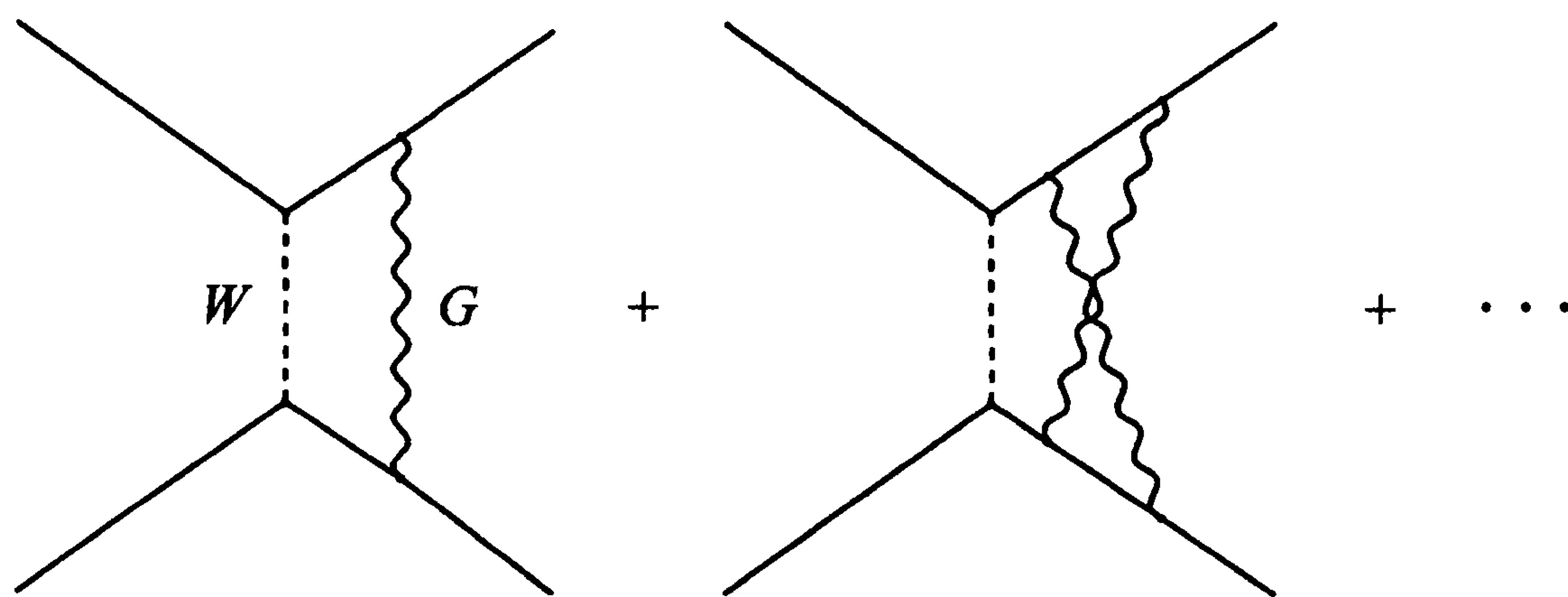



图 9.10

扰论计算。但计算结果中会出现$\frac{\alpha_s(\mu^2)}{4\pi}\ln\frac{m_W^2}{p^2}$因子，$p$ 为外动量。产生这种因子的原因可以这样理解：在 $p^2 \ll |q^2| \ll m_W^2$ 的区域中图 9.10 中的过程趋于图 9.11 中两个流在同一点作用的过程，因此产生对应于三角图的因子 $\sim \frac{\alpha_s}{4\pi}\int_{p^2}^{m_W^2}\frac{dq^2}{q^2}$。图 9.10 中无穷多个这种对数的幂次项可以用有效理论的重整化群方程求和，这是用低能有效理论的好处，在原来的理论中不容易做到。

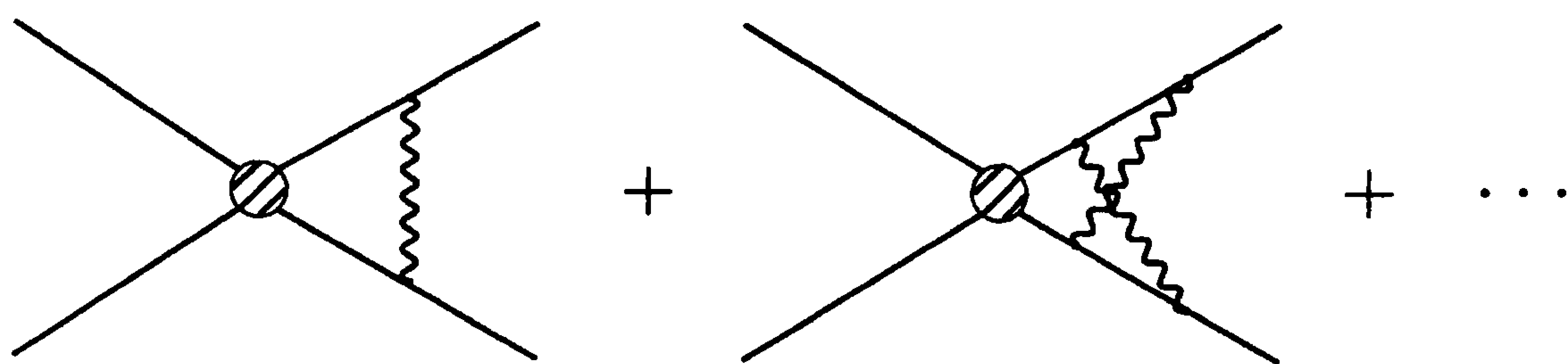



图 9.11

我们仍以 $c \to su\bar{d}$ 过程为例说明考虑 QCD 修正的步骤。

(1) 写出单圈修正后的 $\mathscr{L}_{\text{eff}}$的形式

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = \frac{G}{\sqrt{2}}U_{cs}^* U_{ud}(C_1(\mu)Q_1 + C_2(\mu)Q_2) \tag{9.207}$$

$$Q_1 = (\overline{s^\alpha}c^\beta)_{V-A}(\overline{u^\beta}d^\alpha)_{V-A}, \qquad Q_2 = (\overline{s^\alpha}c^\alpha)_{V-A}(\overline{u^\beta}d^\beta)_{V-A} \tag{9.208}$$

上式中，$\alpha,\beta$ 是色指标，$C_1, C_2$ 称为 Wilson 系数。$Q_2$ 是式(9.200)中原来就有的，$Q_1$ 是 QCD 修正产生的。$Q_1$ 出现的原因将在下一步中说明。

(2) Wilson 系数的抽取

$C_1, C_2$ 由完整理论与有效理论在 $\mu \approx m_W$ 处的匹配计算。考虑完整理论和有效理论中的去腿 Green 函数

$$\Gamma_{\text{full}} = \langle 0 \mid T(\bar{c}s\bar{d}u) \mid 0\rangle_{\text{full, trunc}} \text{ 的傅氏变换在 } k = 0 \text{ 时的值}$$

$$\Gamma_{\text{eff}} = \langle 0 \mid T(\bar{c}s\bar{d}u) \mid 0\rangle_{\text{eff, trunc}} \text{ 的傅氏变换在 } k = 0 \text{ 时的值} \tag{9.209}$$

完整理论中包含 $W$ 与夸克的弱作用和 QCD,有效理论中则包含流-流耦合弱作用和 QCD。因此有

$$\Gamma_{\text{eff}} = \frac{G}{\sqrt{2}} U_{cs}^* U_{ud} (C_1(\mu)\langle Q_1\rangle + C_2(\mu)\langle Q_2\rangle) \tag{9.210}$$

其中,$\langle Q_i\rangle = \langle 0|\, T(Q_i \bar{c} s \bar{d} u)\,|0\rangle_{\text{QCD, trunc}}$为 QCD 中含复合算符 $Q_i$ 的去腿 Green 函数,其中不再含弱作用。所谓匹配即要求

$$\Gamma_{\text{full, tranc}}(\mu) = \Gamma_{\text{eff, trunc}}(\mu), \qquad \text{当 } \mu \simeq m_{\text{W}} \tag{9.211}$$

$C_i$ 的计算步骤如下:

第一步计算 $\Gamma_{\text{full}}$。用 QCD 的 Feynman 规范计算图 9.12 中的几个单圈图和与它们对称的图形,其中图 9.12(d)是 $W$ 作用顶角的抵消项的贡献($Z_{1\text{W}}$是顶角重整化常数)。我们取近似夸克质量 $m_i = 0$,动量 $= p_i^2 > 0$(欧氏区),并用维数正规化最小减除规则。最后得到

$$\Gamma_{\text{full}} = \frac{G}{\sqrt{2}} U_{cs}^* U_{ud} \left\{ S_2 + 2C_2(F)\frac{\alpha_s}{2\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\ln\frac{m_{\text{W}}^2}{p^2}\right) S_2 + \frac{3}{N}\frac{\alpha_s}{4\pi}\ln\frac{m_{\text{W}}^2}{p^2} S_2 - 3\frac{\alpha_s}{4\pi}\ln\frac{m_{\text{W}}^2}{p^2} S_1 + 2(Z_{\text{W}} - 1) S_2 \right\} \tag{9.212}$$

上式中,$C_2(F) = T^a T^a = \dfrac{N^2-1}{2N}$,对 QCD $N=3$;$S_i = \langle Q_i\rangle_{\text{tree}}$为 $\alpha_s$ 零阶的$\langle Q_i\rangle$值。

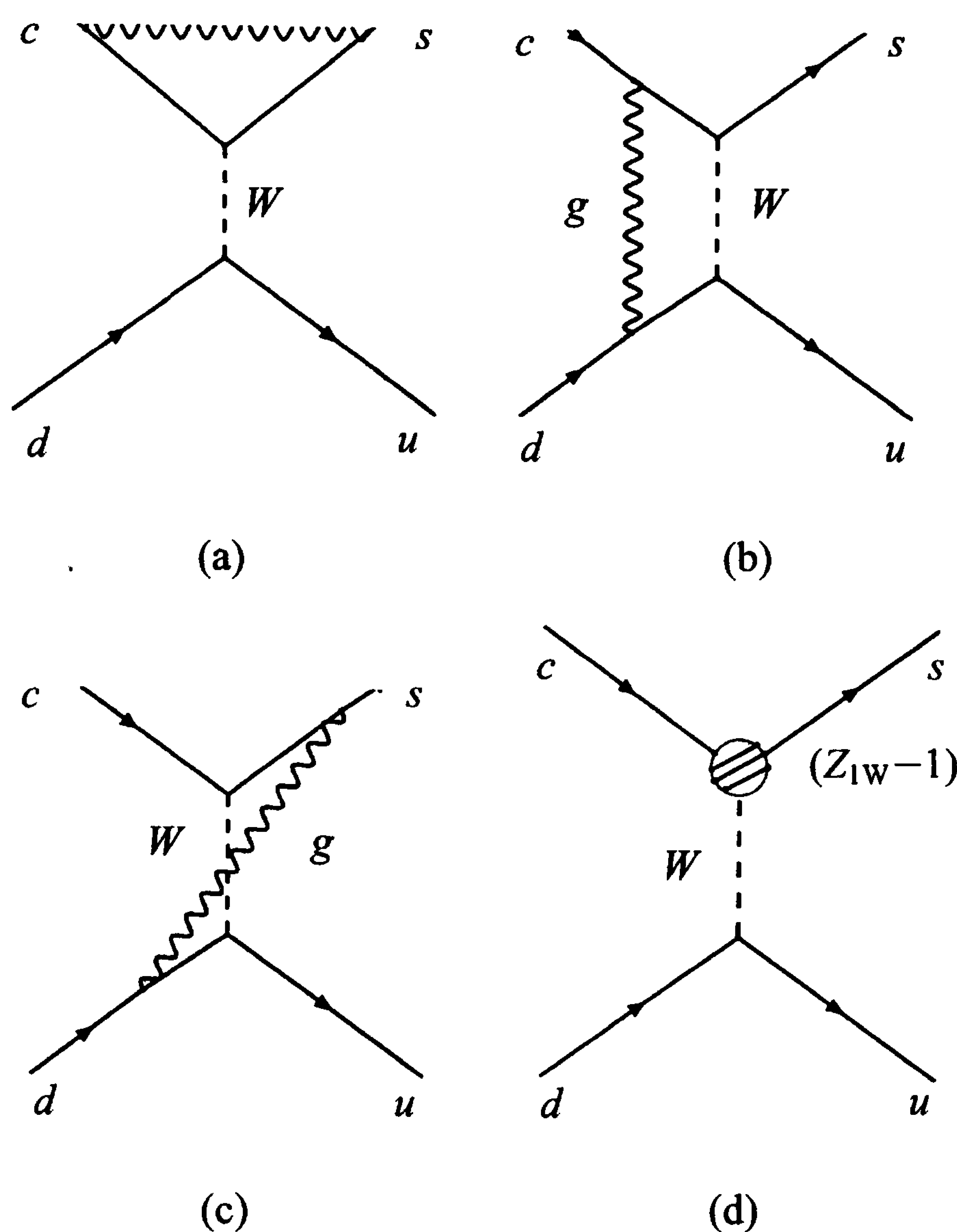



图 9.12

图 9.12(a)中的 Feynman 图是 $W$ 作用顶角的修正,它给出上式右方的第二项。它包含一个发散项,被图 9.12(d)中的 Feynman 图抵消,其中

$$Z_{1W} = 1 - C_2(F)\frac{\alpha_s}{2\pi}\frac{1}{\varepsilon} \tag{9.213}$$

式(9.209)是含有多个指标的方程,令 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 分别为 $\bar{c},s,\bar{d},u$ 的色指标,$i,j,k,l$ 分别为它们的 Dirac 旋量指标。在图 9.12(b)、(c)的计算中,先做圈动量的积分,然后利用 Fierz 变换关系式

$$[\gamma_\mu(1+\gamma_5)]_{ij}[\gamma_\mu(1+\gamma_5)]_{kl} = [\gamma_\mu(1+\gamma_5)]_{il}[\gamma_\mu(1+\gamma_5)]_{kj}$$

和 $\gamma$ 矩阵的一些代数运算,可将结果写成常数乘$(\bar{s}T^a c)_{V-A}(\bar{u}T^a d)_{V-A}$的形式,其中 $T^a$ 是 SU(3)群生成元在基础表示中的矩阵。$T^a$ 的出现是由于[如 9.12(b)、(c)图所示]胶子线的两端各有一个 SU(3)群生成元因子,分别出现在 $\bar{s},c$ 和 $\bar{u},d$ 之间。$T^a$ 满足关系式

$$T^a_{\alpha\beta}T^a_{\gamma\delta} = -\frac{1}{2N}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \frac{1}{2}\delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\beta} \tag{9.214}$$

上式右方的系数是用条件 $\mathrm{Tr}(T)=0$, $\mathrm{Tr}(T^aT^b)=\frac{1}{2}\delta_{ab}$定出的。式(9.214)右方第一项给出 $Q_2$ 系数的修正,第二项给出新的算符 $Q_1$。这两个图形的计算给出式(9.212)右方的第三和第四项。

这里需要说明的是:①上式在 $\alpha_s$ 阶中只保留了含 $\ln\frac{\mu^2}{p^2}$的项,亦即领头对数近似(LLO);②取 $p_i^2\neq 0$ 是为了避免红外发散;③取所有外线的 $p_j^2$ 相同不影响$C_i$ 的计算值,$\Gamma_{\text{full}}$和 $\Gamma_{\text{eff}}$中的 $\ln p_j^2$ 项一样,在匹配条件式(9.211)中消去了。

第二步计算$\langle Q_i\rangle$。由图 9.13 中的 Feynman 图和对称图形算出

$$\langle Q_1\rangle = \left[1 + 2C_2(F)\frac{\alpha_s}{2\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{p^2}\right)\right]S_1$$
$$+\frac{3}{N}\frac{\alpha_s}{2\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{p^2}\right)S_1 - 3\frac{\alpha_s}{2\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{p^2}\right)S_2 + \text{抵消项}$$

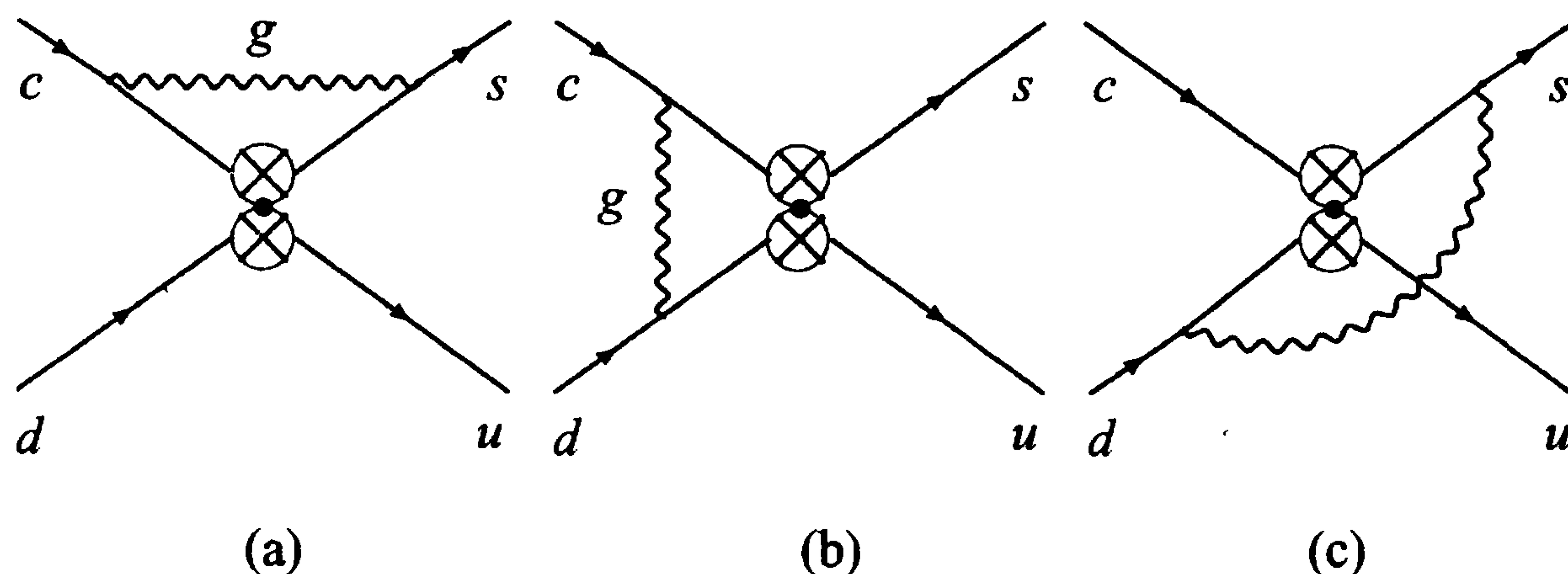



图 9.13

$$\langle Q_2 \rangle = \left[1 + 2C_2(F)\frac{\alpha_s}{2\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{p^2}\right)\right]S_2$$

$$+ \frac{3}{N}\frac{\alpha_s}{2\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{p^2}\right)S_2 - 3\frac{\alpha_s}{2\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{p^2}\right)S_1 + \text{抵消项} \quad (9.215)$$

上式中的发散项用复合算符的重整化抵消项消去。复合算符重整化时一般有混合,按照 5.1 节中的叙述,重整化公式为

$$Q_i(q) = Z_q^2 Z_{ij} Q_j^{(0)}(q) \simeq Q_i^{(0)}(q) + (Z_q^2 - 1)Q_i^{(0)}(q) + (Z_{ij} - \delta_{ij})Q_i^{(0)}(q) \quad (9.216)$$

上式角标$^{(0)}$表示不含抵消项的算符,$Z_q$ 为夸克场 $q$ 的波函数重整化常数。式(9.215)右方的两个抵消项分别用图 9.14 中的两个图形表示。按照类 QED 的 Ward 恒等式,$Z_q = Z_{1W}$,因此,式(9.215)中两个公式的右方第一项中的发散项被图 9.14(a)中的图形所抵消,其余的发散项则要用图 9.14(b)中的图形抵消。由此得出复合算符的重整化矩阵

$$[Z_{ij}] \equiv \hat{Z} = I - \frac{\alpha_s}{2\pi}\frac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix} \frac{3}{N} & -3 \\ -3 & \frac{3}{N} \end{pmatrix} \quad (9.217)$$

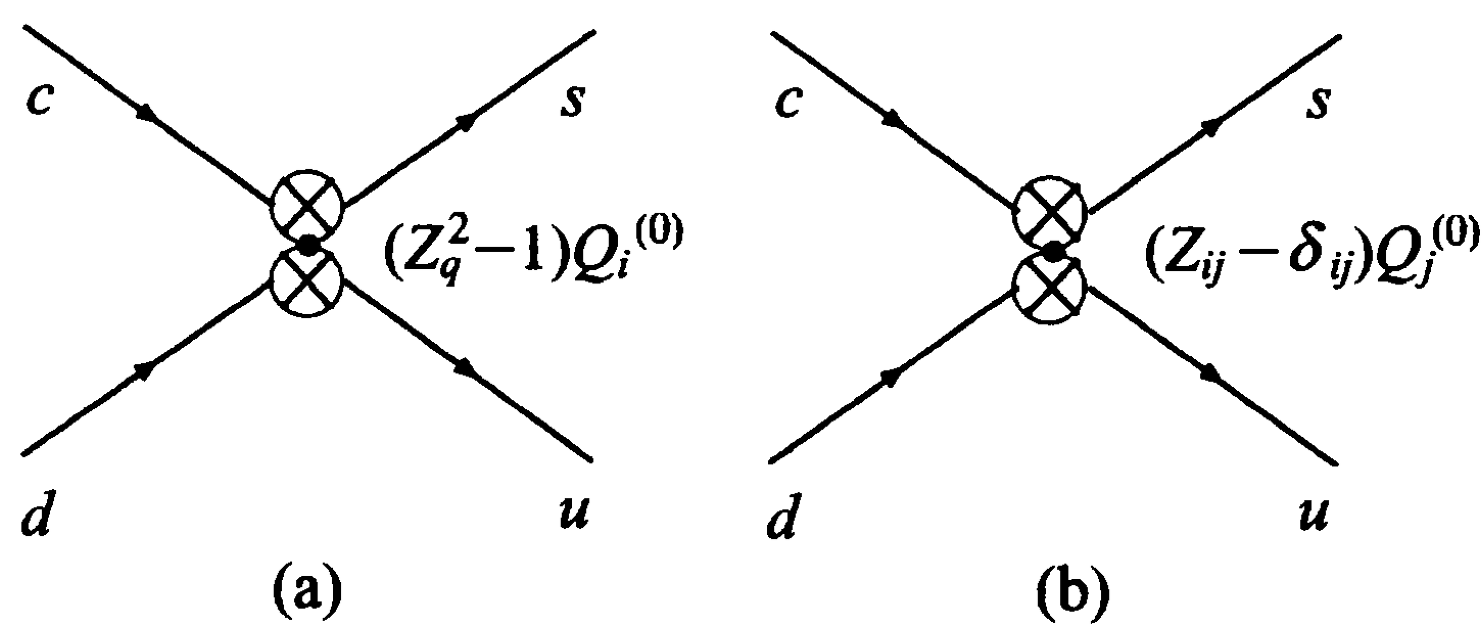



图 9.14

因此,重整化的$\langle 0 | Q_i | 0 \rangle_{\text{QCD, trunc}}$为

$$\langle 0 | Q_1 | 0 \rangle_{\text{QCD, trunc}} = \left(1 + 2C_2(F)\frac{\alpha_s}{4\pi}\ln\frac{\mu^2}{p^2}\right)S_1 + \frac{3}{N}\frac{\alpha_s}{4\pi}\ln\frac{\mu^2}{p^2}S_1 - 3\frac{\alpha_s}{4\pi}\ln\frac{\mu^2}{p^2}S_2$$

$$\langle 0 | Q_2 | 0 \rangle_{\text{QCD, trunc}} = \left(1 + 2C_2(F)\frac{\alpha_s}{4\pi}\ln\frac{\mu^2}{p^2}\right)S_2 + \frac{3}{N}\frac{\alpha_s}{4\pi}\ln\frac{\mu^2}{p^2}S_2 - 3\frac{\alpha_s}{4\pi}\ln\frac{\mu^2}{p^2}S_1 \quad (9.218)$$

第三步由匹配条件式(9.211)定出 Wilson 系数 $C_i$。由式(9.212)、(9.210)和(9.218)得到

$$C_1(\mu) = -3\frac{\alpha_s}{4\pi}\ln\frac{m_W^2}{\mu^2}, \qquad C_2(\mu) = 1 + \frac{3}{N}\frac{\alpha_s}{4\pi}\ln\frac{m_W^2}{\mu^2} \quad (9.219)$$

重整化的有效作用量可写为

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = \frac{G}{\sqrt{2}}U_{cs}^{*}U_{ud}Z_q^2C_iZ_{ij}Q_j^{(0)}(q) = \frac{G}{\sqrt{2}}U_{cs}^{*}U_{ud}C_iZ_{ij}Q_j^{(0)}(q^{(0)}) \tag{9.220}$$

其中,$q^{(0)}$为未重整的夸克场。我们可以换一种看法,$Q_i$ 可看作拉氏量中一项场算符乘积,$C_i$ 可看作相应的耦合常数,按照通常的做法把重整化手续归结为场的波函数和耦合常数的重整化,即把重整化由复合算符移到 Wilson 系数 $C_i$ 上。为此引入

$$C_j^{(0)} = C_iZ_{ij} = (Z^T)_{ji}C_i \tag{9.221}$$

式(9.220)可以写为

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = \frac{G}{\sqrt{2}}U_{cs}^{*}U_{ud}C_i^{(0)}Q_i(q^{(0)}) \tag{9.222}$$

(3) 几点说明

(a) 在有效拉氏量中用算符乘积展开是把短距离效应和长距离效应因子化,前者放在 Wilson 系数 $C_i$ 中,后者放在算符 $Q_i$ 的矩阵元中。这是因为,$\Gamma_{\text{full}}$有因子

$$\left(1 + a\frac{\alpha_s}{4\pi}\ln\frac{m_{\text{W}}^2}{p^2}\right) \simeq \left(1 + a\frac{\alpha_s}{4\pi}\ln\frac{m_{\text{W}}^2}{\mu^2}\right)\left(1 + a\frac{\alpha_s}{4\pi}\ln\frac{\mu^2}{p^2}\right)$$

其中,右方第一个因子放在 $C_i$ 中,第二个因子放在$\langle Q_i\rangle$中,而这里的对数因子来自虚胶子动量的积分

$$\int_{p^2}^{m_{\text{W}}^2}\frac{\mathrm{d}k^2}{k^2} = \left(\int_{\mu^2}^{m_{\text{W}}^2} + \int_{p^2}^{\mu^2}\right)\frac{\mathrm{d}k^2}{k^2}$$

上式右方第一项是短距离效应,第二项是长距离效应。

(b) 物理结果与 $\mu$ 无关,$C_i$ 和$\langle Q_i\rangle$对 $\mu$ 的依赖互相抵消。

(c) $C_i$ 与外线粒子态无关,$\Gamma_{\text{full}}$中与外线动量 $p_i$ 有关的因子都包含在$\langle Q_i\rangle$中。只要有效拉氏量中包含了在所取近似下所有的有贡献的算符,$C_i$ 可以由任意选取的过程计算。

(d) 红外发散也可以用别的方法处理。例如,可保持 $p_i^2 = m_i^2$ 而引进虚拟胶子质量,这种方案和上面所用的 $p_i^2 \neq 0$ 方案都可能产生破坏规范不变性的问题。也可以用维数正规化,这时红外发散也贡献$\frac{1}{\varepsilon}$因子,在 $\Gamma_{\text{full}}$和$\langle Q_i\rangle$中与紫外发散因子相混。但这些问题都不影响 $C_i$ 的计算。

(4) 复合算符重整化矩阵的对角化

重整化矩阵一般都可以通过线性变换对角化,即 $\hat{V}\hat{Z}\hat{V}^{-1} = \hat{Z}_d$,$\hat{Z}_d$ 是一个对角矩阵。这时 $\vec{C}^{\text{T}}\hat{Z}\vec{Q} = (\hat{V}^{-1}\vec{C})^{\text{T}}\hat{Z}_d(\hat{V}\vec{Q})$。对式(9.217)的具体情况

$$\hat{V}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\hat{V}^{-1},\qquad \hat{Z}_d=\begin{pmatrix}Z_+ & 0\\ 0 & Z_-\end{pmatrix}$$

$$Z_{\pm}=1\pm\frac{\alpha_s}{2\pi}\frac{1}{\varepsilon}\left(3\frac{N\mp 1}{N}\right) \tag{9.223}$$

$$C_iZ_{ij}Q_j=C_+Z_+Q_++C_-Z_-Q_- \tag{9.224}$$

$$Q_{\pm}=\frac{Q_2\pm Q_1}{2},\qquad C_{\pm}=C_2\pm C_1$$

在重整化下

$$Q_{\pm}(q)=Z_q^2Z_{\pm}Q_{\pm}^{(0)}(q^{(0)}) \tag{9.225}$$

没有混合。因此有

$$\Gamma_{\text{eff}}=\frac{G}{\sqrt{2}}U_{cs}^*U_{ud}(C_+(\mu)\langle Q_+\rangle+C_-(\mu)\langle Q_-\rangle) \tag{9.226}$$

$$\langle Q_{\pm}(\mu)\rangle=\left(1+2C_2(F)\frac{\alpha_s}{4\pi}\ln\frac{\mu^2}{p^2}\right)S_{\pm}+\left(\frac{3}{N}\mp 3\right)\frac{\alpha_s}{4\pi}\ln\frac{\mu^2}{p^2}S_{\pm} \tag{9.227}$$

$$C_{\pm}(\mu)=1+\left(\frac{3}{N}\mp 3\right)\frac{\alpha_s}{4\pi}\ln\frac{m_W^2}{\mu^2}$$

(5) 重整化群改进

当$\mu\simeq 1\text{GeV}$时，$\frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi}\simeq 0.04$，$N=3$时，$C_+$和$C_-$中的$\frac{\alpha_s}{4\pi}\ln\frac{m_W^2}{\mu^2}$项分别$\simeq 0.65$和$1.30$。所以，$C_{\pm}(\mu)$的微扰论展开式中$\left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\ln\frac{m_W^2}{\mu^2}\right)^n$项很重要。这种项可以用重整化群方程求和。由式(9.221)，在维数正规化最小减除方案中$C_i^{(0)}(g_s^{(0)},\varepsilon)=Z^{\text{T}}(g_s,\varepsilon)_{ij}C_j(g_s,\mu)$，由此得到重整化群方程

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln\mu}C_i(g_s,\mu)+\gamma_{ij}C_j(g_s,\mu)\\&=\left[\left(\frac{\partial}{\partial\ln\mu}+\beta(g_s)\frac{\partial}{\partial g_s}\right)\delta_{ij}+\gamma_{ij}(g_s)\right]C_j(g_s,\mu)=0\end{aligned} \tag{9.228}$$

这里，反常量纲矩阵

$$\hat{\gamma}(g_s)=(\hat{Z}^{\text{T}})^{-1}\frac{\mathrm{d}\hat{Z}^{\text{T}}}{\mathrm{d}\ln\mu} \tag{9.229}$$

在把$\hat{Z}$对角化后，式(9.228)化为两个不耦合的方程

$$\left[\frac{\partial}{\partial\ln\mu}+\beta(g_s)\frac{\partial}{\partial g_s}+\gamma_{\pm}(g_s)\right]C_{\pm}(g_s,\mu)=0 \tag{9.230}$$

在最小减除方案中，对任意圈有展开式

$$Z_{\pm}(g_s) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^k} Z_{\pm}^{(k)}(g_s)$$

由第六章中式(6.106″)得到

$$\gamma_{\pm}(g_s) = -g_s^2 \frac{\partial Z_{\pm}^{(1)}(g_s)}{\partial g_s^2} \tag{9.231}$$

由上式及式(9.223)得到

$$\gamma_{\pm}(g_s) = \frac{\alpha_s}{4\pi}\gamma_{\pm 0} + O(\alpha_s^2), \qquad \gamma_{\pm 0} = \mp 6\frac{N \mp 1}{N} \tag{9.232}$$

重整化群方程(9.230)的解为

$$C_{\pm}(g_s, \mu) = U_{\pm}(\mu, \mu_W) C_{\pm}(g_s, \mu_W)$$

$$U_{\pm}(\mu, \mu_W) = \exp\left\{-\int_{g_s(\mu_W)}^{g_s(\mu)} dg' \frac{\gamma_{\pm}(g')}{\beta(g')}\right\} \tag{9.233}$$

$$\mu_W = O(m_W)$$

$$\beta(g_s) = -\beta_0 \frac{g_s^3}{16\pi^2} + O(g_s^5), \qquad \beta_0 = \frac{11}{3}N - \frac{2}{3}N_f \tag{9.234}$$

由此得到在 LLO 近似下

$$C_{\pm}(g_s, \mu) = \left[\frac{\alpha_s(m_W)}{\alpha_s(\mu)}\right]^{-\frac{\gamma_{\pm 0}}{2\beta_0}} C_{\pm}(g_s, m_W) \tag{9.235}$$

由式(9.227),在 LLO 近似下 $C_{\pm}(g_s, m_W) = 1$。

可以用式(9.235)把 $C_{\pm}(g_s, \mu)$ 由 $\mu \simeq m_W$ 演化到 $\mu \simeq m_c \simeq 1.4 \sim 1.5\text{GeV}$。在 $m_b \leqslant \mu \leqslant m_W$ 区域内可积掉 $t$ 夸克场,得到 $N_f = 5$ 的有效 QCD。由式(9.234),$\beta_0$ 与 $N_f$ 有关。在 $N_f = 5$ 时 $-\frac{\gamma_{+0}}{2\beta_0^{(5)}} = \frac{6}{23}$, $-\frac{\gamma_{-0}}{2\beta_0^{(5)}} = -\frac{12}{23}$,因此

$$C_{+}(m_b) = \left[\frac{\alpha_s^{(5)}(m_W)}{\alpha_s^{(5)}(m_b)}\right]^{\frac{6}{23}}, \qquad C_{-}(m_b) = \left[\frac{\alpha_s^{(5)}(m_W)}{\alpha_s^{(5)}(m_b)}\right]^{-\frac{12}{23}} \tag{9.236}$$

这里,上角标$^{(5)}$表示 $N_f = 5$ 的有效 QCD。在 $m_c \leqslant \mu \leqslant m_b$ 的区域内用 $N_f = 4$ 的有效 QCD。这时 $-\frac{\gamma_{+0}}{2\beta_0^{(4)}} = \frac{6}{25}$, $-\frac{\gamma_{-0}}{2\beta_0^{(4)}} = -\frac{12}{25}$,因此

$$C_{+}(\mu) = \left[\frac{\alpha_s^{(4)}(m_b)}{\alpha_s^{(4)}(\mu)}\right]^{\frac{6}{25}} \left[\frac{\alpha_s^{(5)}(m_W)}{\alpha_s^{(5)}(m_b)}\right]^{\frac{6}{23}}$$

$$C_{-}(\mu) = \left[\frac{\alpha_s^{(4)}(m_b)}{\alpha_s^{(4)}(\mu)}\right]^{-\frac{12}{25}} \left[\frac{\alpha_s^{(5)}(m_W)}{\alpha_s^{(5)}(m_b)}\right]^{-\frac{12}{23}} \tag{9.237}$$

对 $c \to su\bar{d}$ 过程,取 $\mu \approx m_c$ 就可以了。如研究能量更低的过程,在做微扰计算时可取 $1\text{GeV} \leqslant \mu < m_c$。这时要用 $N_f = 3$ 的有效 QCD。在式(9.237)中 $\alpha_s^{(N_f)}$ 是夸克味数为 $N_f$ 的有效 QCD 的单圈跑动耦合常数

$$\alpha_s^{(N_f)}(\mu) = \frac{\alpha_s^{(N_f)}(\mu_0)}{1 - \beta_0^{(N_f)} \dfrac{\alpha_s^{(N_f)}(\mu_0)}{4\pi} \ln \dfrac{\mu^2}{\mu_0^2}} \tag{9.238}$$

在式(9.237)中 $C_\pm(\mu)$是 $\alpha_s \ln \dfrac{\mu^2}{\mu_0^2}$ 的函数,所以是 LLO 近似。匹配点不是完全确定的,可以用 $\mu \sim m_W, \mu \sim m_b \cdots$代替。因为 $C(\mu_W) = C(m_W) + O(\alpha_s)$,在这个范围内改变匹配点产生的差别为次领头对数近似(NLLO)的量级。

用上面描述的有效场论方法得到的跑动耦合常数 $\alpha_s(\mu)$在 LLO 近似下是分段光滑的,在各阈值点 $m_W, m_b, m_c$ 处连续但导数不连续。分段光滑是近似的结果,如果把所有高阶算符项的效应都计算进去 $\alpha_s(\mu)$应是完全光滑的。

如果要把所有$\left(\dfrac{\alpha_s(\mu)}{4\pi}\right)^{n+1} \ln^n \dfrac{m_W^2}{\mu^2}$项都加起来,即取 NLLO 近似,则应由单圈图把 $C_i(m_W)$计算到 $\alpha_s$ 量级

$$C_i(m_W) = C_{i,0}(m_W) + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_{i,1}(m_W) \tag{9.239}$$

并且在重整化群方程中用双圈 $\beta, \gamma_i$ 函数

$$\beta = -\beta_0 g_s \frac{\alpha_s}{4\pi} - \beta_1 g_s \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2, \qquad \gamma_\pm = \gamma_{\pm 0} \frac{\alpha_s}{4\pi} + \gamma_{\pm 1} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 \tag{9.240}$$

与此同时,在确定有效耦合常数 $\alpha_s^{(N_f)}$ 在各阈值点 $m_W, m_b, m_c$ 处的初始值时,由于要用单圈图积掉质量大于阈值的重夸克场,有效耦合常数在各阈值点不连续

$$\alpha_s^{(N_f-1)}(\mu) = \alpha_s^{(N_f)}(\mu)\left(1 + \frac{\alpha_s^{(N_f)}(\mu)}{4\pi}\Delta\right), \qquad \text{当 } \mu = \text{阈值} \tag{9.241}$$

此外,在 $Q_i$ 的强子矩阵元中也要包括微扰单圈修正,否则振幅对 $\mu$ 的依赖性不能抵消,虽然这可能不是主要的项。

(6) 一般的重整化群方程解

现在我们讨论一般的情况,设用 $C_i$ 为基时 $\hat{Z}$ 不对角。令

$$\boldsymbol{C} = (C_1, C_2, \cdots)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{C}^{(0)} = \hat{Z}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}$$

重整化群方程式(9.228)可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln\mu} \boldsymbol{C}(g_s, \mu) = -\hat{\gamma}(g_s) \boldsymbol{C}(g_s, \mu) \tag{9.242}$$

上式的解可写为

$$C(g_s,\mu) = \hat{U}(\mu,\mu_W)C(g_s,m_W)$$

$$\hat{U}(\mu,\mu_W) = T_{g'}\exp\left[-\int_{g(\mu_W)}^{g(\mu)}\mathrm{d}g'\frac{\hat{\gamma}(g')}{\beta(g')}\right] \tag{9.243}$$

不同 $g'$ 值的 $\hat{\gamma}(g')$ 一般不对易，上式中 $T_{g'}$ 表示展开式中 $\hat{\gamma}$ 的乘积按 $\mu$ 由大到小，即 $g'$ 由小到大，从右向左排列。

在单圈近似下 $\hat{\gamma}=\frac{\alpha_s}{4\pi}\hat{\gamma}_0$，因此 $\hat{\gamma}$ 可用与 $g'$ 无关的线性变换 $\hat{\gamma}_0=\hat{V}\hat{\gamma}_{0D}\hat{V}^{-1}$ 对角化。一般情况下 $\hat{\gamma}_0$ 与 $N_f$ 有关，这时有

$$\hat{U}^{(N_f)}(\mu,m_W) = \hat{V}^{(N_f)}\left[\frac{\alpha_s(m_W)}{\alpha_s(m_\mu)}\right]^{\frac{\hat{\gamma}_{0D}^{(N_f)}}{2\beta_0}}(\hat{V}^{(N_f)})^{-1}$$

$$(\hat{V}^{(4)})^{-1}C(\mu) = \left[\frac{\alpha_s^{(4)}(m_b)}{\alpha_s^{(4)}(\mu)}\right]^{\frac{\hat{\gamma}_{0D}^{(4)}}{2\beta_0^{(4)}}}(\hat{V}^{(4)})^{-1}\hat{V}^{(5)}\left[\frac{\alpha_s^{(5)}(m_W)}{\alpha_s^{(5)}(m_b)}\right]^{\frac{\hat{\gamma}_{0D}^{(5)}}{2\beta_0^{(5)}}}(\hat{V}^{(5)})^{-1}C(m_W) \tag{9.244}$$

上式是普遍的结果，可以用于任意个算符混合的情况。

(7) 物理过程的振幅

物理过程的初末态都是强子。强子过程 $D^0\to K^-\pi^+$、$K^0\pi^0$，$D_s^+\to\pi^+\pi^0$ 都与夸克过程 $c+d\to s+u$ 有关。例如，第一个过程的振幅为

$$A = \frac{G}{\sqrt{2}}U_{cs}^*U_{ud}[C_1(\mu)\langle\pi^+K^-|Q_1|D^0\rangle + C_2(\mu)\langle\pi^+K^-|Q_2|D^0\rangle] \tag{9.245}$$

$C_i(\mu)$ 与强子态无关，对上面列举的三个强子过程是相同的。强子矩阵元 $\langle f|Q_i|i\rangle$ 包含长距离物理过程，一般不能完全用微扰论计算，要用非微扰的方法。

(8) 总结

以上计算可归纳为如下的几个步骤：

第一步：

(a) 在弱电微扰论下做 $k^2\ll m_W^2$ 近似，求出与所研究的过程有关的弱电有效作用量

$$\mathscr{L}_{\text{effEW}} = \frac{G}{\sqrt{2}}\sum_{i=1}^{n}\lambda_iC_iQ_i$$

这里，$\lambda_i$ 是与 K-M 矩阵元有关的系数。

(b) 做 QCD 微扰，找出一组在微扰计算下封闭的算符 $\{Q_i\}$，包含 QCD 的有效作用量为

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = \frac{G}{\sqrt{2}}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i C_i(\mu) Q_i(\mu), \qquad N \geqslant n$$

第二步:完整理论和有效理论的匹配,要求在 $\mu \simeq m_{\text{W}}$ 处

$$\Gamma_{\text{full}} = \Gamma_{\text{eff}} = \frac{G}{\sqrt{2}}\sum_{i}\lambda_i C_i(\mu)\langle Q_i\rangle, \qquad \text{到}\frac{\alpha_s}{4\pi}\text{的零(一)阶}$$

(a) 计算 $\Gamma_{\text{full}}$的单(双)圈;

(b) 在 QCD 中计算$\langle Q_i\rangle = \Gamma_{Q_i}$ 的单(双)圈;

(c) 抽取 $C_i(\mu_{\text{W}})$,$\mu_{\text{W}} \sim m_{\text{W}}$ 到$\frac{\alpha_s}{4\pi}$的零(一)阶。

第三步:用重整化群对 LLO(NLLO)项求和

(a) 由单(双)圈图计算复合算符$\{Q_i\}$的重整化常数矩阵 $\hat{Z}$,算出反常量纲矩阵 $\hat{\gamma}$。

(b) 解 $C_i$ 的重整化群方程,求出 $\boldsymbol{C}(\mu) = U(\mu, \mu_{\text{W}})\boldsymbol{C}(\mu_{\text{W}})$。在不同夸克质量所确定的能区中重整化群方程要分段求解。

第四步:强子过程的振幅

$$A = \frac{G}{\sqrt{2}}\sum_{i}\lambda_i C_i(\mu)\langle f \mid Q_i \mid i\rangle$$

要点是长距离效应与短距离效应的因子化。

(a) $C_i(\mu)$由高于 $\mu$ 的能标的效应贡献;

(b) $\langle f | Q_i | i\rangle$由低于 $\mu$ 的能标的效应贡献,其中有强子内部结构的非微扰效应;

(c) $C_i(\mu)$和$\langle f | Q_i | i\rangle(\mu)$对 $\mu$ 的依赖互相在强子过程的振幅中消去;

(d) 把 $\mu$ 取到接近于所研究的过程的特征能标,但限于 $\mu \geqslant 1\text{GeV}$,以便尽可能多的包含可由微扰论可靠计算的物理效应。

(9) $\Delta b = \Delta s = 1$ 的低能有效拉氏量

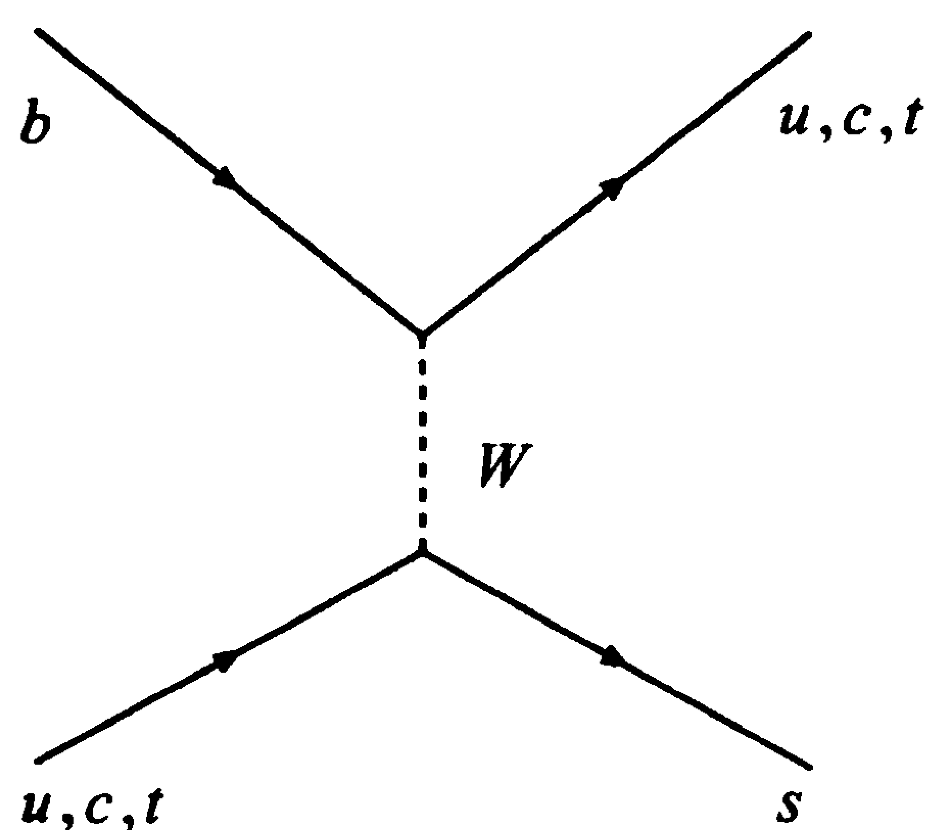



图 9.15

$\mathscr{L}_{\text{eff}}$中要包括的算符依赖于过程中量子数的改变。例如,在考虑 $K \to \pi\pi, 3\pi$ 过程时需要 $\Delta s = 1, \Delta b = \Delta c = 0$ 的算符,在考虑 $B \to K\pi, K\rho$ 等过程时则需要 $\Delta b = \Delta s = 1$ 的算符。现在我们再以后一情况为例,说明怎样确定 $\mathscr{L}_{\text{eff}}$中应包括的算符。

图 9.15 在低能有效理论中产生两个算符

$$Q_2^q = (\overline{q^\alpha} b^\alpha)_{V-A}(\overline{s^\beta} q^\beta)_{V-A}, \qquad q = u, c \tag{9.246}$$

与前面讨论的 $c+d\to s+u$ 情况类似，在考虑 QCD 圈图修正后，产生两个新算符

$$Q_1^q = (\overline{q^\alpha b^\beta})_{V-A}(\overline{s^\beta}q^\alpha)_{V-A}, \qquad q = u, c \tag{9.247}$$

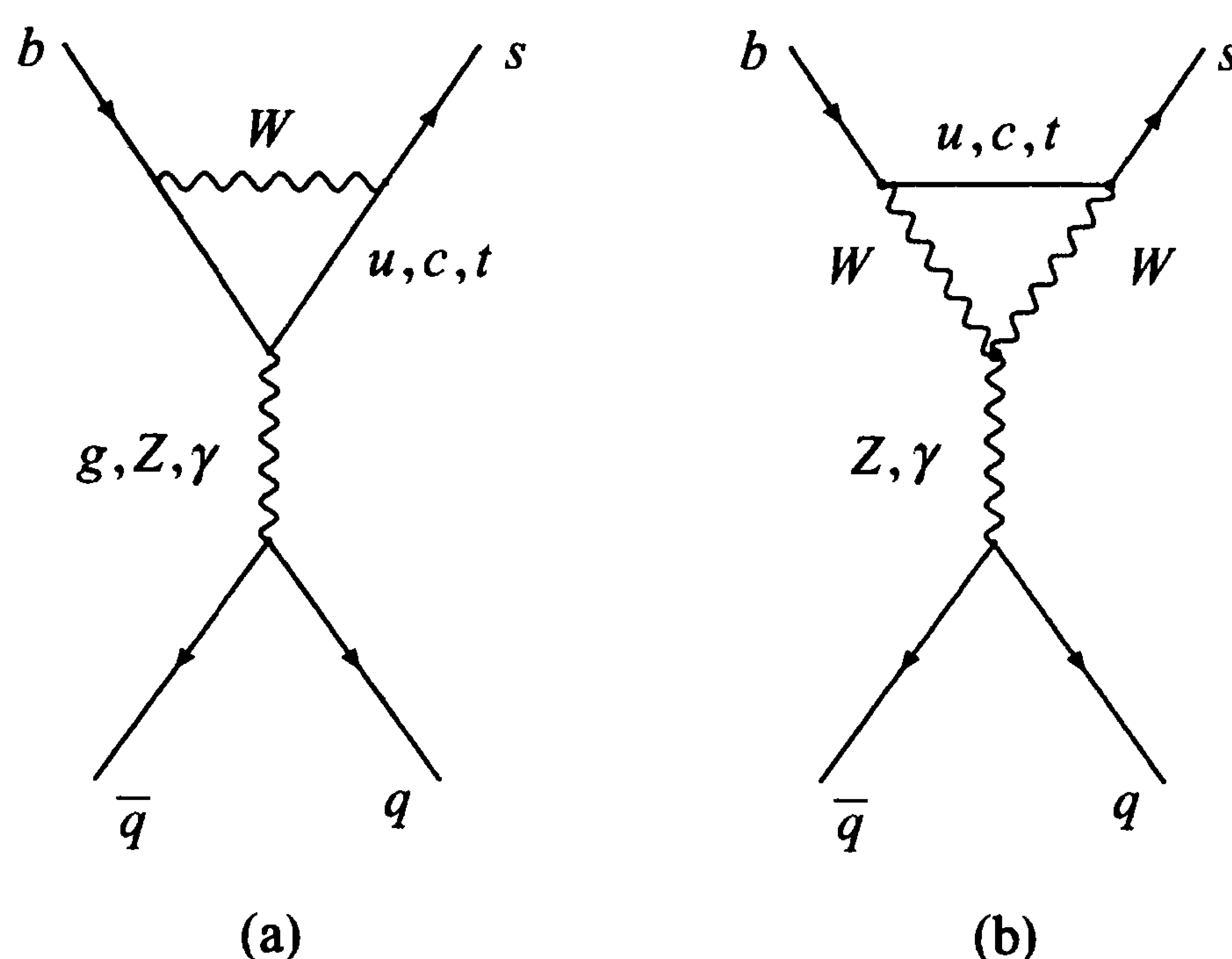



图 9.16

胶子企鹅图 9.16 在低能有效理论中产生一个算符 $Q_p$，它是如下的四个算符的线性组合

$$Q_3 = (\overline{s^\alpha}b^\alpha)_{V-A}\sum_q(\overline{q^\beta}q^\beta)_{V-A}, \qquad Q_4 = (\overline{s^\alpha}b^\beta)_{V-A}\sum_q(\overline{q^\beta}q^\alpha)_{V-A}$$

$$Q_5 = (\overline{s^\alpha}b^\alpha)_{V-A}\sum_q(\overline{q^\beta}q^\beta)_{V+A}, \qquad Q_6 = (\overline{s^\alpha}b^\beta)_{V-A}\sum_q(\overline{q^\beta}q^\alpha)_{V+A}$$

$$q = b, c, s, u, d \tag{9.248}$$

在考虑图 9.17 中的 QCD 圈图和对称图形的修正后，六个算符 $Q_i$ 发生混合，原来 $Q_p$ 中 $Q_i$ 的系数发生跑动，因此六个 $Q_i$ 都应看作独立的。如果图 9.16 中下面交换的粒子是 $\gamma$ 或 $Z$，则称为弱电企鹅图。在考虑 QCD 修正后它产生另外四个算符

$$Q_7 = (\overline{s^\alpha}b^\alpha)_{V-A}\sum_q e_q(\overline{q^\beta}q^\beta)_{V+A}, \qquad Q_8 = (\overline{s^\alpha}b^\beta)_{V-A}\sum_q e_q(\overline{q^\beta}q^\alpha)_{V+A}$$

$$Q_9 = (\overline{s^\alpha}b^\alpha)_{V-A}\sum_q e_q(\overline{q^\beta}q^\beta)_{V-A}, \qquad Q_{10} = (\overline{s^\alpha}b^\beta)_{V-A}\sum_q e_q(\overline{q^\beta}q^\alpha)_{V-A}$$

$$q = b, c, s, u, d \tag{9.249}$$

由此得到 $\Delta b = \Delta s = 1$ 的低能有效拉氏量为

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = \frac{G}{\sqrt{2}}[\lambda_u(C_1(\mu)Q_1^u + C_2(\mu)Q_2^u)$$

$$+ \lambda_c(C_1(\mu)Q_1^c + C_2(\mu)Q_2^c) - \lambda_t\sum_{i=3}^{10}C_i(\mu)Q_i]$$

$$\lambda_q = U_{qs}^* U_{qb} \tag{9.250}$$

在企鹅图中质量特别重的 $t$ 夸克圈的贡献最重要，因此上式最后一项出现系

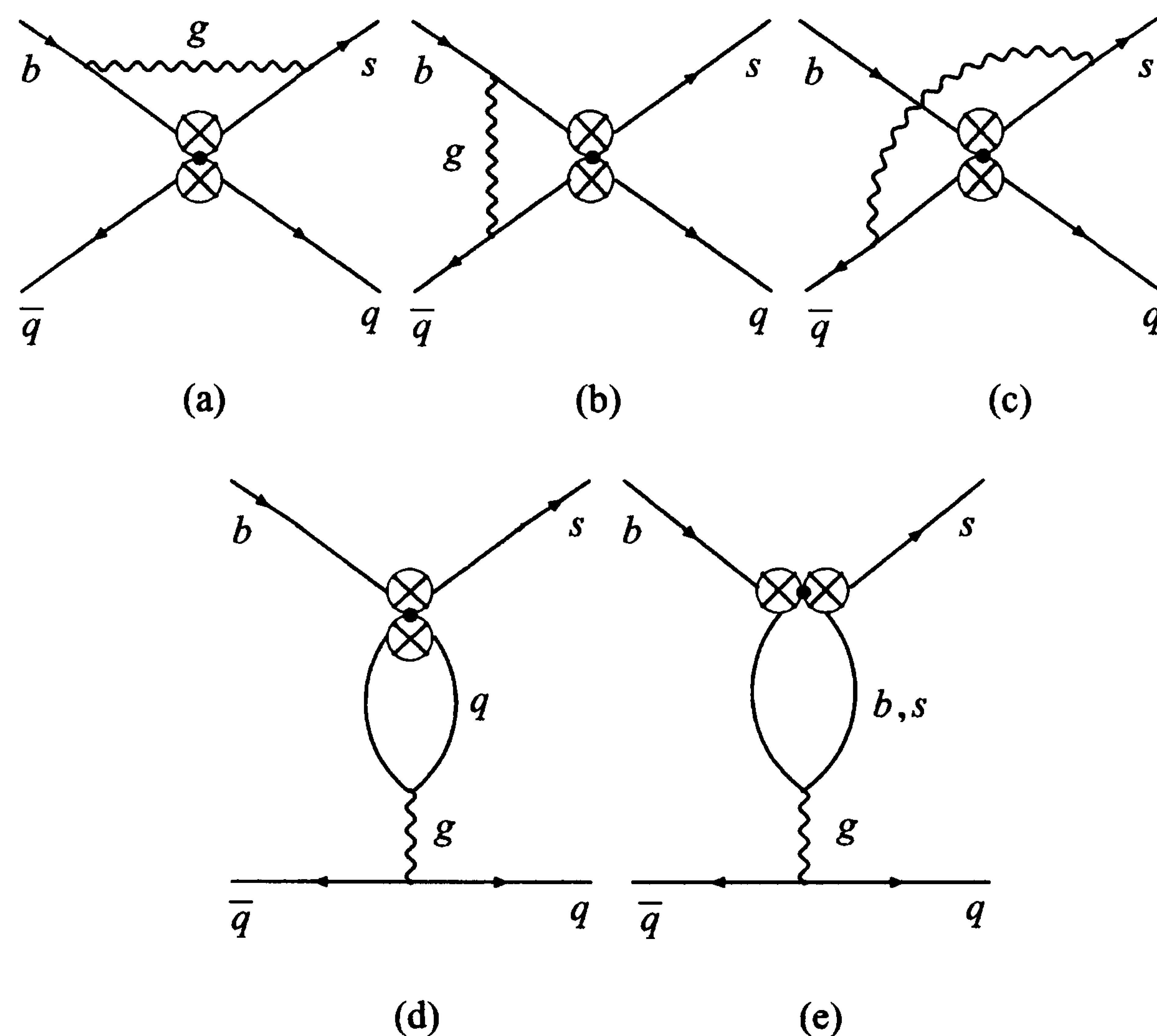



图 9.17

数 $\lambda_t$。企鹅图相对于树图 9.15 虽有一个压低因子$\frac{\alpha_s}{4\pi}$或$\frac{\alpha}{4\pi}$,但胶子企鹅图对一些物理过程,如 $B$ 介子衰变的 CP 破坏很重要,弱电企鹅图对某些物理量也重要,因此不可忽略。

在 $B$ 衰变过程中释放的能量较高,因此在计算强子矩阵元$\langle f | Q_i | B\rangle$时微扰论很有用。

对描述 $K$ 衰变过程的 $\Delta s=1$ 有效作用量,除把上面分析式中的 $b$ 换为 $d$ 外,第一步结果是相似的。但在计算 $K$ 衰变振幅时要把 $\mu$ 跑到$\simeq$1GeV,在经过夸克质量值时要把重夸克积掉。$K$ 衰变过程释放的能量很低,$Q_i$ 的强子矩阵元必须用非微扰方法计算。

## 参 考 文 献

1 T D Lee and C S Wu. Ann Rev Nucl Science. 1965,15:381;1966,16:471

2 R E Marshak, Riazuddin and C P Ryan. Theory of Weak Interactions in Particle Physics. 1969

3 L M Chounet, J M Gaillard and M K Gaillard. Physics Reports. 1972,4C:199

4 S L Adler and R F Dashen. Current Algebras and Applications to Particle Physics, Chapter 2. W A Benjamin Inc, 1968; S B Treiman. in Lectures on Current Algebra and Its Applications. Princeton:Princeton University Press, 1970

5 A D Dolgov, L B Okun and V I Zakharov. Nucl Phys. 1972,B37:493; T W Appelquist and J D Bjorken. Phys Rev. 1972,D4:3726

6 M Jacob and G C Wick. Ann Phys. 1959, 7: 404
7 S Glashow. Nucl Phys. 1961, 22: 579
8 S Weinberg. Phys Rev Lett. 1967, 19: 1264; A Salam. in Elementary Particle Theory. ed. N. Svartholm. Almquist and Forlag, Stockholm, 1968
9 S L Glashow, J Iliopoulos and L Maiani. Phys Rev. 1970, D2: 1285
10 R P Feynman. Photon Hadron Interactions. W A Benjamin Inc. 1972
11 P V Landshoff and J C Polkinghorne. Physics Reports. 1972, 5C: 1
12 J C Pati and A Salam. Phys Rev. 1974, D10: 275; G Senjanovic. Nucl Phys. 1979, B153: 165; R N Mohapatra and G Senjanovic. Phys Rev Lett. 1980, 44: 912; Phys Rev. 1981, D23: 165
13 M Kobayashi and T Maskawa. Prog Theor Phys. 1973, 49: 652
14 J Ellis, M K Gaillard and D V Nanopoulos. Nucl Phys. 1976, B109: 213
15 T D Lee. Phys Reports. 1974, 9C: 143; S Weinberg. Phys Rev Lett. 1976, 37: 657; P Sikivie. Phys Lett. 1976, 65B: 141
16 A D Linde. Sov Phys JETP Lett. 1976, 23: 64; S Weinberg. Phys Rev Lett. 1976, 36: 294
17 S Coleman and E Weinberg. Phys Rev. 1973, D7: 1888
18 S Gershtein and Y Zeldovich. Sov Phys JETP Lett. 1966, 4: 120; A Szalay and G Marx. Astron Astrophy. 1976, 49: 437
19 M Gell-Mann, P Ramond and R Slansky. in Supergravity. ed. D Z Freeman and P Van Nieuwenhuizen, Amsterdam: North-Holland, 1979
20 G Altarelli and G Isidori. Phys Lett. 1994, B: 337; T Hambye and K Riesselmann. Phys Rev. 1997, D55: 7255
21 V Gribov and B Pontecorvo. Phys Lett. 1969, B28: 493; S M Bilenky and B Pontecorvo. Yad Fiz. 1976, 24: 603; L B Okun, M G Schepkin and I S Tsukerman. hep-ph/0211241
22 T Appelquist and J Carazzone. Phys Rev. 1975, D11: 2856
23 S Weinberg. Phys Lett. 1980, 91B: 51
24 F J Gilman and M B Wise. Phys Rev. 1979, D20: 2392
25 A J Buras. hep-ph/9806471

# 第十章　规范理论的手征流反常

## 10.1　微扰论中手征流的反常

所谓手征流反常是指相应于手征对称性的 Noëther 流在量子理论中不满足流守恒方程的现象。手征流反常是 Adler、Bell 和 Jakiw 等发现的。早期的工作在文献[1],[2]中有很好的总结,这方面的工作起源于 $\pi^0 \to \gamma + \gamma$ 过程的研究。在 7.1 节中已经叙述了有关这个过程的问题。令 $j_\mu(x)$为电流,$j^a_{5\mu}(x)$为轴矢流 $\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\frac{\tau_a}{2}\psi$。又设(这里改用 $k_1,k_2$ 表入射动量)

$$\Gamma^a_{\mu\nu}(k_1,k_2) = e^2 f_\pi m_\pi^2\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\langle 0 \mid T(j_\mu(x)j_\nu(y)\pi^a(0) \mid 0\rangle\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1x+k_2y)} \tag{10.1}$$

$$\Gamma^a_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2) = e^2\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\langle 0 \mid T(j_\mu(x)j_\nu(y)j^a_{5\lambda}(0)) \mid 0\rangle\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1x+k_2y)} \tag{10.2}$$

由通常的轴矢流部分守恒公式

$$\partial_\mu j^a_{5\mu} = f_\pi m_\pi^2\pi^a \tag{10.3}$$

得到 Ward 恒等式

$$-\mathrm{i}q_\lambda\Gamma_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2) = \Gamma_{\mu\nu}(k_1,k_2) \tag{10.4}$$

其中,$-q=k_1+k_2$。另一方面由 Lorentz 协变性和两个光子的 Bose 对称性并利用电磁规范不变条件

$$k_{1\mu}\Gamma^a_{\mu\nu\lambda} = k_{2\nu}\Gamma^a_{\mu\nu\lambda} = 0 \tag{10.5}$$

可将 $\Gamma^a_{\mu\nu\lambda}$写成式(7.13)的形式

$$\begin{aligned}\Gamma^a_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2) = {}& A_1\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}k_{1\alpha}k_{2\beta}(k_1+k_2)_\lambda \\ & + A_2[\varepsilon_{\alpha\beta\mu\lambda}k_{1\alpha}k_{2\beta}k_{1\nu} - \varepsilon_{\alpha\beta\nu\lambda}k_{1\alpha}k_{2\beta}k_{2\mu} \\ & - \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}(k_1\cdot k_2)(k_1-k_2)_\rho] + A_3[\varepsilon_{\alpha\beta\mu\lambda}k_{1\alpha}k_{2\beta}k_{2\nu} \\ & - \varepsilon_{\alpha\beta\nu\lambda}k_{1\alpha}k_{2\beta}k_{1\mu}]\end{aligned}$$

由这个公式得到,在 $k_1^2=k_2^2=0$ 时

$$q_\lambda\Gamma^a_{\mu\nu\lambda} = \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}k_{1\alpha}k_{2\beta}q^2(A_1+A_2) \tag{10.6}$$

式(10.4)和(10.6)导致 $\pi^0 \to \gamma + \gamma$ 在 PCAC 极限下禁戒的结论。这个问题在发现手征流反常后得到了解决。

为说明问题的实质，我们先考虑一个简化的问题，即量子电动力学中的轴矢流。这时拉氏量为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi \tag{10.7}$$

利用运动方程

$$[\gamma_\mu(\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu) + m]\psi(x) = 0$$

做形式的推导可证，轴矢流 $j_{5\mu} = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ 满足方程

$$\partial_\mu j_{5\mu} = 2\mathrm{i}m\bar{\psi}\gamma_5\psi \tag{10.8}$$

在 $m=0$ 时轴矢流守恒，这是与拉氏量式(10.7)在整体手征变换 $\psi \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\gamma_5}\psi$ 下不变互相联系的。但是由微扰论的计算发现，由形式的推导所得到的轴矢流散度方程在量子场论中其实是不对的。

为说明这一点，让我们考虑如下的两个 Green 函数（这里 $k_1, k_2$ 表入射动量）

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2) = e^2\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\langle 0 \mid T(j_\mu(x)j_\nu(y)j_{5\lambda}(0)) \mid 0\rangle \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1x+k_2y)} \tag{10.9}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}(k_1,k_2) = e^2\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\langle 0 \mid T(j_\mu(x)j_\nu(y)2m\mathrm{i}\bar{\psi}(0)\gamma_5\psi(0)) \mid 0\rangle \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1x+k_2y)} \tag{10.10}$$

其中，$j_\mu$ 是电流。由规范不变性可得 Ward 恒等式

$$k_1\mu\Gamma_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2) = k_{2\nu}\Gamma_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2) = 0 \tag{10.11}$$

另一方面，由部分积分及 $j_{50}$ 和 $j_\mu$ 在正则对易关系下的可对易性可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}(k_1+k_2)_\lambda\Gamma_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2)\\ &\quad = e^2\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1x+k_2y)}\langle 0 \mid T(j_\mu(x)j_\nu(y)\partial_\lambda j_{5\lambda}(0)) \mid 0\rangle\end{aligned} \tag{10.12}$$

因此，如果式(10.8)成立，应有 Ward 恒等式

$$-\mathrm{i}(k_1+k_2)_\lambda\Gamma_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2) = \Gamma_{\mu\nu}(k_1,k_2) \tag{10.13}$$

但是，在微扰论的计算中，上式并不成立，破坏这一恒等式的反常项来自如图 10.1 的两个三角图。

这两个图对 $\Gamma_{\mu\nu\lambda}$ 的贡献为

$$\Gamma^c_{\mu\nu\lambda} = e^2\int \frac{\mathrm{d}^4l}{(2\pi)^4}(-1)\mathrm{Tr}\left\{\left[\mathrm{i}\gamma_\mu \frac{-\mathrm{i}}{\mathrm{i}(\not{l}+\not{c}) + m}\mathrm{i}\gamma_\nu\right.\right.$$

$$\times \frac{-\mathrm{i}}{\mathrm{i}(\not{l}+\not{c}-\not{k}_2)+m}\mathrm{i}\gamma_\lambda\gamma_5\frac{-\mathrm{i}}{\mathrm{i}(\not{l}+\not{c}+\not{k}_1)+m}\Bigg]$$

$$+\left[\mathrm{i}\gamma_\nu\frac{-\mathrm{i}}{\mathrm{i}(\not{l}+\not{c}')+m}\mathrm{i}\gamma_\mu\frac{-\mathrm{i}}{\mathrm{i}(\not{l}+\not{c}'-\not{k}_1)+m}\mathrm{i}\gamma_\lambda\gamma_5\right.$$

$$\left.\times\frac{-\mathrm{i}}{\mathrm{i}(\not{l}+\not{c}'+\not{k}_2)+m}\right]\Bigg\} \tag{10.14}$$

上式中，$c=c_1k_1+c_2k_2$，$c'=c_1k_2+c_2k_1$，引入 $c$ 及 $c'$ 是为了表示回路积分动量取法的不唯一性。$c$ 和 $c'$ 的关系保证了式(10.14)在交换两个光子时的 Bose 对称性。式(10.14)包含发散的积分，为了使它有确切的意义需要进行正规化。下面用的正规化方案是用 Feynman 参数法及积分变量 $l$ 的平移把被积函数的分母化为 $(l^2+d^2)^n$ 的形式，然后在动量空间引入对称的切断 $|l_i|\leqslant\Lambda$。

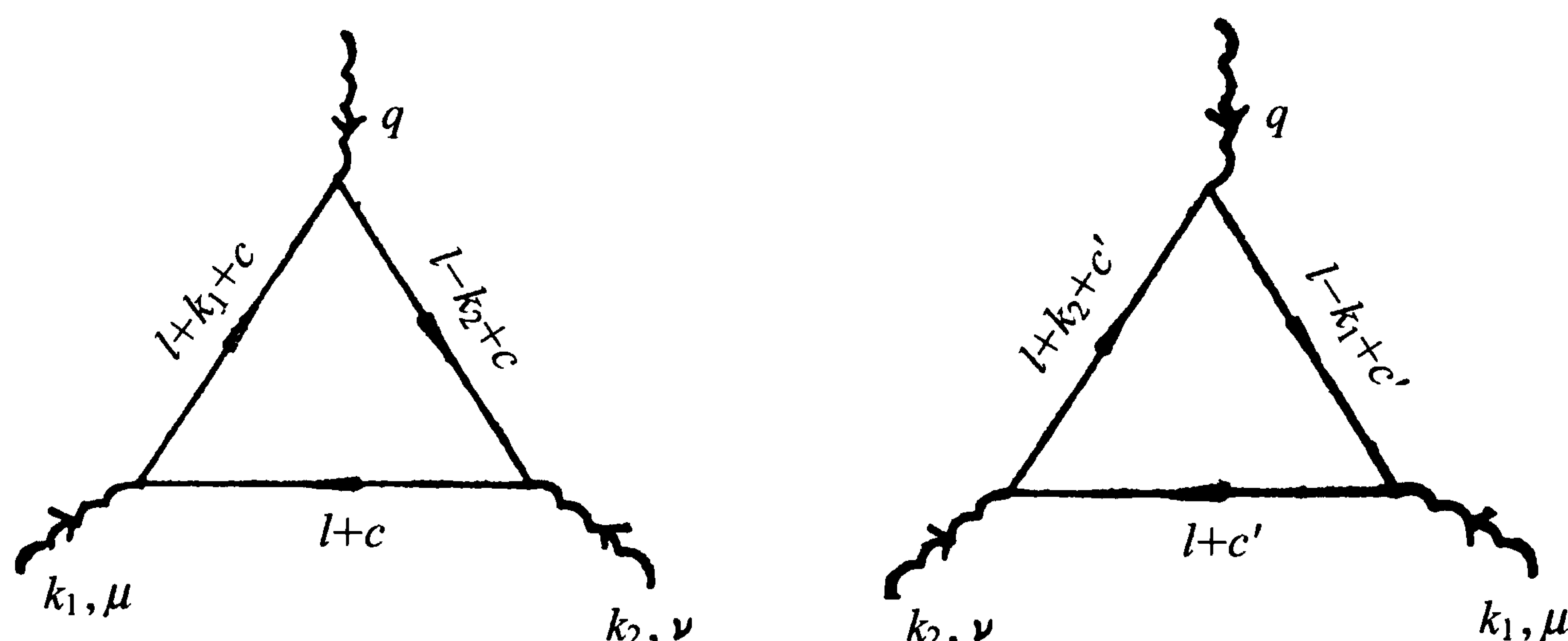



图 10.1

这里发生的问题在于式(10.14)包含表面发散度为线性的积分，而表面线性发散的积分在移动积分变量的原点时会产生有限的附加项，因此式(10.14)的值依赖于 $c$。式(10.14)中的线性发散项为

$$-\mathrm{i}4\varepsilon_{\mu\nu\lambda\xi}e^2\int\frac{\mathrm{d}^4 l}{(2\pi)^4}\frac{l_\xi+c_\xi}{[(l+c-k_2)^2+m^2][(l+c+k_1)^2+m^2]}+(k_1,\mu\leftrightarrow k_2,\nu)\text{ 项}$$

$$=-\mathrm{i}4\varepsilon_{\mu\nu\lambda\xi}e^2\int\mathrm{d}^4x\int\frac{\mathrm{d}^4 l}{(2\pi)^4}$$

$$\times\frac{l_\xi+c_\xi}{\{(l+c)^2+2(l+c)\cdot[k_1x-(1-x)k_2]+k_1^2x+k_2^2(1-x)+m^2\}^2}$$

$$+(k_1,\mu\leftrightarrow k_2,\nu)\text{ 项} \tag{10.15}$$

线性发散积分在回路积分变量原点做移动 $l\to l-c$ 时的增量有如下的公式

$$\int\mathrm{d}^4 l f(l-c)=\int\mathrm{d}^4 l\left[f(l)-c_\mu\frac{\partial f}{\partial l_\mu}+\cdots\right]$$

$$= \int d^4 l f(l) - c_\mu \int d^4 l \frac{\partial f}{\partial l_\mu}$$

上式右方最后一项最多是对数发散的。含 $c_\mu$ 的二次幂以上的项是收敛的，由于它们的被积函数是全微分而且没有表面项，因而等于零。令

$$I_\xi(c) = \int d^4 l \frac{l_\xi + c_\xi}{[(l+c+a)^2 + d^2]^2}$$

其中，$a, d^2$ 与 $l$ 无关，可以得到[3]

$$\Delta I_\xi(c) \equiv I_\xi(c) - I_\xi(0) = \frac{\pi^2}{2} i c_\xi \tag{10.16}$$

利用式(10.14)～(10.16)得到

$$\Gamma^c_{\mu\nu\lambda} = \Gamma^0_{\mu\nu\lambda} + \frac{1}{8\pi^2} e^2 (c_1 - c_2) \varepsilon_{\mu\nu\lambda\xi} (k_1 - k_2)_\xi \tag{10.17}$$

其中，$\Gamma^0_{\mu\nu\lambda}$ 为 $\Gamma^c_{\mu\nu\lambda}$ 在 $c=0$ 时的值。

现在我们来验证 Ward 恒等式(10.13)。利用关系式

$$\frac{1}{i\not{l} + m} i\not{k}_1 \frac{1}{i(\not{l} + \not{k}_1) + m} = \frac{1}{i\not{l} + m} - \frac{1}{i(\not{l} + \not{k}_1) + m}$$

由式(10.14)可得

$$\begin{aligned} ik_{1\mu}\Gamma^0_{\mu\nu\lambda} = e^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\Big\{ & \left( \frac{1}{i\not{l} + m} - \frac{1}{i(\not{l} + \not{k}_1) + m} \right) \gamma_\nu \\ & \times \frac{1}{i(\not{l} - \not{k}_2) + m} \gamma_\lambda \gamma_5 - \gamma_\nu \left( \frac{1}{i\not{l} + m} - \frac{1}{i(\not{l} - \not{k}_1) + m} \right) \\ & \times \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{1}{i(\not{l} + \not{k}_2) + m} \Big\} \end{aligned} \tag{10.18}$$

由于 $\gamma_5$ 的性质，上式必然正比于 $\varepsilon_{\nu\lambda\rho\sigma} k_{1\rho} k_{2\sigma}$，而上式右方第一和第三项只与一个矢量 $k_2$ 有关，不能组成正比于 $\varepsilon_{\nu\lambda\rho\sigma}$ 的项，因此这两项为零。假如可以在积分号内做 $l$ 的平移 $l \to l - k_1 + k_2$，则上式中第二项与第四项将互相抵消使得 $\Gamma^0_{\mu\nu\lambda}$ 满足 Ward 恒等式(10.11)。但是由于这两项分别是线性发散的积分，在积分号内做平移是不容许的。上式右方第二项可写为

$$\begin{aligned} & e^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr}\{ (\not{l} + \not{k}_1) \gamma_\nu (\not{l} - \not{k}_2) \gamma_\lambda \gamma_5 \} \\ & \times \frac{1}{[(l+k_1)^2 + m^2][(l-k_2)^2 + m^2]} \\ & = e^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} 4\varepsilon_{\rho\sigma\nu\lambda} (k_{1\rho} k_{2\sigma} + l_\rho k_{2\sigma} - k_{1\rho} l_\sigma) \\ & \times \int dx \frac{1}{\{[l + xk_1 - (1-x)k_2]^2 + d^2\}^2} \end{aligned}$$

其中

$$d^2 = k_1^2 x + k_2^2(1-x) + m^2 - [xk_1 - (1-x)k_2]^2$$

利用式(10.16)并考虑到在对称的切断下

$$\int d^4 l \frac{l_\sigma}{(l^2+d^2)^2} = 0$$

可将上式写为

$$\frac{1}{(2\pi)^4} 4e^2 \varepsilon_{\rho\sigma\nu\lambda} \int dx \left\{ k_{1\rho} k_{2\sigma} \int \frac{d^4 l}{(l^2+d^2)^2} + \left[ \frac{\pi^2}{4} \mathrm{i} x k_{1\rho} k_{2\sigma} \right.\right.$$
$$\left. - \frac{x}{(l^2+d^2)^2} k_{1\rho} k_{2\sigma} \right] + (1-x) \left[ \frac{\pi^2}{4} \mathrm{i} k_{1\rho} k_{2\sigma} \right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{(l^2+d^2)^2} k_{1\rho} k_{2\sigma} \right] \right\} = \mathrm{i} e^2 (8\pi^2)^{-1} \varepsilon_{\rho\sigma\nu\lambda} k_{1\rho} k_{2\sigma}$$

注意,在上式中发散项安全消去了,得到的结果是有限的。式(10.18)右方第四项也可同样计算,这样得到

$$k_{1\mu} \Gamma^0_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{4\pi^2} e^2 \varepsilon_{\rho\sigma\nu\lambda} k_{1\rho} k_{2\sigma} \tag{10.19}$$

利用上式及式(10.17)得到

$$k_{1\mu} \Gamma^c_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{4\pi^2} e^2 \left( 1 + \frac{c_1 - c_2}{2} \right) \varepsilon_{\rho\sigma\nu\lambda} k_{1\rho} k_{2\sigma} \tag{10.20}$$

因此,Ward 恒等式(10.11)的成立要求 $c_1 - c_2 = -2$。

我们再来验证轴矢流 Ward 恒等式(10.13)。利用关系式

$$\frac{1}{\mathrm{i}(\not{l} - \not{k}_2) + m} \mathrm{i}(\not{k}_1 + \not{k}_2)\gamma_5 \frac{1}{\mathrm{i}(\not{l} + \not{k}_1) + m}$$
$$= \gamma_5 \frac{1}{\mathrm{i}(\not{l} - \not{k}_2) + m} + \frac{1}{\mathrm{i}(\not{l} + \not{k}_1) + m}\gamma_5 - \frac{1}{\mathrm{i}(\not{l} - \not{k}_2) + m} 2m\gamma_5 \frac{1}{\mathrm{i}(\not{l} + \not{k}_1) + m}$$

由式(10.14)可得

$$\mathrm{i}(k_1 + k_2)_\lambda \Gamma^0_{\mu\nu\lambda} = -e^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \mathrm{Tr} \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{\mathrm{i}\not{l} + m} \gamma_\nu \left[ \gamma_5 \right.\right.$$
$$\times \frac{1}{\mathrm{i}(\not{l} - \not{k}_2) + m} + \frac{1}{\mathrm{i}(\not{l} + \not{k}_1) + m}\gamma_5 - \frac{1}{\mathrm{i}(\not{l} - \not{k}_2) + m} 2m\gamma_5$$
$$\left.\left. \times \frac{1}{\mathrm{i}(\not{l} + \not{k}_1) + m} \right] \right\} + (\mu, k_1 \leftrightarrow \nu, k_2) \tag{10.21}$$

上式右方第一和第二项都只与一个矢量有关,不能组成正比于 $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 的项,因此这两项以及由它们通过交换 $\mu \leftrightarrow \nu, k_1 \leftrightarrow k_2$ 而得到的项都为零。式(10.21)中剩下的项正是三角图对式(10.10)中定义的顶角 $-\Gamma_{\mu\nu}$ 的贡献,再利用式(10.17)就得到

$$i(k_1+k_2)_\lambda\Gamma^c_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2)$$
$$=\Gamma^0_{\mu\nu}(k_1,k_2)-\frac{i}{4\pi^2}e^2\cdot(c_1-c_2)\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}k_{1\rho}k_{2\sigma}\qquad(10.22)$$

注意到由于 $\gamma_5$ 的性质及 $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 的全反对称性,三角图对 $\Gamma_{\mu\nu}$ 的贡献只包含如下形式的积分

$$m\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}k_{1\rho}k_{2\sigma}\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{1}{(l^2+l\cdot K+d^2)^3}$$
$$m\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{l_\rho(k_1+k_2)_\sigma}{(l^2+l\cdot K+d^2)^3}$$

它不含发散项,因此与 $c$ 无关。由式(10.22)知道,Ward 恒等式(10.13)成立的条件为 $c_1-c_2=0$。

总结前两段的计算可以做出结论,式(10.11)和(10.13)不能同时满足。如果我们认为,由规范不变得来的矢量流 Ward 恒等式(10.11)是更基本的,则应取 $c_1-c_2=-2$,因此轴矢流 Ward 恒等式(10.13)就破坏了。下面将给出论据,说明其他 Feynman 图不产生破坏式(10.13)的项,因此我们得到

$$i(k_1+k_2)_\lambda\Gamma_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2)$$
$$=\Gamma_{\mu\nu}(k_1,k_2)+i\frac{1}{2\pi^2}e^2\cdot\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}k_{1\rho}k_{2\sigma}\qquad(10.23)$$

上式中多出来的最后一项称为反常项。反常 Ward 恒等式可以用如下的修改了的流散度方程

$$\partial_\lambda j_{5\lambda}(x)=2mi\bar{\psi}\gamma_5\psi-i\frac{\alpha}{4\pi}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}\qquad(10.24)$$

来表示。实际上将式(10.24)代入式(10.12)并利用公式

$$\int d^4xd^4yd^4z\exp[i(k_1x+k_2y+qz)]\langle 0\mid T(j_\mu(x)j_\nu(y)$$
$$\times:\partial_\rho A_\sigma(z)\partial_\xi A_\eta(z):)\mid 0\rangle=\Delta^{-1}_{\mu\mu'}(k_1)\Delta^{-1}_{\nu\nu'}(k_2)$$
$$\times\int d^4xd^4yd^4z\exp[i(k_1x+k_2y+qz)]\langle 0\mid T(A_{\mu'}(x)$$
$$\times A_{\nu'}(y):\partial_\rho A_\sigma(z)\partial_\xi A_\eta(z):)\mid 0\rangle$$
$$=(k_{1\rho}k_{2\xi}\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\eta}+k_{1\xi}k_{2\rho}\delta_{\mu\eta}\delta_{\nu\sigma})(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2+q)$$

即得式(10.23)。由于 $F_{j4}=-iE_j$,式(10.24)中最后一项是厄米算符。

我们来讨论以上计算结果

(1) 从以上结果可以知道,在量子场论中由运动方程和正则对易关系做形式的推导所导出的结果可能是错误的,原因是量子场论中有发散。像轴矢流这样由

几个同一点的场算符的乘积组成的复合算符一般包含奇异性。矢量流也是有奇异的,例如早年对量子电动力学的二次发散的真空极化图形的计算曾经得到破坏规范不变的结果。上面已经说明,如果对三角图的表示式(10.14)验证规范不变性,也会发生问题,对包含发散积分的计算需要引进正规化。上面所用的在动量空间对称切断的正规化方案中,产生反常的原因在于线性发散的积分不能在积分号内做积分变量的平移。我们也可以用其他的正规化方案,其中一些方案如 Pauli-Villars 正规化或维数正规化方案是保持非手征的规范不变性的。用这两种方案做正规化后对圈动量由 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的积分是收敛的,可以在积分号内做积分变量的平移,因此我们能得到正常的矢量流 Ward 恒等式。但是这两种正规化方案都不能保持手征变换的不变性。在 Pauli-Villars 方案中,由于引入了质量为 $M$ 的 Fermi 子圈而明显地破坏了手征不变性,计算表明,在 $M\to\infty$ 时三角图的 Feynman 积分中留下了一个破坏轴矢流守恒的项,得到的反常与式(10.23)完全一样。在维数正规化方案中问题在于,四阶全反对称张量 $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 是四维空间所特有的,矩阵 $\gamma_5$ 的定义

$$\gamma_5 = \frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma \tag{10.25}$$

不能推广到高维空间。对于维数正规化中 $\gamma_5$ 的定义,曾提出过不同的方案。在文献[4]中提出,仍用式(10.25)定义 $\gamma_5$,但求和指标仅限于1～4。在文献[5]中定义 $\gamma_5$ 与所有的 $\gamma_\mu$ 反对易

$$\{\gamma_5,\gamma_\mu\} = 0,\qquad \mu = 1,2,\cdots,D$$

这两种定义都有一些问题,后来的文献对这些问题做了讨论。但是如果我们用它们计算轴矢流的三角图反常,也能得到与式(10.23)相同的结果。这是不难理解的,由前面的一般讨论知道,只要 $\Gamma_{\mu\nu\lambda}$ 满足矢量流 Ward 恒等式(10.11),它一定满足形式如式(10.6)的公式。虽然 $\Gamma_{\mu\nu\lambda}$ 包含发散积分,但是由量纲分析知道,$A_1$ 和 $A_2$ 是收敛的,它们应当和正规化方案无关。以上讨论说明,只要规范不变性保持,轴矢流 Ward 恒等式一定破坏,不存在能够同时保存这两个 Ward 恒等式的正规化手续。由于我们要求与矢量规范场相联系的规范不变性得到满足,轴矢流反常是不可避免的。

(2) 上面只计算了三角图的反常,在其他单圈图中是否也有反常呢?为验证包含一个轴矢流和 $N$ 个矢量流顶点的矢量流 Ward 恒等式,我们可以在包含一个轴矢流和 $N-1$ 个矢量流的单圈图中从一条内线开始依次在各条内线上插入第 $N$ 个矢量流顶点(动量为 $k$),这时 $\mathrm{i}k_\mu\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_N\mu}$ 的典型项为

$$\int\frac{\mathrm{d}^4 l}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left\{\gamma_5\sum_{j=1}^{N}\prod_{i=1}^{j-1}\left(\gamma_{\mu_i}\frac{1}{\mathrm{i}(\not{l}+\not{p}_i)+m}\right)\gamma_{\mu_j}\frac{1}{\mathrm{i}(\not{l}+\not{p}_j)+m}\right.$$

$$\times \mathrm{i}\not{k}\frac{1}{\mathrm{i}(\not{l}+\not{p}_j+\not{k})+m}\prod_{i=j+1}^{N}\frac{1}{\mathrm{i}(\not{l}+\not{p}_i+\not{k})+m}\Bigg\}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}^4 l}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left\{\gamma_5\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\mathrm{i}(\not{l}+\not{p}_i)+m}-\gamma_5\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\mathrm{i}(\not{l}+\not{p}_i+\not{k})+m}\right\} \tag{10.26}$$

为验证轴矢流的 Ward 恒等式,可利用恒等式

$$\frac{1}{\mathrm{i}(\not{l}+\not{p}_j)+m}\mathrm{i}\not{q}\gamma_5\frac{1}{\mathrm{i}(\not{l}+\not{p}_j-\not{q})+m}$$

$$=-\frac{1}{\mathrm{i}(\not{l}+\not{p}_j)+m}2m\gamma_5\frac{1}{\mathrm{i}(\not{l}+\not{p}_j-\not{q})+m}$$

$$+\frac{1}{\mathrm{i}(\not{l}+\not{p}_j)+m}\gamma_5+\gamma_5\frac{1}{\mathrm{i}(\not{l}+\not{p}_j-\not{q})+m} \tag{10.27}$$

相似地,在 $N$ 个矢量流顶点的单圈图上,依次插入轴矢流顶点(动量为 $q$),这时 $\mathrm{i}q_\lambda\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_N,\lambda}$ 的典型项为

$$\int\frac{\mathrm{d}^4 l}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left\{\sum_{j=1}^{N}\prod_{i=1}^{j-1}\left(\gamma_{\mu_i}\frac{1}{\mathrm{i}(\not{l}+\not{p}_i)+m}\right)\gamma_{\mu_j}\frac{1}{\mathrm{i}(\not{l}+\not{p}_j)+m}\mathrm{i}\not{q}\gamma_5\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{\mathrm{i}(\not{l}+\not{p}_j-\not{q})+m}\prod_{i=j+1}^{N}\frac{1}{\mathrm{i}(\not{l}+\not{p}-\not{q})+m}\right\}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}^4 l}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left\{\sum_{j=1}^{N}\prod_{i=1}^{j-1}\left(\gamma_{\mu_i}\frac{1}{\mathrm{i}(\not{l}+\not{p}_i)+m}\right)\gamma_{\mu_j}\frac{1}{\mathrm{i}(\not{l}+\not{p}_j)+m}\right.$$

$$\times(-2m\gamma_5)\frac{1}{\mathrm{i}(\not{l}+\not{p}_j-\not{q})+m}\prod_{i=j+1}^{N}\left(\gamma_{\mu_i}\frac{1}{\mathrm{i}(\not{l}+\not{p}_i-\not{q})+m}\right)$$

$$+\int\frac{\mathrm{d}^4 l}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left\{\gamma_5\prod_{i=1}^{N}\left(\gamma_{\mu_i}\frac{1}{\mathrm{i}(\not{l}+\not{p}_i)+m}\right)\right.$$

$$\left.-\gamma_5\prod_{i=1}^{N}\left(\gamma_{\mu_i}\frac{1}{\mathrm{i}(\not{l}+\not{p}_i-\not{q})+m}\right)\right\} \tag{10.28}$$

如果 $N\geqslant 4$,式(10.26)和(10.28)右方各项最多是对数发散的,可以在积分号内做积分变量 $l$ 的平移。这时式(10.26)最后两项互相消去,式(10.28)最后两项也互相消去,矢量流和轴矢流的正常 Ward 恒等式都成立。由于 $\int\mathrm{d}^4 x\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\langle 0|T(j_\mu(x)j_{5\nu}(0))|0\rangle$ 必须含 $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ 而又只与一个动量 $k$ 有关,所以这个两点 Green 函数为零。在量子电动力学这样的 U(1)规范理论中,由于电荷共轭不变性,一个轴矢流和三个矢量流顶点的 Green 函数为零,因此单圈图中只有三角图有反常。

(3) 在文献[6]中论证了多圈图对反常没有贡献。拿量子电动力学来说,多圈图一定有光子内线,只要对光子内线做正规化就可以使多圈图都收敛。我们有不

影响 Fermi 子手征对称性的光子正规化方案。例如,可将拉氏量中的电磁场部分改为 $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\times\left(1+\frac{\Box^2}{\lambda^2}\right)F_{\mu\nu}$。这样的项也满足规范不变的要求。这时光子传播子改为 $\frac{1}{k^2\left[1+\left(\frac{k^2}{\lambda^2}\right)^2\right]}$。在正规化后 Fermi 子圈的积分变量可以平移,轴矢流的 Ward 恒等式应当成立。因此,轴矢流 Ward 恒等式的反常都来自单圈图,辐射修正除了使出现在反常项的耦合常数为重整化常数以外没有其他影响。这个结果称为轴矢流反常的不重整定理。

以上的讨论不难推广到包含 $N$ 种 Fermi 子的量子电动力学。这时电流可以写为 $j_\mu=\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_\mu Q\psi$,其中 $\psi$ 为内部空间的一个 $N$ 维矢量,$Q$ 为 $N\times N$ 对角矩阵。如不计反常,在 Fermi 子质量趋于零时,有 $N$ 个中性的守恒轴矢流 $j_{5\mu}^a=\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5 t_a\psi$,其中 $t_a$ 为对角矩阵。容易看出这时轴矢流散度 $\partial_\mu j_{5\mu}^a$ 的反常项为

$$-\mathrm{i}\frac{\alpha}{4\pi}\mathrm{Tr}(t_a Q^2)\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \tag{10.29}$$

这个结果可以进一步推广到 Fermi 子与量子色动力学的胶子场耦合的情况。量子色动力学的规范作用 $\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{\lambda_a}{2}A_\mu^a\psi$ 不破坏手征对称性。对于轴矢流和电流的 Green 函数,胶子传播子只出现在多圈图中,多圈图可以用把拉氏量中的规范场部分改为

$$-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{F_{\mu\nu}\left[1+\left(\frac{D^2}{\lambda^2}\right)^2\right]F_{\mu\nu}\right\}$$

的方法进行正规化,这里 $D_\lambda$ 是规范协变微分。这种正规化方案不破坏规范不变性和 Fermi 子手征对称性。按照前面的讨论,多圈图对反常没有影响。因此,如果我们只考虑轴矢流和电流的 Green 函数的反常,我们可以完全不考虑夸克与胶子的作用,式(10.29)可适于量子色动力学的情况。因此在取 $t_a=\frac{\tau_a}{2}$ 时可将式(10.3)修改为

$$\partial_\mu j_{5\mu}^a = f_\pi m_\pi^2\pi^a-\mathrm{i}\frac{\alpha}{4\pi}\mathrm{Tr}\left(\frac{\tau_a}{2}Q^2\right)\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \tag{10.30}$$

这个结果已用于 7.1 节中。

上述结果还可以直接推广到与非 Abel 规范场耦合的矢量流 $j_\mu^a=\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_\mu T_a\psi$,其中 $T_a$ 为规范群的生成元。$j_\mu^a$ 满足方程

$$(D_\mu j_\mu)^a = 0 \tag{10.31}$$

考虑轴矢流 $j_{5\mu}=\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$,设它相应于整体对称性,不与规范场耦合。量子色动力学是符合这个条件的。令

$$\Gamma_{\mu\nu}^{ab}(k_1,k_2)=g^2\int d^4x d^4y e^{i(k_1x+k_2y)}\langle 0\mid T(j_\mu^a(x)j_\nu^b(y)\times i\bar{\psi}(0)M\gamma_5\psi(0))\mid 0\rangle$$

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{ab}(k_1,k_2)=g^2\int d^4x d^4y e^{i(k_1x+k_2y)}\langle 0\mid T(j_\mu^a(x)\times j_\nu^b(y)j_{5\lambda}(0))\mid 0\rangle$$

其中，$M$ 是 Fermi 子质量矩阵。单圈图对 $\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{ab}$ 的贡献为

$$-g^2\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left\{\gamma_\mu T_a\frac{1}{i(\not{l}+\not{c})+M}\gamma_\nu T_b\frac{1}{i(\not{l}+\not{c}-\not{k}_2)+M}\times\gamma_\lambda\gamma_5\frac{1}{i(\not{l}+\not{c}+\not{k}_1)+M}\right\}+(i\leftrightarrow j,\mu\leftrightarrow\nu,k_1\leftrightarrow k_2)\text{项}\tag{10.32}$$

和前面一样，$c=c_1k_1+c_2k_2$。为满足式(10.31)，在 $g^2$ 阶 $\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{ab}$ 须满足 Ward 恒等式 $k_{1\mu}\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{ab}=k_{2\nu}\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{ab}=0$。由类似于前面得到式(10.23)的计算并考虑到只有单圈图能产生反常，可得轴矢流的 Ward 恒等式

$$i(k_1+k_2)_\lambda\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{ab}(k_1,k_2)=\Gamma_{\mu\nu}^{ab}(k_1,k_2)+i\frac{g^2}{2\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\cdot k_{1\rho}k_{2\sigma}\mathrm{Tr}(T_aT_b)\tag{10.33}$$

式(10.33)相应于轴矢流散度$\partial_\mu j_{5\mu}$有一个反常项

$$-i\frac{g^2}{4\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}(\partial_\mu A_\nu\partial_\rho A_\sigma)\tag{10.34}$$

其中，$A_\nu$ 为 SU(3)色规范场。上式不是规范不变的，因此反常一定还包含其他的项。所需要的项可以在包含一个轴矢流和三个矢量流的顶角 $\Gamma_{\mu\nu\rho\lambda}^{abc}$ 中找到。与 U(1)规范理论不同，在矢量流相应于非 Abel 规范对称性时，$\Gamma_{\mu\nu\rho\lambda}^{abc}$ 不为零。它的单圈图包含反常。我们不在这里具体计算这个反常项。考虑到其他图形对反常没有贡献，$j_{5\mu}$ 的规范不变性和式(10.34)唯一地确定了轴矢流反常。这样，我们有

$$\partial_\mu j_{5\mu}=2i\bar{\psi}M\gamma_5\psi-i\frac{g^2}{16\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma})\tag{10.35}$$

上式中含三个 $A_\mu$ 的项来自 $\Gamma_{\mu\nu\rho\lambda}^{abc}$ 的反常。由于

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}(A_\mu A_\nu A_\rho A_\sigma)=-\varepsilon_{\sigma\mu\nu\rho}\mathrm{Tr}(A_\sigma A_\mu A_\nu A_\rho)=0$$

式(10.35)中不含四个 $A_\mu$ 的项。

## 10.2　手征规范对称性的反常

在 10.1 节讨论的情况中，轴矢流相应于整体对称性，它不与规范场相耦合。

但是,在弱电统一规范理论中,规范对称是手征性的,规范作用包含轴矢流与规范场的耦合。在本节中我们将讨论手征规范对称流的反常。在这种情况下,由于不存在保证手征规范不变性的正规化方案,我们不能预先要求来自规范对称的 Ward 恒等式成立,反常是可能存在的。

我们先考虑一个最简单的 U(1)模型[7]。设拉氏量密度为

$$\mathscr{L} = -\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu - \mathrm{i}g\gamma_5 A_\mu)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{10.36}$$

在这个模型中轴矢流 $j_{5\mu} = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ 与 U(1)规范场耦合。在规范变换 $\psi(x)\to e^{-\mathrm{i}\alpha(x)\gamma_5}\psi(x)$下的不变性要求 Fermi 子质量为零及$\partial_\mu j_{5\mu}=0$。现在的问题是,这个流守恒方程是否为反常所破坏。在两个轴矢流和四个轴矢流的单圈 Green 函数中,可以利用 $\gamma_5$ 和 $\gamma_\mu$ 的反对易关系移动$\gamma_5$ 的位置而使它们互相消去,因此可以用 Pauli-Villars 正规化得到通常的 Ward 恒等式。由类似于 10.1 节中的讨论知道,这个模型中只有三角图可能包含反常。令

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2) = g^2\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1x+k_2y)}\langle 0 \mid T(j_{5\mu}(x)j_{5\nu}(y)j_{5\lambda}(0)) \mid 0\rangle$$

由于有线性发散,三角图的计算有不确定性。在现在讨论的问题中,我们不能以 Ward 恒等式作为条件。但是由 Bose 对称性的要求,$\Gamma_{\mu\nu\lambda}$须满足

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2) = \Gamma_{\nu\mu\lambda}(k_2,k_1) = \Gamma_{\lambda\nu\mu}(-k_1-k_2,k_2) \tag{10.37}$$

这个条件唯一确定了 $\Gamma_{\mu\nu\lambda}$的单圈项,它们是

$$\begin{aligned} g^2\int \frac{\mathrm{d}^4 l}{(2\pi)^4}(-1)\mathrm{Tr}\Bigg\{&\mathrm{i}\gamma_\mu\gamma_5\frac{-1}{\left(\not{l}-\frac{1}{3}\not{k}_1+\frac{1}{3}\not{k}_2\right)}\mathrm{i}\gamma_\nu\gamma_5 \\ &\times\frac{-1}{\left(\not{l}-\frac{1}{3}\not{k}_1-\frac{2}{3}\not{k}_2\right)}\mathrm{i}\gamma_\lambda\gamma_5\frac{-1}{\left(\not{l}+\frac{2}{3}\not{k}_1+\frac{1}{3}\not{k}_2\right)}\Bigg\} \\ &+(\mu,k_1\leftrightarrow\nu,k_2)\,\text{项} \end{aligned} \tag{10.38}$$

上式等于式(10.14)中 $m=0, c_1=-\dfrac{1}{3}, c_2=\dfrac{1}{3}$的情况。由 10.1 节中的计算,立即得到

$$\mathrm{i}(k_1+k_2)_\lambda\Gamma_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2) = \frac{\mathrm{i}}{6\pi^2}g^2\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}k_{1\rho}k_{2\sigma} \tag{10.39}$$

$$\partial_\lambda j_{5\lambda}(x) = -\mathrm{i}\frac{g^2}{48\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \tag{10.40}$$

上式中的反常项与式(10.24)差一个系数$\dfrac{1}{3}$,这是把三个顶点对称处理的结果。

在文献[8]中系统地计算了各种非 Abel 流 $\bar{\psi}\Gamma T_a\psi$ 的单圈图反常，其中 $\Gamma$ 是任意 $\gamma$ 矩阵，$T_a$ 是内部空间的矩阵。文献[8]得到的结论是，只有包含矢量流和奇数个轴矢流顶点的 Green 函数有反常。因此只需考虑矢量流和轴矢流。但是在规范理论中要求 $T_a$ 是群的生成元。在 $[T_a, T_b]\neq 0$ 时变换 $\psi\to\exp(-\mathrm{i}\alpha^a T_a\gamma_5)\psi$ 不构成群。只能考虑手征变换群

$$\psi_\mathrm{L}\to\exp(-\mathrm{i}\alpha_\mathrm{L}^a T_a^\mathrm{L})\psi_\mathrm{L}$$

$$\psi_\mathrm{R}\to\exp(-\mathrm{i}\alpha_R^a T_a^\mathrm{R})\psi_\mathrm{R}$$

一般而言，规范理论的拉氏量中与 Fermi 子有关的部分可写为

$$\mathscr{L}_\psi=-\bar{\psi}_\mathrm{L}\gamma_\mu(\partial_\mu-\mathrm{i}g_a T_a^\mathrm{L}A_\mu^a)\psi_\mathrm{L}-\bar{\psi}_\mathrm{R}\gamma_\mu(\partial_\mu-\mathrm{i}g_a T_a^\mathrm{R}A_\mu^a)\psi_\mathrm{R}$$

其中，$T_a^\mathrm{L}$ 和 $T_a^\mathrm{R}$ 分别为规范群生成元在左手 Fermi 子和右手 Fermi 子所属表示中的矩阵。$g_a$ 在一个单纯子群内部是相同的。$j_{\mathrm{L}\mu}^a=\mathrm{i}\bar{\psi}_\mathrm{L}\gamma_\mu T_a^\mathrm{L}\psi_\mathrm{L}$，$j_{\mathrm{R}\mu}^a=\mathrm{i}\bar{\psi}_\mathrm{R}\gamma_\mu T_a^\mathrm{R}\psi_\mathrm{R}$ 与规范场 $A_\mu^a$ 耦合，$T_a^\mathrm{L}$ 和 $T_a^\mathrm{R}$ 可以不同，因此考虑手征流 $j_{\mathrm{L}\mu}^a$ 和 $j_{\mathrm{R}\mu}^a$ 比考虑轴矢流 $j_{5\mu}^a$ 更方便。令

$$A_{\mathrm{L}\mu}\equiv g_a T_a^\mathrm{L}A_\mu^a,\qquad A_{\mathrm{R}\mu}\equiv g_a T_a^\mathrm{R}A_\mu^a \tag{10.41}$$

这里为了方便把耦合常数 $g_a$ 吸收到 $A_{\mathrm{L}\mu}$ 和 $A_{\mathrm{R}\mu}$ 中去了。计算结果得到

$$\begin{aligned}(D_\mu j_{\mathrm{L}\mu})^a&=-\mathrm{i}\frac{1}{24\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}\Big\{T_a^\mathrm{L}\Big(\partial_\mu A_{\mathrm{L}\nu}\partial_\rho A_{\mathrm{L}\sigma}-\frac{\mathrm{i}}{2}\partial_\mu A_{\mathrm{L}\nu}A_{\mathrm{L}\rho}A_{\mathrm{L}\sigma}\\&\quad+\frac{\mathrm{i}}{2}A_{\mathrm{L}\mu}\partial_\nu A_{\mathrm{L}\rho}A_{\mathrm{L}\sigma}-\frac{\mathrm{i}}{2}A_{\mathrm{L}\mu}A_{\mathrm{L}\nu}\partial_\rho A_{\mathrm{L}\sigma}\Big)\Big\}\\&=-\mathrm{i}\frac{1}{24\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu\mathrm{Tr}\Big\{T_a^\mathrm{L}\Big(A_{\mathrm{L}\nu}\partial_\rho A_{\mathrm{L}\sigma}-\frac{\mathrm{i}}{2}A_{\mathrm{L}\nu}A_{\mathrm{L}\rho}A_{\mathrm{L}\sigma}\Big)\Big\}\end{aligned}\tag{10.42}$$

$$(D_\mu j_{\mathrm{R}\mu})^a=\mathrm{i}\frac{1}{24\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu\mathrm{Tr}\Big\{T_a^\mathrm{R}\Big(A_{\mathrm{R}\nu}\partial_\rho A_{\mathrm{R}\sigma}-\frac{\mathrm{i}}{2}A_{\mathrm{R}\nu}A_{\mathrm{R}\rho}A_{\mathrm{R}\sigma}\Big)\Big\}\tag{10.42′}$$

公式(10.42)和(10.42′)包含在文献[8]中。在这两个公式的右方第一项为三角图的贡献，其余项为方块图的贡献。实际上文献[8]的做法与这里不完全相同。在文献[8]中取拉氏量的 Fermi 子作用部分为 $\mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_\mu(\lambda_a V_\mu^a+\lambda_a^5\mathscr{A}_\mu^a\gamma_5)\psi$，并考虑矢量流 $j_\mu^a=\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial V_\mu^a}$ 和轴矢流 $j_{5\mu}^a=\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\mathscr{A}_\mu^a}$ 的反常。如取 $V_\mu^a=\mathscr{A}_\mu^a$，$\lambda_a=\dfrac{1}{2}(T_a^\mathrm{L}+T_a^\mathrm{R})$，$\lambda_a^5=\dfrac{1}{2}(T_a^\mathrm{L}-T_a^\mathrm{R})$ 可以由文献[8]的结果得出式(10.42)和(10.42′)。

一般来说，如果在微扰论计算中，规范不变性由于正规化手续不满足这种不变性而被破坏，我们可以尝试在拉氏量中引入抵消项。这些抵消项本身不是规范不变的，如果它们在规范变换下的改变在微扰论各阶抵消由于正规化手续而产生的破坏规范不变性的项，则规范不变性就恢复了。文献[8]在拉氏量中引入包含三个

$V_\mu, \mathscr{A}_\mu$ 的乘积和四个 $V_\mu, \mathscr{A}_\mu$ 的乘积的抵消项 $\mathscr{L}_c$。由流的定义，加入抵消项后矢量流 $j_\mu$ 得到一个附加项$\frac{1}{g}\frac{\partial \mathscr{L}_c}{\partial V_\mu}$。在文献[8]中选择 $\mathscr{L}_c$ 使矢量流守恒方程$(D_\mu j_\mu)^a=0$ 得到满足，这时轴矢流$(D_\mu j_{5\mu})^a \neq 0$ 并且包含四个 $\mathscr{A}_\mu$ 或 $V_\mu$ 的乘积的项。它们相应于五个流顶点的图形，虽然五顶点图本身并不产生反常。文献[8]的结果表明，不可能通过引入抵消项使矢量流和轴矢流守恒同时满足。

与整体手征变换相联系的流的反常，除破坏相应的对称性以外没有其他的后果，在物理上常常是可以接受的。手征规范对称流的反常则破坏理论的规范不变性，引起严重的后果。在规范理论中 Ward-Takahashi 恒等式保证了可重整性和 $S$ 矩阵的幺正性。手征流反常破坏这些 Ward 恒等式，同时也就破坏了理论的可重整性和幺正性。例如，设在拉氏量密度式(10.36)中加入一个 $A_\mu$ 场的质量项 $-\frac{1}{2}\mu^2 A_\mu A_\mu$。它可以来自 Higgs 机制。这时传播子为 $-\mathrm{i}\,\frac{\delta_{\mu\nu}+k_\mu k_\nu/\mu^2}{k^2+\mu^2}$。由于轴矢流守恒被破坏，$k_\mu k_\nu/\mu^2$ 项在微扰论计算中不能消去，因此理论不可重整。这种破坏可重整性的项出现在图 10.2 所示的 Feynman 图中。由于 Fermi 子三角图子图形所包含的反常，图中规范场内线的传播子中 $k_\alpha k_\beta/\mu^2$ 项不能消去。它们的贡献(差一个因子)等于

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{(2\pi)^8}\pi^2\frac{g^6}{\mu^2}\int \mathrm{d}^4 k\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}q_\mu\{(q-k)_\rho \not k\, S_F(p+k)\gamma_{\nu'}\gamma_5 \\
&\quad\times S_F(p+k-q')\gamma_\sigma + k_\rho\gamma_\sigma S_F(p+k)\gamma_{\nu'}\gamma_5 S_F(p+k-q') \\
&\quad\times(-\not k+\not q)\}\,\frac{1}{[(k+q)^2+\mu^2](k^2+\mu^2)} \\
&=\mathrm{i}\,\frac{g^6}{2^6(4\pi^2)^2}\,\frac{1}{\mu^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\nu'}q_\mu\gamma_\rho\gamma_5\ln\Lambda^2+\text{有限项}
\end{aligned}
\tag{10.43}
$$

其中，$\Lambda$ 为动量空间的切断。因此图10.2中的顶角函数是对数发散的。为抵消

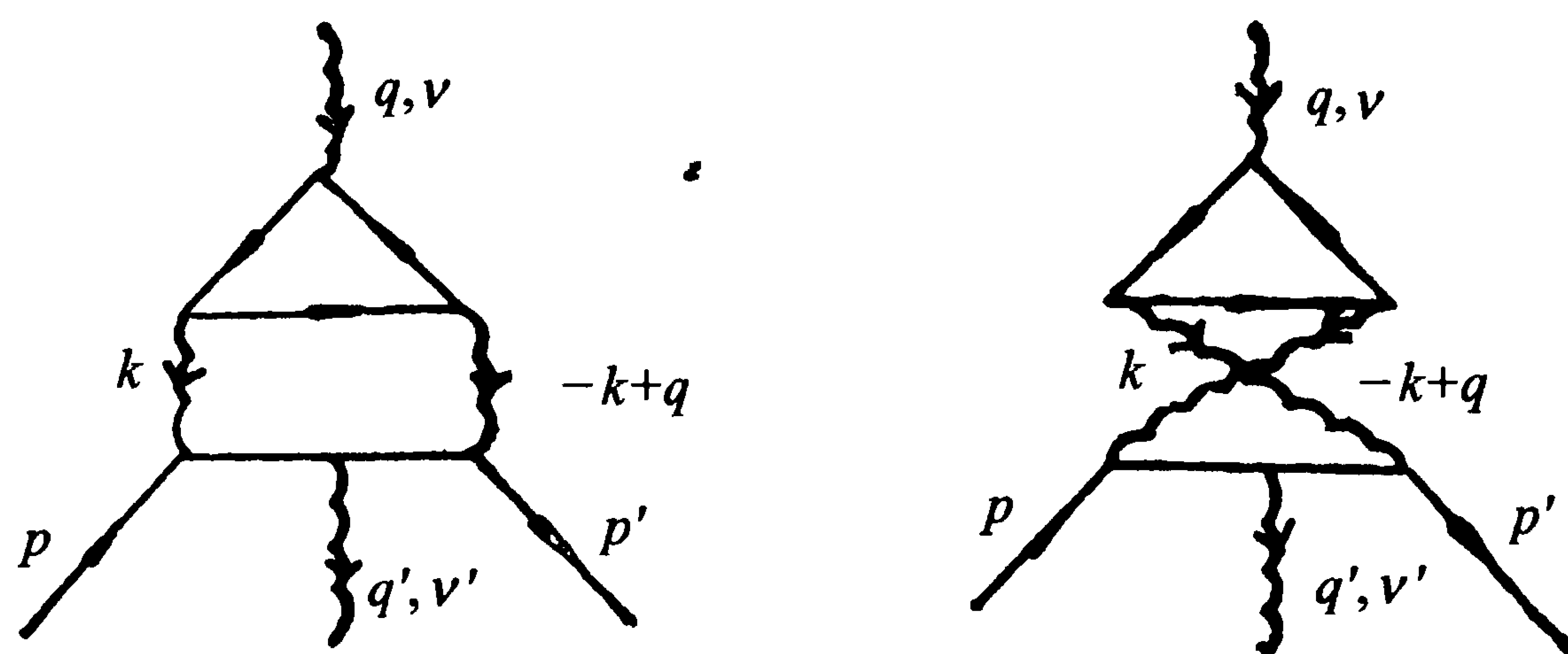



图 10.2

这个发散,必须在拉氏量中引入正比于

$$i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}A_\rho\bar{\psi}\gamma_\sigma\gamma_5\psi$$

的项。这样的项量纲大于4,因此,理论是不可重整的。

在U(1)轴矢规范场模型中我们也可以考虑 $\mu=0$ 的情形。这时为了能定义规范场的传播子,必须引入规范固定项。但是由于反常的存在,不同的规范固定项给出不同的物理结果,并且 $S$ 矩阵的幺正性不能满足,因此理论是不自洽的。例如,如果取 Feynman 规范传播子为$\frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2}$。由 $\delta_{\mu\nu}=\sum_{\sigma=1}^{2}e_\mu^\sigma\bar{e}_\nu^\sigma+\frac{k_\mu k_\nu^*+k_\mu^*k_\nu}{2\omega^2}$($\sigma=1,2$ 为横向极化)知道,在图10.3中的费曼图的 $S$ 矩阵元中,由于反常,非物理的纵向极化的贡献不能消去。与规范场耦合的手征流的反常使得规范理论不自洽,也可以直接由场方程看出来。在 Abel 规范理论中,$\partial_\mu F_{\mu\nu}=-gj_\nu$,$\partial_\nu j_\nu\neq 0$ 与场方程及 $F_{\mu\nu}$ 的反对称性矛盾。同样地,在非 Abel 规范理论中,$D_\nu j_\nu\neq 0$ 与场方程及 $F_{\mu\nu}$ 的反对称性矛盾。由以上的讨论知道,为了得到一个可以接受的规范理论,与规范场耦合的手征流必须没有反常。

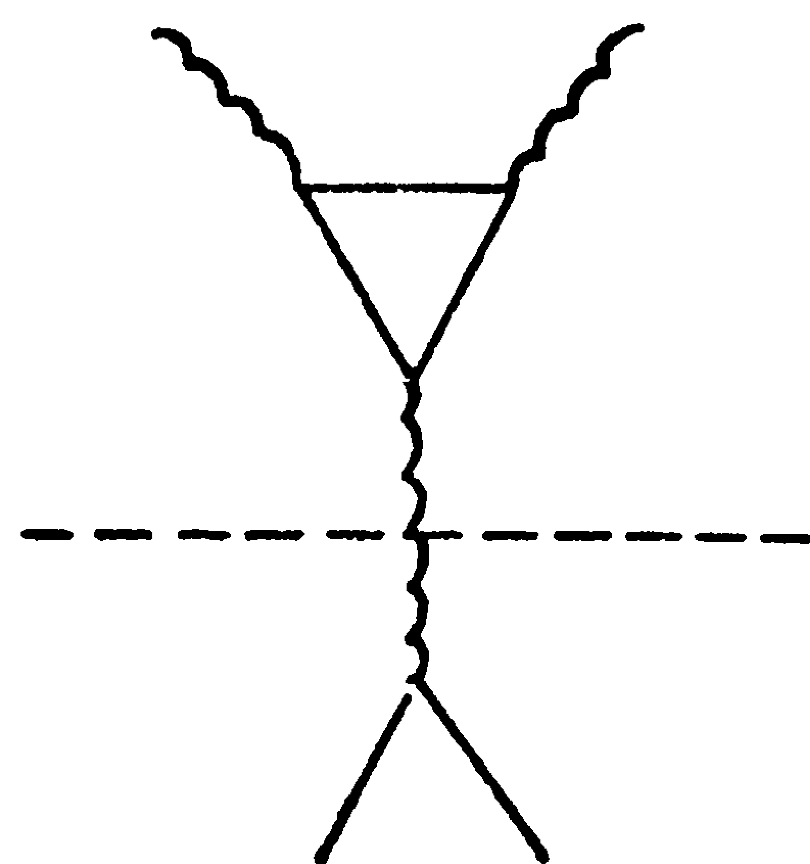


图 10.3

## 10.3　手征流反常的其他计算方法

除计算微扰论 Feynman 图的方法之外,手征流反常也可以用其他方法得到。10.1节中已经提到,手征流反常与流作为定域场算符乘积的奇异性有关。计算反常的方法之一是直接由修改轴矢流的定义入手[9]。以量子电动力学中的轴矢流为例,为了避免算符乘积的奇异性,可以定义轴矢流 $j_{5\mu}(x,\varepsilon)=i\bar{\psi}(x+\varepsilon)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x)$。但是这个定义不是规范不变的。为了保持轴矢流的规范不变性,定义轴矢流 $j_{5\mu}(x,\varepsilon)$为

$$j_{5\mu}(x,\varepsilon)=i\bar{\psi}(x+\varepsilon)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x)\exp\left\{ie\int_x^{x+\varepsilon}dy_\lambda A_\lambda(y)\right\} \tag{10.44}$$

又定义

$$j_5(x,\varepsilon)=i\bar{\psi}(x+\varepsilon)\gamma_5\psi(x)\exp\left\{ie\int_x^{x+\varepsilon}dy_\lambda A_\lambda(y)\right\} \tag{10.44$'$}$$

由 $\psi$ 场的运动方程及式(10.44)得到

$$\partial_\mu j_{5\mu}(x,\varepsilon)=2mj_5(x,\varepsilon)+j_{5\mu}(x,\varepsilon)ieF_{\mu\nu}(x)\varepsilon_\nu \tag{10.45}$$

由上式看到,如果 $\varepsilon\to 0$ 时 $j_{5\mu}(x,\varepsilon)$及 $j_5(x,\varepsilon)$都没有奇异,则轴矢流没有反常。但是我们将看到 $j_{5\mu}(x,\varepsilon)$在 $\varepsilon\to 0$ 时有 $\varepsilon^{-1}$阶奇异。为了求得这个奇异项,我们在

固定外场 $A_\mu(x)$ 下求式(10.43)两边的真空期望值 $\langle\quad\rangle_A$。

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle j_{5\mu}(x,\varepsilon)\rangle_A = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle \mathrm{i}\bar{\psi}(x+\varepsilon)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x)\rangle_A(1+O(\varepsilon))$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_5 S_F^A(x,x+\varepsilon))(1+O(\varepsilon)) \quad (10.46)$$

其中,$S_F^A(x',x)$ 是在外场 $A_\mu(x)$ 中 Fermi 子的传播子,它满足方程

$$[\gamma_\mu(\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu(x)) + m]S_F(x,y) = \delta^4(x-y) \quad (10.47)$$

$S_F^A(x',x)$ 的微扰展开公式为

$$S_F^A(x',x) = S_F(x'-x) + \int \mathrm{d}^4x_1 S_F(x'-x_1)\mathrm{i}e\not{A}(x_1)S_F(x_1-x)$$
$$+ \int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2 S_F(x'-x_1)\mathrm{i}e\not{A}(x_1)S_F(x_1-x_2)\mathrm{i}e\not{A}(x_2)S_F(x_2-x)$$
$$+\cdots \quad (10.48)$$

令

$$S_F^A(p',p) = \int \mathrm{d}^4x'\mathrm{d}^4x S_F^A(x',x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'x'+\mathrm{i}px}$$

$$A_\mu(q) = \int \mathrm{d}^4x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx}A_\mu(x)$$

由式(10.48)得到

$$S_F^A(p',p) = \frac{1}{(2\pi)^4}S_F(p)(2\pi)^8\delta^4(p'-p) + \frac{1}{(2\pi)^8}\int \mathrm{d}^4q$$
$$\times S_F(p')\mathrm{i}e\not{A}(q)S_F(p)(2\pi)^8\delta^4(p'-p-q)$$
$$+ \frac{1}{(2\pi)^{12}}\int \mathrm{d}^4q_1\mathrm{d}^4q_2 S_F(p')\mathrm{i}e\not{A}(q_1)S_F(p'-q_1)\mathrm{i}e\not{A}(q_2)$$
$$\times S_F(p)(2\pi)^8\delta^4(p'-p-q_1-q_2)+\cdots \quad (10.49)$$

由上式可得

$$\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_5 S_F^A(x,x+\varepsilon))$$

$$= -\mathrm{i}e\frac{1}{(2\pi)^8}\int \mathrm{d}^4q\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\int \mathrm{d}^4p\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\varepsilon}\frac{1}{[(p+q)^2+m^2](p^2+m^2)} \quad (10.50)$$

$$\times \mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_5\not{q}\not{A}\not{p}) + O(\varepsilon^0)\int \mathrm{d}^4p\frac{p_\nu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\varepsilon}}{[(p+q)^2+m^2](p^2+m^2)}$$

$$= \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\varepsilon_\nu}\int \mathrm{d}^4p\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\varepsilon}}{[(p+q)^2+m^2](p^2+m^2)} \quad (10.51)$$

对上式中的积分做 Wick 转动。在 $\varepsilon\to 0$ 时积分集中在 $p^2$ 大的区域。

$$\int d^4 p \frac{e^{-ip\varepsilon}}{[(p+q)^2+m^2](p^2+m^2)} = \int d^4 p \frac{e^{-ip\varepsilon}}{(p^2+m^2)^2} + \text{有限项}$$

$$= (2\pi)^4 \frac{\partial}{\partial m^2} \Delta_F(x)\bigg|_{x=\varepsilon} + \text{有限项} = i2\pi^2 \ln|\varepsilon| + O(\varepsilon^0) \tag{10.52}$$

由式(10.50)～(10.52)及(10.45)得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle j_{5\mu}(x,\varepsilon)\rangle_A = -\frac{e}{4\pi^2|\varepsilon|^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\varepsilon_\nu \tag{10.53}$$

将式(10.53)代入式(10.45)并对 $\varepsilon$ 的可能方向取平均，将 $\varepsilon_\nu\varepsilon_{\nu'}$ 换为 $\frac{1}{4}\delta_{\nu\nu'}|\varepsilon|^2$ 即可得到轴矢流的反常散度方程。结果和由 Feynman 图的计算得到的式(10.24)完全一样。

计算手征流反常的另一种方法是 Fujikawa 提出的路径积分方法[10]。先考虑 SU($N$)规范理论中 U(1)轴矢流的反常。这时除抵消项以外拉氏量可写为

$$\mathscr{L} = -\bar{\psi}(\not{D}+m)\psi - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu} \tag{10.54}$$

我们在路径积分中做 Wick 转动，把 $x_4$ 和 $A_4$ 分别沿着和逆着时针方向转到实轴。欧氏空间的生成泛函为

$$W[J_\mu,\eta,\bar{\eta}] = N\int[\mathscr{D}\psi][\mathscr{D}\bar{\psi}][\mathscr{D}A_\mu]\exp\left\{\int d^4x(\mathscr{L} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J_\mu A_\mu)\right\} \tag{10.55}$$

为了严格定义式(10.55)中的 Fermi 场积分测度$[\mathscr{D}\psi][\mathscr{D}\bar{\psi}]$我们引入函数空间的一组完备基矢。令 $A_\mu = g_a T_a A^a_\mu$。在 Wick 转动后，场 $A_\mu$ 下的 Dirac 算符 $-i\not{D} = -i\gamma_\mu(\partial_\mu - iA_\mu)$成为厄米的。我们以它的本征函数 $\varphi_n(x)$为函数空间的基矢。$\varphi_n(x)$满足方程

$$-i\gamma_\mu D_\mu\varphi_n(x) = \lambda_n\varphi_n(x) \tag{10.56}$$

$$\int d^4x\varphi^\dagger_m(x)\varphi_n(x) = \delta_{mn} \tag{10.57}$$

其中，$\lambda_n$ 为实数。Fermi 场可以展开为

$$\psi(x) = \sum_n c_n\varphi_n(x), \qquad \bar{\psi}(x) = \sum_n \bar{c}_n\varphi^\dagger_n(x) \tag{10.58}$$

其中，$c_n$ 和 $\bar{c}_n$ 为 Grassmann 数。Fermi 场的泛函积分测度定义为

$$d\mu = [\mathscr{D}\psi][\mathscr{D}\bar{\psi}] \equiv \prod_n d\bar{c}_n \prod_{n'} dc_{n'} \tag{10.59}$$

为了简单，设本征值 $\lambda_n$ 是离散的。这只要把场限制在四维欧氏空间中的方盒内并取周期性边界条件就可以了。

在定域手征变换下

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha(x)\gamma_5}\psi(x)$$
$$\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha(x)\gamma_5} \tag{10.60}$$

令

$$\psi'(x) = \sum_n c'_n \varphi_n(x), \qquad \bar{\psi}'(x) = \sum_n \bar{c}'_n \varphi_n^\dagger(x) \tag{10.61}$$

则

$$c'_n = \sum_m \int \mathrm{d}^4 x \varphi_n^\dagger(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha(x)\gamma_5}\varphi_m(x) c_m \tag{10.62}$$

因此由式(3.138)有

$$\prod_n \mathrm{d}c'_n = (\det f_{nm})^{-1}\prod_m \mathrm{d}c_m$$
$$\prod_n \mathrm{d}\bar{c}'_n = (\det f_{nm})^{-1}\prod_m \mathrm{d}\bar{c}_m \tag{10.63}$$

其中

$$f_{nm} = \int \mathrm{d}^4 x \varphi_n^\dagger(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha(x)\gamma_5}\varphi_m(x) \tag{10.64}$$

对无穷小的 $\alpha(x)$

$$(\det f_{nm})^{-1} = \det\left[\delta_{nm} - \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x \alpha(x)\varphi_n^\dagger(x)\gamma_5\varphi_m(x)\right]^{-1}$$
$$= \exp\left(\mathrm{i}\sum_n \int \mathrm{d}^4 x \alpha(x)\varphi_n^\dagger(x)\gamma_5\varphi_n(x)\right)$$
$$= \exp\left(\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x \alpha(x) A(x)\right) \tag{10.65}$$

$$A(x) = \sum_n \varphi_n^\dagger(x)\gamma_5\varphi_n(x) \tag{10.66}$$

因此,在手征变换式(10.60)下泛函积分测度式(10.59)变为

$$\mathrm{d}\mu \to \mathrm{d}\mu \exp\left(2\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x \alpha(x) A(x)\right) \tag{10.67}$$

$A(x)\neq 0$ 意味着,泛函积分测度在手征变换下不是不变的,这时即使取 $m\to 0$ 极限,手征变换也不是量子理论的对称性,这就是手征流反常的根源。

式(10.66)右方的级数的第 $n$ 项在 $n\to\infty$ 时不趋于零,它不是绝对收敛的,而只可能是条件收敛的级数。因此,为使 $A(x)$有确切的意义,需要进行正规化。为此我们把 $A(x)$定义为

$$A(x) = \lim_{M\to\infty}\left[\sum_n \varphi_n^\dagger(x)\gamma_5 f\left(\left(\frac{\lambda_n}{M}\right)^2\right)\varphi_n(x)\right]$$

$$= \lim_{M\to\infty}\left[\sum_n \varphi_n^\dagger(x)\gamma_5 f\left(\left(\frac{-\mathrm{i}\not{D}}{M}\right)^2\right)\varphi_n(x)\right] \tag{10.68}$$

其中,$f$ 为满足条件

$$f(0) = 1$$

$$f(\infty) = f'(\infty) = \cdots = f^{(n)}(\infty) = \cdots = 0 \tag{10.69}$$

的任意函数。在正规化以后,式(10.68)中方括号内的级数有好的收敛性质,可以在式中由 $n$ 表象变到平面波表象。由

$$\sum_n \langle n \mid x\rangle O\langle x \mid n\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^4 k\,\mathrm{d}^4 k'}{(2\pi)^8}\sum_n \langle n \mid k'\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} O \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\langle k \mid n\rangle$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}^4 k\,\mathrm{d}^4 k'}{(2\pi)^4}\delta^4(k-k')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} O \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

可将式(10.68)写为

$$A(x) = \lim_{M\to\infty}\left[\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\gamma_5 f\left(\left(\frac{-\mathrm{i}D}{M}\right)^2\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right] \tag{10.70}$$

利用

$$\not{D}^2 = \frac{1}{2}D_\mu D_\mu - \mathrm{i}\frac{1}{4}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]F_{\mu\nu}$$

得到

$$f\left(-\left(\frac{\not{D}}{M}\right)^2\right) = \sum_n \frac{1}{n!}f^{(n)}\left(-\frac{D^2}{2M^2}\right)\left(\frac{\mathrm{i}}{4M^2}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]F_{\mu\nu}\right)^n$$

$$A(x) = -\lim_{M\to\infty}\mathrm{Tr}\{\gamma_5([\gamma_\mu,\gamma_\nu]F_{\mu\nu})^2\}\frac{1}{32M^4}\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}f''\left(\frac{k^2}{2M^2}\right)$$

$$= -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma})\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}f''\left(\frac{k^2}{2}\right) \tag{10.71}$$

$f^{(n)}\left(-\dfrac{D^2}{2M^2}\right)$中含 $A_\mu$ 的项在 $M\to\infty$ 时趋于零。作积分变量替换$\dfrac{k_\mu}{M}\to k_\mu$ 可知,$n>2$时$\dfrac{1}{M^{2n}}\int \mathrm{d}^4 k f^{(n)}\left(\dfrac{k^2}{M^2}\right)$项正比于$\dfrac{1}{M^{2n-4}}$,它们在 $M\to\infty$ 时也趋于零。因此这些项不出现在式(10.71)中。

$$\int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}f''(k^2) = \frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}k^2 k^2 f''\left(\frac{k^2}{2}\right) = -\frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{d}k^2 f'(k^2)$$

$$= -\frac{1}{16\pi^2}f(k^2)\Big|_0^\infty = \frac{1}{16\pi^2} \tag{10.72}$$

将上式代入式(10.71)中得到

$$A(x) = -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\frac{1}{16\pi^2}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}) \tag{10.73}$$

$A(x)$与正规化函数 $f$ 的具体形式无关，只依赖于条件式(10.69)。这表示式(10.66)不是发散的而是条件收敛的级数，只要按 $\lambda_n$ 增大的次序，求和式(10.66)是收敛的。

在手征变换式(10.60)下，拉氏量密度式(10.54)的变换为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(x) \to \mathscr{L}(x) &+ \mathrm{i}\partial_\mu\alpha(x)\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x)\\ &+ 2m\mathrm{i}\alpha(x)\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)\end{aligned} \tag{10.74}$$

在求与手征变换相联系的 Ward-Takahashi 恒等式时，可按通常的做法，在生成泛函式(10.55)中做形式如式(10.60)的变量替换。由于积分变量替换不改变 $W$

$$\frac{\delta}{\delta\alpha(x)}W[J_\mu, A, \eta, \bar{\eta}] = 0$$

由式(10.67)、(10.73)和(10.74)可得

$$\partial_\mu\langle j_{5\mu}\rangle = 2m\langle \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_5\psi\rangle + \mathrm{i}\langle\bar{\psi}\gamma_5\eta + \bar{\eta}\gamma_5\psi\rangle + \frac{1}{8\pi^2}\langle\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu})\rangle \tag{10.75}$$

其中

$$\langle O\rangle \equiv N\int[\mathscr{D}\psi][\mathscr{D}\bar{\psi}][\mathscr{D}A_\mu]O\exp\left\{\int\mathrm{d}^4x(\mathscr{L} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J_\mu A_\mu)\right\} \tag{10.76}$$

对式(10.75)做 $\eta, \bar{\eta}$ 和$J_\mu$ 的泛函微分可得各种含$j_{5\mu}$的 Green 函数的 Ward-Takahashi 恒等式。由式(10.75)得到轴矢流散度$\partial_\mu j_{5\mu}$的反常为$\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu})$，与计算微扰论三角图所得的结果完全一样。

现在我们来讨论上面的计算结果。我们将式(10.66)对 $x$ 积分。注意，$\gamma_5$ 与 $\dot{D}$是反对易的。由本征方程(10.56)知道，如果 $\varphi_n$ 是相应于本征值$\lambda_n$ 的本征函数，则 $\gamma_5\varphi_n(x)$也是本征函数，本征值为 $-\lambda_n$。因此相应于不为零的 $\lambda_n$ 的 $\varphi_n$ 在积分

$$\sum_n\int\mathrm{d}^4x\varphi_n^\dagger(x)\gamma_5\varphi_n(x)$$

中无贡献。我们有

$$\int\mathrm{d}^4xA(x) = \int\mathrm{d}^4x\varphi_n^\dagger(x)\gamma_5\varphi_n(x) = n_+ - n_- \tag{10.77}$$

其中，$n_+$和 $n_-$分别为方程(10.56)的零本征值左手和右手本征函数的个数。由上式知道，积分后的 $A(x)$是有确切意义的，不需进行正规化。数学家证明了如下的关于方程(10.56)的指数定理[11]

$$n_+ - n_- = \frac{1}{16\pi^2}\int \mathrm{d}^4 x \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\widetilde{F}_{\mu\nu}) \tag{10.78}$$

上式右方的量称为第二陈数,它是一个拓扑不变量,即在场的任意连续变换下不变,这一点在下面第十二章中还将作说明。指数定理把外场 $A_\mu$ 中的 Dirac 算符 $-\mathrm{i}\hat{D}$的零本征值手征本征函数的个数与 $A_\mu$ 的拓扑不变量联系起来。式(10.73)与(10.77)、(10.78)是一致的,它可看作指数定理的定域形式。这说明手征流的反常是与规范场的拓扑性质联系的。

第二点是路径积分方法与微扰论方法的比较。如果我们开始时不取方程(10.56)定义的本征函数 $\varphi_n(x)$而取方程

$$-\mathrm{i}\gamma_\mu\partial_\mu\varphi_k(x) = \lambda_k\varphi_k(x)$$

的解(即平面波)为基矢,并令

$$\varphi(x) = \sum_k c(k)\varphi_k(x)$$

$$[\mathscr{D}\psi][\mathscr{D}\bar{\psi}] = \prod_k c(k)\prod_{k'}\bar{c}(k')$$

则不能由泛函积分测度的手征变换得到反常。事实上,由指数定理知道

$$\sum_n\int \mathrm{d}^4 x\varphi_n^\dagger(x)\gamma_5\varphi_n(x) \neq 0 = \sum_k\int \mathrm{d}^4 x\varphi_k^\dagger(x)\gamma_5\varphi_k(x)$$

这说明,在量子场论中在收敛性不好的公式里做形式上的表象变换是不允许的。这样变换不是真正的幺正变换。它与式(10.70)中先做正规化,然后再做表象变换,最后使 $M\to\infty$所得的结果不同。我们自然也可以用平面波为基矢来表述量子场论,这就是通常的微扰论。如 10.1 节中的计算所表明的,这时反常来自发散的积分,也就是来自大动量的区域。另一方面,式(10.78)说明至少在对 $x$ 积分以后反常只来自函数空间中基矢式(10.56)的零本征值部分。由于表象的不同,这种差异不是不能理解的。事实上,在式(10.71)中由于 $M\to\infty$,反常确实来自大动量的区域。

手征流反常的路径积分计算方法可以推广到规范场是手征性的情形。这时拉氏量密度中与费密子有关的部分为

$$\mathscr{L}_\psi = -\bar{\psi}_{\mathrm{L}}\not{D}_{\mathrm{L}}\psi_{\mathrm{L}} - \bar{\psi}_{\mathrm{R}}\not{D}_{\mathrm{R}}\psi_{\mathrm{R}} \tag{10.79}$$

其中

$$\not{D}_{\mathrm{L}} = \gamma_\mu(\partial_\mu - \mathrm{i}A_{\mathrm{L}\mu}), \qquad \not{D}_{\mathrm{R}} = \gamma_\mu(\partial_\mu - \mathrm{i}A_{\mathrm{R}\mu}) \tag{10.80}$$

这里,$A_{\mathrm{L}\mu}$和$A_{\mathrm{R}\mu}$由式(10.41)定义。为了得到自洽的量子理论,与手征规范场耦合的流必须没有反常。我们假设这个条件是满足的。U(1)轴矢流 $j_{5\mu} = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ 在经典理论中守恒,设它不与规范场耦合。取本征方程

$$-\mathrm{i}\not{D}_{\mathrm{L}}\varphi_n = \lambda_n\varphi_n, \qquad -\mathrm{i}\not{D}_{\mathrm{R}}\chi_n = \nu_n\chi_n \tag{10.81}$$

的解为基矢。对 $\lambda_n = 0$ 的解，$\varphi_n$ 可取为 $\gamma_5$ 的本征函数，对 $\lambda_n \neq 0$ 的解 $\varphi_n(x)$，$\gamma_5\varphi_n(x)$为属于本征值 $-\lambda_n$ 的本征函数。由 $\varphi_n$ 和 $\gamma_5\varphi_n$ 可以组成左手态和右手态。因此定义

$$\begin{aligned}
\varphi_n^{\mathrm{L}}(x) &= \frac{1+\gamma_5}{\sqrt{2}}\varphi_n(x), \qquad \lambda_n > 0 \\
&= \frac{1+\gamma_5}{2}\varphi_n(x), \qquad \lambda_n = 0 \\
\varphi_n^{\mathrm{R}}(x) &= \frac{1-\gamma_5}{\sqrt{2}}\varphi_n(x), \qquad \lambda_n > 0 \\
&= \frac{1-\gamma_5}{2}\varphi_n(x), \qquad \lambda_n = 0
\end{aligned} \tag{10.82}$$

$\varphi_n^{\mathrm{L}}$ 和 $\varphi_n^{\mathrm{R}}$ 组成一组完备的基矢。$\psi_{\mathrm{L}}$ 和 $\bar{\psi}_{\mathrm{L}}$ 可展开为

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathrm{L}}(x) &= \sum_{\lambda_n \geqslant 0} c_n\varphi_n^{\mathrm{L}}(x) \\
\bar{\psi}_{\mathrm{L}}(x) &= \sum_{\lambda_n \geqslant 0} \bar{c}_n\varphi_n^{\mathrm{R}\dagger}(x)
\end{aligned} \tag{10.83}$$

在定域手征变换

$$\psi_{\mathrm{L}}(x) \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha(x)}\psi_{\mathrm{L}}(x), \qquad \bar{\psi}_{\mathrm{L}}(x) \to \bar{\psi}_{\mathrm{L}}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(x)} \tag{10.84}$$

下，Fermi 场的泛函积分测度的变换为

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mu = \prod_n \mathrm{d}c_n \prod_{n'} \mathrm{d}\bar{c}_{n'} &\to \mathrm{d}\mu \exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4 x\alpha(x)\right. \\
&\quad \times \left.\sum_{\lambda_n \geqslant 0}\left[\varphi_n^{\mathrm{L}\dagger}(x)\varphi_n^{\mathrm{L}}(x) - \varphi_n^{\mathrm{R}\dagger}(x)\varphi_n^{\mathrm{R}}(x)\right]\right\} \\
&= \mathrm{d}\mu \exp\left\{\mathrm{i}\alpha(x)\sum_{\text{所有}\lambda_n}\int \mathrm{d}^4 x\varphi_n^{\dagger}(x)\gamma_5\varphi_n(x)\right\}
\end{aligned} \tag{10.85}$$

由此得到左手场 U(1)流 $j_{\mathrm{L}\mu} = \mathrm{i}\bar{\psi}_{\mathrm{L}}\gamma_\mu\psi_{\mathrm{L}}$ 的反常为

$$\partial_\mu j_{\mathrm{L}\mu} = \frac{1}{16\pi^2}\mathrm{Tr}(F_{\mathrm{L}\mu\nu}\widetilde{F}_{\mathrm{L}\mu\nu}) \tag{10.86}$$

其中，$F_{\mathrm{L}\mu\nu}$是由 $A_{\mathrm{L}\mu}$ 构成的场强。与前面讨论的非手征性规范场理论的情况相比，式(10.86)右方多一个因子$\frac{1}{2}$。右手场也可同样处理，得到

$$\partial_\mu j_{\mathrm{R}\mu} = -\frac{1}{16\pi^2}\mathrm{Tr}(F_{\mathrm{R}\mu\nu}\widetilde{F}_{\mathrm{R}\mu\nu}) \tag{10.87}$$

以上的结果可以推广到与整体非 Abel 对称性相联系的手征流 $j^a_{L\mu}=\mathrm{i}\bar{\psi}_L\gamma_\mu T_a\psi$ 的情形，$j^a_{L\mu}$ 不与规范场耦合。与式(10.86)相似，得到

$$\partial_\mu j^a_{L\mu} = \frac{1}{16\pi^2}\mathrm{Tr}(T_a F_{L\mu\nu}\widetilde{F}_{L\mu\nu}) \tag{10.88}$$

式(10.86)和(10.88)与微扰论的结果是一样的。

但是在手征流与规范场耦合时，上述路径积分方法不能得到与微扰论一致的结果。例如，对式(10.36)所确定的 U(1)轴矢规范场模型，按这个方法应将拉氏量密度写为

$$\mathscr{L} = -\bar{\psi}_L(\partial_\mu - \mathrm{i}gA_\mu\gamma_\mu)\psi_L - \bar{\psi}_R(\partial_\mu + \mathrm{i}gA_\mu)\gamma_\mu\psi_R - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{10.89}$$

在这个模型中 $g_L=-g_R=g$，$A_{L\mu}=A_{R\mu}$。因此由式(10.86)和(10.87)得到

$$\partial_\mu j_{5\mu} = \partial_\mu j_{L\mu} - \partial_\mu j_{R\mu} = \frac{g^2}{8\pi^2}F_{\mu\nu}\widetilde{F}_{\mu\nu} \tag{10.90}$$

上式与式(10.40)差一个因子$\frac{1}{3}$。对非 Abel 对称的情况式(10.88)在用于与规范场耦合的流时也与微扰论的结果式(10.42)和(10.42′)不一致。在文献[12]中指出，如果代替式(10.81)用本征方程

$$-\mathrm{i}\gamma_\mu(\partial_\mu - \mathrm{i}V_\mu - \mathrm{i}\gamma_5\mathscr{A}_\mu)\varphi_n(x) = \lambda_n\varphi_n(x) \tag{10.91}$$

的解为基，其中 $V_\mu=\frac{1}{2}(A_{L\mu}+A_{R\mu})$，$\mathscr{A}_\mu=\frac{1}{2}(A_{L\mu}-A_{R\mu})$，则可以得到和微扰论相同的结果。但是式(10.91)左方的算符不是厄米的。因此这样的做法在理论上有不清楚之处。此外，如果式(10.91)也可以用，为什么对手征流与规范场耦合的情况应取式(10.91)而对手征流不与规范场耦合的情况应取式(10.81)？这一点也是不清楚的。对与规范场耦合的流，Fujikawa 的结果式(10.88)的意义在文献[14]中提出一种解释。在下面将要提到。

对与规范场耦合的手征流的反常有另一个计算方法。Wess 和 Zumino 在文献[13]中指出这种反常必须满足一个自洽性条件。现在我们来导出这个条件。在无穷小规范变换下

$$\begin{aligned}\delta_\alpha A^a_\mu(x) &= -\frac{1}{g}(D_\mu\alpha(x))^a \\ &= -\frac{1}{g}(\partial_\mu\alpha(x) - \mathrm{i}[A_\mu(x),\alpha(x)])^a\end{aligned} \tag{10.92}$$

一般的规范势的泛函 $F[A]$的规范变换可以由下式得到

$$\delta_\alpha F[A] = -\frac{1}{g}\int \mathrm{d}^4x(D_\mu\alpha(x))^a\frac{\delta}{\delta A^a_\mu(x)}F[A] \tag{10.93}$$

由式(10.93)容易验证,规范变换的对易关系

$$(\delta_\alpha\delta_\beta - \delta_\beta\delta_\alpha)F[A] = \delta_{i[\alpha,\beta]}F[A] \tag{10.94}$$

与规范场相耦合的流在经典理论中可以定义为

$$\delta_\alpha S = g_a\int \mathrm{d}^4 x j^a_\mu(x) D_\mu \alpha^a(x)$$

其中,$S$ 为经典作用量。在量子理论中不可约顶角生成泛函 $\Gamma[A]$ 起着有效作用量的作用,因此可以由下式定义与规范场 $A^a_\mu$ 耦合的流 $j^a_\mu$

$$\begin{aligned}\delta_\alpha\Gamma[A] &= -\frac{1}{g_a}\int \mathrm{d}^4 x\,\frac{\delta\Gamma[A]}{\delta A^a_\mu(x)}(D_\mu\alpha(x))^a \\ &= -\int \mathrm{d}^4 x j^a_\mu(x)(D_\mu\alpha(x))^a\end{aligned} \tag{10.95}$$

一般情况下,$j^a_\mu$ 中既包含左手部分也包含右手部分。由式(10.95)得到

$$\delta_\alpha\Gamma[A] = \int \mathrm{d}^4 x(D_\mu j_\mu(x))^a\alpha^a(x) = \int \mathrm{d}^4 x G^a(x)\alpha^a(x) \tag{10.96}$$

其中,$G^a(x)$就是流 $j^a_\mu$ 的反常。由式(10.94)和(10.95)得到

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{d}^4 x(\beta^a(x)\delta_\alpha G^a(x) - \alpha^a(x)\delta_\beta G^a(x)) \\ &= \int \mathrm{d}^4 x\,\mathrm{i}[\alpha(x),\beta(x)]^a G^a(x)\end{aligned} \tag{10.97}$$

这就是 Wess 和 Zumino 得到的自洽性条件。由于规范变换 $\delta_\alpha$ 对 $A_\mu$ 是非齐次的,自洽性条件式(10.97)把 $G^a$ 的表示式中含 $A_\mu$ 的幂次不同的项联系起来,限制了 $A_\mu$ 的形式。事实上,如果把反常分为左手和右手两个部分,并要求它们分别只与 $A_{\mathrm{L}\mu}$和$A_{\mathrm{R}\mu}$有关(这在单圈图内是成立的),可以证明,条件式(10.97)确定反常(只差一个系数)。在文献[14],[15]中用微分几何中外微分形式的方法得到满足自洽性方程(10.97)的 $G^a$ 的形式。对四维时空的规范场论,它与式(10.42)和(10.42′)是一样的。在 20 世纪 30 年代提出近年来又重新受到注意的 Kaluza-Klein 型理论中人们考虑高维时空的广义相对论,这种理论的一个基本思想是把四维时空以外的空间维数解释为内部自由度,它们是与规范场相联系的。另外一类理论中还出现高维时空中的规范场。在这些理论中不但有内部规范对称性的反常,还有与引力联系的定域 Lorentz 变换和广义坐标变换的反常。用微分几何方法容易得到高维时空的手征流反常和引力反常,并且在推导过程中出现的量都有拓扑意义。

在文献[14]中指出,可以在由式(10.95)定义的流 $j^a_\mu$ 中加上一项 $A_\mu$ 的多项式,使得流 $\tilde{j}^a_\mu = j^a_\mu + X^a_\mu$ 满足由 Fujikawa 方法得到的结果

$$D_\mu\tilde{j}_\mu = \mathrm{i}\frac{1}{16\pi^2}\mathrm{Tr}(T_a F_{\mu\nu}\widetilde{F}_{\mu\nu})$$

这只要取

$$X_{\mu}^{a} = \frac{1}{48\pi^{2}} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathrm{Tr}\{ T_{a} ( A_{\nu} F_{\rho\sigma} + F_{\rho\sigma} A_{\nu} + \mathrm{i} A_{\nu} A_{\rho} A_{\sigma} ) \}$$

由于 $\tilde{j}_{\mu}$ 的反常是规范协变的,文献[14]中称 $\tilde{j}_{\mu}$ 为协变流,而称由式(10.95)定义的流为自洽流。因此 Fujikawa 的不同结果可以看做流的定义不同。在 Fujikawa 的做法中,始终保持了明显的规范协变性。

## 10.4　无手征流反常的理论

在弱电统一理论这样的规范理论中,由于规范对称是手征性的,一般存在着产生反常的 Feynman 图。如 10.2 节中已说明的,为了得到自洽的可重整的规范理论,与规范场耦合的流必须没有反常。因此如果理论中存在一些反常项,它们必须互相消去。在本节中我们将讨论规范理论没有反常或反常消去的条件。在这方面有两个很有用的定理。第一个是前面已讨论过的反常不重整定理,它告诉我们如果单圈图的反常不存在,则多圈图的反常也不存在;第二个定理是,如果三角图的反常不存在,则多于三个顶点的单圈图的反常也不存在。这是因为由公式(10.42)和(10.42′)知道,多于三顶点的图的反常项的系数与三角图的反常项的系数有确定的关系。因此问题归结到要保证三角图没有反常。

在一般情况下,同一规范场可以既作用于左手 Fermi 子,也作用于右手 Fermi 子,因此在考虑反常消去的问题时,应把左手流和右手流合在一起考虑。我们把理论中所有的 Fermi 场算符排成一列矩阵 $\psi$,并令 $A_{\mu}$ 表示理论中所有的规范场。Fermi 子与规范场的作用顶点可写为

$$g^{a} \mathrm{i} \bar{\psi} \gamma_{\mu} \Gamma_{a} \psi A_{\mu}^{a} = g^{a} j_{\mu}^{a} A_{\mu}^{a} \tag{10.98}$$

其中,$\Gamma_{a}$ 包含规范场生成元的矩阵表示及矩阵 $\gamma_{5}$。$\Gamma_{a}$ 的一般形式为

$$\Gamma_{a} = \frac{1}{2}(1+\gamma_{5}) T_{a}^{\mathrm{L}} + \frac{1}{2}(1-\gamma_{5}) T_{a}^{\mathrm{R}} \tag{10.99}$$

其中,$T_{a}^{\mathrm{L}}$ 和 $T_{a}^{\mathrm{R}}$ 分别为规范群生成元在左手 Fermi 子和右手 Fermi 子所属的表示中的矩阵。$j_{\mu}^{a}$ 是与规范场 $A_{\mu}^{a}$ 耦合的流。由式(10.42)和(10.42′)知道,$D_{\mu} j_{\mu}^{a} = D_{\mathrm{L}\mu} j_{\mathrm{L}\mu}^{a} + D_{\mathrm{R}\mu} j_{\mathrm{R}\mu}^{a}$ 的三角图反常项为

$$\mathrm{i} \frac{g_{b} g_{c}}{48\pi^{2}} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_{\mu} A_{\nu}^{b} \partial_{\rho} A_{\sigma}^{c} \mathrm{Tr}( T_{a}^{\mathrm{L}} \{ T_{b}^{\mathrm{L}}, T_{c}^{\mathrm{L}} \} - T_{a}^{\mathrm{R}} \{ T_{b}^{\mathrm{R}}, T_{c}^{\mathrm{R}} \} ) \tag{10.100}$$

由上式可以看到,规范对称性没有反常的条件是

$$\mathrm{Tr}( T_{a}^{\mathrm{L}} \{ T_{b}^{\mathrm{L}}, T_{c}^{\mathrm{L}} \} ) = \mathrm{Tr}( T_{a}^{\mathrm{R}} \{ T_{b}^{\mathrm{R}}, T_{c}^{\mathrm{R}} \} ) \tag{10.101}$$

在文献[16]中比较详细地讨论了条件式(10.101)。令 $d_{abc}^{\mathrm{L}}$ 和 $d_{abc}^{\mathrm{R}}$ 分别代表式

(10.101)左方和右方。满足条件式(10.101)的情况有如下几个：

(1) $d^{\mathrm{L}}_{abc}=d^{\mathrm{R}}_{abc}\neq 0$ (10.102)

即左、右手的反常互相抵消。实现这种抵消的一种方式是左手 Fermi 子所属的表示与右手 Fermi 子所属的表示等价，即存在幺正矩阵 $U$ 使 $T^{\mathrm{R}}_a=U^{\dagger}T^{\mathrm{L}}_aU$，这时式(10.101)显然满足。这种规范理论称为类矢量型的。因为在通过幺正变换重新定义右手场为 $\psi'_{\mathrm{R}}=U\psi_{\mathrm{R}}$ 后可以使得理论中只含矢量流。但这只是左、右手 Fermi 子的贡献互相抵消的方式之一。在 Fermi 子属于可约表示时，可以有各种不可约的成分恰好抵消的情况。

(2) $d^{\mathrm{L}}_{abc}=d^{\mathrm{R}}_{abc}=0$ (10.103)

在文献[16]中称满足条件 $d_{abc}=0$ 的表示为安全的。如果一个表示与其复共轭表示等价，即存在幺正矩阵 $U$ 使

$$T_a=-U^{\dagger}T^{*}_aU \tag{10.104}$$

则称为实表示。令 $\widetilde{T}_a$ 为 $T_a$ 的传置，由式(10.104)得

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(T_a\{T_b,T_c\})&=-\mathrm{Tr}(T^{*}_a\{T^{*}_b,T^{*}_c\})\\&=-\mathrm{Tr}(\widetilde{T}_a\{\widetilde{T}_b,\widetilde{T}_c\})=-\mathrm{Tr}(\{T_b,T_c\}T_a)=0\end{aligned} \tag{10.105}$$

因此实表示是安全表示。但是安全表示不一定是实的。在 Fermi 子属于可约表示的情况下各个不可约成分的贡献可以互相抵消。

(3) 安全李代数

这是第(2)类的一种特殊情况。如果某个李代数的全部表示都是安全的，则称为安全李代数。数学家证明了一些单纯李代数的全部表示都是实的，它们是下述群的李代数：

| | |
|---|---|
| SU 群 | SU(2) |
| 正交群 | SO(2$N$+1)，SO(4$N$) |
| 辛群 | SP(2$N$)，$N\geqslant 3$ |
| 例外群 | $G_2$，$F_4$，$E_7$，$E_8$ |

因而这些李代数是安全的。SO(4$N$+2)虽然有复表示，但是文献[16]中证明了，除 SO(6)外 SO(4$N$+2)群的全部表示都满足 $d_{abc}=0$。SO(6)的李代数与 SU(4)的李代数是等价的。因此在所有的单纯群中只有 SU($N$)($N\geqslant 3$)及例外群 $E_6$ 的李代数不是安全的。U(1)群的李代数也不是安全的。几个安全的单纯李代数的直和是安全的。但是一个安全李代数和一个 Abel 李代数的直和不是安全的。Weinberg-Salam 模型就是这种情况。

然而，右手场的电荷共轭 $\psi^{c}_{\mathrm{L}}\equiv C\bar{\psi}_{\mathrm{R}}$ 是一个左手场。我们也可以不用 $\psi_{\mathrm{L}}$ 和 $\psi_{\mathrm{R}}$ 而用 $\psi_{\mathrm{L}}$ 和 $\psi^{c}_{\mathrm{L}}$ 为 Fermi 场的独立变量。因此情况(1)和(2)的区分是有条件的。

$\psi_L^c$ 和 $\psi_R$ 所属的表示互为复共轭。因此,如 $\psi_L$ 所属的表示 $R$ 与 $\psi_R$ 所属的表示等价,则左手场 $\begin{pmatrix}\psi_L\\ \psi_L^c\end{pmatrix}$ 属于实表示 $R \oplus R^*$,其中$\oplus$表示直和。

现在我们考虑条件式(10.101)对 Weinberg-Salam 模型的约束。这时规范群为 $SU(2)_L \times U(1)_Y$,左手 Fermi 子都是 $SU(2)_L$ 的二重态,右手 Fermi 子都是 $SU(2)_L$的单态。$SU(2)_L \times U(1)_Y$ 群有四个生成元:$T_a^L(a=1,2,3)$及 $Y$。由于 SU(2)群的李代数是安全的,三个 $SU(2)_L$ 规范场顶点的三角图没有反常。事实上,对于三个 $W$ 规范粒子外线的三角图,由于 Pauli 矩阵的反对易关系$\{\tau_a, \tau_b\} = 2\delta_{ab}$,有

$$\mathrm{Tr}(\{T_a^L, T_b^L\} T_c^L) = 0 \tag{10.106}$$

式(10.101)是成立的。剩下的可能产生反常的是 $Z^0 W^+ W^-$ 和 $\gamma W^+ W^-$ 三角图。对这两种图,利用 $Q = \frac{Y}{2} + T_3^L$ 及式(10.106)可将式(10.101)改写为

$$\mathrm{Tr}(\{T_+^L, T_-^L\} Y) = 2\mathrm{Tr}(\{T_+^L, T_-^L\} Q) = 0 \tag{10.107}$$

利用

$$\frac{1}{4}(\tau_+ \tau_- + \tau_- \tau_+) = \frac{1}{2}$$

条件式(10.107)又可写为

$$\sum_L Q = 0$$

上式中求和号取遍所有左手 Fermi 子二重态。对三代夸克、轻子的 W-S 模型有下列左手 Fermi 子二重态

$$\begin{pmatrix}\nu_e\\ e^-\end{pmatrix}_L,\quad \begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu^-\end{pmatrix}_L,\quad \begin{pmatrix}\nu_\tau\\ \tau^-\end{pmatrix}_L,\quad \begin{pmatrix}u\\ d_c\end{pmatrix}_L,\quad \begin{pmatrix}c\\ s_c\end{pmatrix}_L,\quad \begin{pmatrix}t\\ b_c\end{pmatrix}_F$$

其中,每个夸克二重态各有三种颜色。对这个模型

$$\sum_L Q = 3\times(0+(-1)) + 3\times 3\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) = 0 \tag{10.108}$$

轻子与强子的贡献正好相互抵消,所以条件式(10.108)是满足的。一般来说,如果左手轻子二重态的电荷与 $\begin{pmatrix}\nu_e\\ e^-\end{pmatrix}_L$ 相同,左手夸克二重态的电荷与 $\begin{pmatrix}u\\ d_c\end{pmatrix}_L$ 相同且每个夸克二重态都有三种颜色,则只要轻子二重态与夸克二重态的味数相同,这个模型就没有反常项。

# 参 考 文 献

1 S L Adler. in Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory, eds S Deser et al. Cambridge: MIT Press, 1970

2 R Jackiw. in Lectures on Current Algebra and its Applications. Princeton: Princeton University Press, 1970

3 J M Jauch and F Rohrlich. The Theory of Photons and Electrons, Appendix A5. Addison-Wesley Pub Co 1955;朱洪元.量子场论,第十章.北京:科学出版社,1960

4 G 't Hooft and M Veltman. Nucl Phys. 1972, B44:189;P Breitenlohner and D Maison. Comm Math Phys. 1977, 52:11

5 W Bardeen, R Gastmans and B Lautrup. Nucl Phys. 1972,B46:319

6 S L Adler and W A Bardeen. Phys Rev. 1969, 182:1517

7 D J Gross and R Jackiw. Phys Rev. 1972,D6:477

8 W A Bardeen. Phys Rev. 1969, 184:1848

9 J Schwinger. Phys Rev Lett. 1959,3:296;R Jackiw and K Johnson. Phys Rev. 1969,182:1457

10 K Fujikawa. Phys Rev Lett. 1979,42:1195; Phys Rev. 1980:D21:2848

11 M Atiyah and I Singer. Ann Math. 1968,87:484

12 A B Balachandran, G Marmo, V P Nair and C G Trahern. Phys Rev. 1982, D25:2713;M B Einborn and D R T Jones. Phys Rev. 1984,D29: 331

13 J Wess and B Zumino. Phys Lett. 1971, 37B: 95

14 B Zumino, Y S Wu and A Zee. Nucl Phys. 1984,B239: 477

15 W Bardeen and B Zumino. Nucl Phys. 1984, B244: 421

16 H Georgi and S L Glashow. Phys Rev. 1972, D6: 429

# 第十一章　大统一理论

## 11.1　引　　言

由弱电统一的 Weinberg-Salam 模型和强作用的量子色动力学组成的 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$（记作 $G_s$）规范理论取得了很大的成就。人们常把这个理论称为弱、电和强作用的标准模型。但是作为基本理论来看，这个模型以及它的某种推广也有如下一些很重要的缺憾：①这个模型中有 $SU(2)_L$ 二重态 Higgs 粒子。虽然拉氏量中与规范场有关的部分是由规范群唯一确定的，Higgs 粒子的位势以及它们与 Fermi 子的汤川作用包含许多任意参数，不能由某种物理原理定出来。其结果是，理论不能预言各种粒子的质量和混合角。以只有三代轻子和夸克以及一个 Higgs 粒子二重态的最小模型来说，理论中包含三个规范作用常数、三个带电轻子的质量、六个夸克的质量、三个 Cabbibo 混合角、一个 CP 破坏的位相角以及 $W$ 和 Higgs 粒子的质量。去掉一个共同的质量标度后，理论中共有十七个实验上可以测量，而理论上完全任意的参数。考虑瞬子效应和 $\theta$ 真空后（见第十二章），理论中还需引入两个参数。如果自然界存在右手中微子，则中微子可具有质量，轻子也将和夸克一样具有自己的 Kobayashi-Maskawa 矩阵，理论中的参数就更多了。很难相信自然界的基本理论具有这样多的任意参数。②自然界至少存在三代轻子和夸克，它们在 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 下具有完全相同的量子数，理论不能对这种重复做出解释。③电子电荷与质子电荷绝对值相等。这个现象称为电荷的量子化，在标准模型中电荷 $Q = T_3^L + \dfrac{Y}{2}$，电荷的量子化是通过选取左手轻子的超荷 $y_l$ 和左手夸克的超荷 $y_q$ 的比 $y_l/y_q = -3$ 来保证的。但是 U(1)群的生成元的本征值从原则上说可以是任意实数，其比值不一定要是整数。因此在 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 模型中电荷的量子化是人为地放入理论中的，理论对电荷的量子化没有做出解释。④在 Weinberg-Salam 模型中虽然弱作用和电磁作用在规范群下混合起来，但是规范群是两个单群 $SU(2)_L$ 和 $U(1)_Y$ 的直积，仍旧有两个独立的耦合常数，因此弱作用和电磁作用并未彻底统一。⑤包括强作用在内，标准模型有三个独立的规范作用常数，特别是 $SU(3)_C$ 群的耦合常数与弱电耦合常数有数量级的差别，理论也没有解释这种差别的物理原因。

另一方面，弱作用和电磁作用的统一以及强作用的量子色动力学也是规范理

论这一事实使得人们设想，弱、电、强三种基本作用可以在规范理论的基础上统一起来。这要求有一个在规范群 $G$ 下不变的拉氏量，群 $G$ 必须包含群 $G_s = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 为其子群，相应于这个子群的生成元的规范场产生标准模型所描述的弱、电和强作用。这种类型的理论称为大统一理论。这是一个理论上很有吸引力的想法。大统一理论可以部分解决上面叙述的标准模型一类理论的问题。

为了解决第④和第⑤个问题，我们希望理论中只有一个规范耦合常数。这要求规范群 $G$ 或者是一个单群或者是几个相同的单群的直积，在后一种情况下，如果附加上几个单群互相置换的对称性，则理论中也只有一个规范耦合常数。在几个最简单并且有吸引力的大统一模型中 Georgi 和 Glashow 提出的 SU(5)模型[1]以及 SO(10)模型[2]和 $E_6$ 模型[3]属于第一类，而文献[4]中 Pati 和 Salam 提出的模型属于第二类。

由于群 $G$ 比群 $G_s$ 有更多的生成元，大统一理论中有标准模型所没有的规范相互作用。

由于在弱作用的标度 $m_W$（$W$ 中间 Bose 子的质量）下相互作用只有 $G_s$ 的对称性，在大统一理论中群 $G$ 的对称性必须在更高的能标下破缺。这可以通过 Higgs 机制实现。由于 Higgs 场的真空平均值，一部分规范粒子得到量级为 $m_X$ 的质量，$m_X$ 满足条件 $m_X \gg m_W$。在能标 $m_X$ 下 $G_s$（也许还有一个包含 $G_s$ 的更大子群）的对称性必须保持，否则在比 $m_X$ 低的能标下得不到标准模型的结果。$G_s$ 对称只在较低的能标 $m_W$ 下破缺。

大统一理论如能成立，必须能解释在低能下观察到的弱电作用和 $SU(3)_C$ 强作用耦合常数的数值。这是可能的。设在能标 $m_X$ 下 $G$ 对称性破缺到 $G_s$ 对称性。令子群 $SU(3)_C$，$SU(2)_L$ 和 $U(1)_Y$ 的耦合常数分别为 $g_3(\mu^2)$，$g_2(\mu^2)$ 和 $g_1(\mu^2)$，其中 $\mu^2$ 是重整化引入的标度。它们和原来标准模型定义的耦合常数 $g_s(\mu^2)$，$g(\mu^2)$ 和 $g'(\mu^2)$ 可各自差一个确定的系数。在 $\mu^2 \gg m_X^2$ 时，对称性的破缺可以忽略，$g_i(\mu^2)(i=1,2,3)$ 都等于规范群 $G$ 的耦合常数 $g(\mu^2)$。在能标 $m_X^2$ 以上，不能区分弱电和强作用，只有统一的以 $g(\mu^2)$ 为有效耦合常数的规范作用。在 $\mu^2 \lesssim m_X^2$ 时，由于对称性破缺 $g_i(\mu^2)$ 不再相等。$g_i(\mu^2)$ 随 $\mu^2$ 的流动受重整化群 $\beta$ 函数控制。在 $\mu^2$ 减小时 $SU(2)_L$ 群的有效耦合常数比 $SU(3)_C$ 群的有效耦合常数增加慢，而 $U(1)_Y$ 群的耦合常数是减小的，因而表现出作用强弱的差别。反过来，如果以低能下测量到的 $g_i(\mu^2)$ 值为初始值按照重整化群方程算出 $g_i(\mu^2)$ 在某一个 $\mu^2$ 值下重合，如图 11.1 所示，则可以选择这个值为群 $G$ 对称性破缺的能标 $m_X^2$。在这种情况下能够得到自洽的大统一理论，同时理论也对在低能下观察到的耦合常数 $g_s$，$g$ 和 $g'$ 的数值给出了解释。

通常大统一理论把一些夸克和轻子放在规范群的同一不可约表示中。因此，大统一理论中可以发生重子数和轻子数不守恒的过程，预言质子衰变为轻子的现象。这是物理上非常有兴趣的结果。产生重子数不守恒过程的等效 Fermi 作用的强度是$(g^2/m_X^2)$。为使理论预言的质子寿命不与实验下限矛盾，$m_X$ 必须很大。

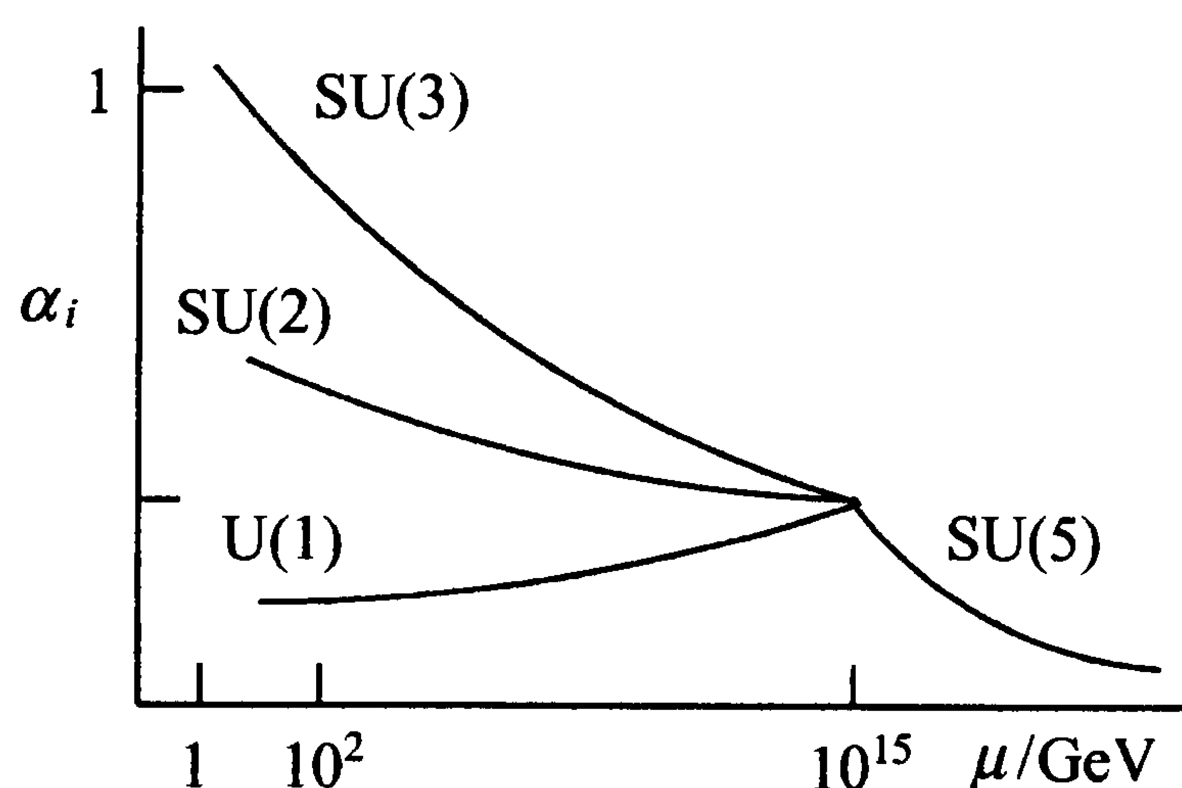



图 11.1

由于大统一理论比标准模型有更大的对称性，标准模型中一些粒子的质量在大统一理论中有确定的关系。这就减少了这些质量中独立参数的个数，并对它们做出理论的预言。由于在大统一理论中电荷是一个非 Abel 单群的生成元（或者是它们的直和），而非 Abel 单群的生成元的本征值是离散的，所以大统一理论也能解决电荷量子化的问题。

下面我们将介绍最简单的大统一 SU(5)模型，并以它为例具体说明这里提到的物理问题和大统一理论存在的问题。

## 11.2　SU($N$)群的表示

作为讨论 SU(5)模型的数学准备，我们先回忆关于 SU($N$)群表示的数学结果。

SU($N$)群可以用它的基础表示定义，这个表示的元素可写为

$$U(\alpha) = \exp\{-\mathrm{i}\alpha^i T_i\} \tag{11.1}$$

其中，$T_i$ 是$N^2-1$个独立的迹为零的 $N\times N$ 厄米矩阵，群参数 $\alpha^i$ 为实数。另一种等价的写法是用非厄米矩阵 $T_a^b$。要求它们满足条件

$$(T_a^b)^\dagger = T_b^a, \qquad \mathrm{Tr}T_a^b = 0, \qquad a,b = 1,2,\cdots,N$$

同时把群的参数限制为满足

$$\alpha_b^a = (\alpha_a^b)^*$$

的复数。矩阵 $T_a^b$ 可选为

$$(T_a^b)_{cd} = \delta_a^c\delta_d^b - \frac{1}{N}\delta_a^b\delta_c^d \tag{11.2}$$

由于 $\sum_a T_a^a=0$，只有 $N-1$ 个独立的对角矩阵 $T_a^a$。矩阵 $T_a^b$ 满足对易关系

$$[T_a^b, T_c^d] = \delta_c^b T_a^d - \delta_a^d T_c^b \tag{11.3}$$

另外一组常用的基是 $N(N-1)$个厄米的非对角矩阵

$$\frac{1}{2}(T_a^b + T_b^a), \qquad \frac{1}{2\mathrm{i}}(T_a^b - T_b^a)$$

及如下的 $N-1$ 个对角矩阵

$$\frac{1}{\sqrt{2l(l+1)}}\begin{pmatrix} \overbrace{1 & & & }^{l个} & & & & \\ & 1 & & & & \mathbf{0} & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & \mathbf{0} & & & -l & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}, \qquad l = 1,2,\cdots,N-1 \tag{11.4}$$

在 $N=2$ 和 3 时，这些厄米矩阵分别与 $\frac{1}{2}\tau_i$ 和 $\frac{1}{2}\lambda_i$ 相等。

基础表示的矩阵作用在 $N$ 维矢量空间 $\phi^a$ $(a=1,2,\cdots,N)$ 上，$\phi$ 的 SU($N$)变换为

$$\phi \rightarrow \exp\{-\mathrm{i}\alpha^i T_i\}\phi \tag{11.5}$$

这个表示空间记作 $\underline{N}$。令 $\chi$ 为与 $\phi$ 的复共轭 $\phi^*$ 同样变换的 $N$ 维矢量。在 SU($N$)变换下

$$\chi \rightarrow \exp\{\mathrm{i}\alpha^i T_i^*\}\chi = \exp\{\mathrm{i}\alpha^i \widetilde{T}_i\}\chi = \chi\exp\{\mathrm{i}\alpha^i T_i\} \tag{11.6}$$

其中，$\widetilde{T}_i$ 为 $T_i$ 的转置矩阵。这个表示记作 $\underline{N}^*$。$\chi$ 的分量指标用下脚标表示，$\chi=(\chi_a)$，$a=1,2,\cdots,N$。在 SU($N$)变换下，$\phi^a\chi_a$ 是不变量。上脚标和下脚标分别称为逆变和协变指标。

由几个 SU($N$)群的基础表示的张量积可以构造出 SU($N$)群的高维表示。设有 $k$ 阶逆变张量 $\phi^{a_1,a_2,\cdots,a_k}$ $(a_i=1,2,\cdots,N)$，它在 SU($N$)群下的变换性质和乘积 $\phi^{a_1}\phi^{a_2}\cdots\phi^{a_k}$ 一样

$$\phi^{a_1,a_2,\cdots,a_k} \rightarrow \exp(-\mathrm{i}\alpha^i T_i)_{a_1 b_1}\cdots\exp(-\mathrm{i}\alpha^i T_i)_{a_k b_k} \cdot \phi^{b_1,b_2,\cdots,b_k} \tag{11.7}$$

张量表示 $\phi^{a_1,a_2,\cdots,a_k}$ 一般是可约的，其原因是指标 $a_1,\cdots,a_k$ 的置换与变换式(11.7)对易。在置换群下有一定对称性的张量显然构成 SU($N$)群的表示。由 $\phi^{a_1,\cdots,a_k}$ 分解出不可约表示的方法是把它按 $k$ 个指标 $a_1,\cdots,a_k$ 的置换群的不可约表示分解。这样得到的不可约表示可以用所谓 Young 图代表[18]。作 Young 图的

规则是画出如图 11.2 所示的有 $k$ 个方块的图。设第 $i$ 行的方块数为$\lambda_i$,要求 $\lambda_i \geqslant \lambda_{i+1}$, $\sum\limits_i \lambda_i = k$。然后把 $k$ 个指标$a_1,\cdots,a_k$ 任意地填入这$k$ 个方块中。设 Young 图有 $r$ 行和$c$ 列,$P_i$ 为对属于第$i$ 行的$\lambda_i$ 个指标对称化的算符,$Q_j$ 为对第$j$ 列的 $\mu_j$ 个指标反对称化的算符,则张量

$$(Q_c \cdots Q_1)(P_r \cdots P_1)\phi^{a_1,\cdots,a_k} \tag{11.8}$$

构成 SU($N$)群的一个不可约表示。这个表示对属于同一列的指标是全反对称的。但是由于对各列反对称化作用在对各行对称化之后,这个张量对同一行的指标并不完全是对称的,它只对没有受反对称化影响的指标对称。注意到这一点后不难定出不等价的 Young 图。可以证明,SU($N$)群的所有不可约表示都可以用这个方法得到。

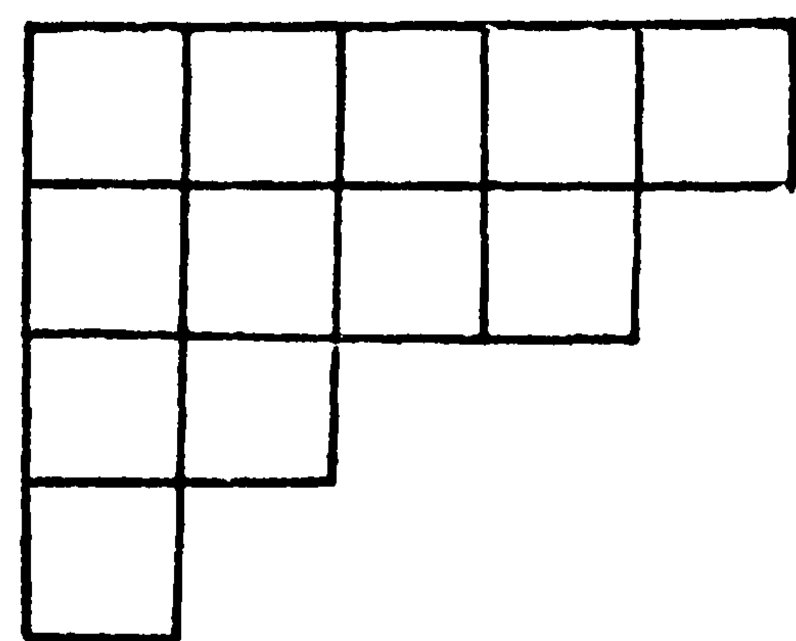


图 11.2

由于 $a_k$ 只能取 1,2,$\cdots$,$N$,显然 Young 图的行数不能超过 $N$。由于 SU($N$)群的元素 $U$ 满足条件 $\det U = 1$,容易证明,$N$ 阶全反对称张量$\phi^{[a_1,a_2,\cdots,a_k]}$是不变量

$$\phi^{[a_1,\cdots,a_k]} \to \det U \cdot \phi^{[a_1,\cdots,a_k]} = \phi^{[a_1,\cdots,a_k]}$$

同样可以证明,如果一个张量对它的指标中的 $N$ 个全反对称,则在 SU($N$)变换下这 $N$ 个指标是不变的。因此有一列 $N$ 个方块的 Young 图对应于 SU($N$)群的不变量,并且为得到可能的不可约表示,可以限制 Young 图的行数 $r<N$。

逆变张量表示 $\phi^{a_1,\cdots,a_k}$ 的复共轭表示记作 $\phi_{a_1,\cdots,a_k}$,它是 $k$ 阶协变张量。在 SU($N$)变换下,$\phi^{a_1,\cdots,a_k}\phi_{a_1,\cdots,a_k}$ 是不变量。另一方面,设 $\psi^{[a_1,\cdots,a_k]}$对它的 $k$ 个指标全反对称,容易证明

$$\varepsilon_{a_1,\cdots,a_k,\cdots,a_N}\psi^{[a_{k+1},\cdots,a_N]}\phi^{[a_1,\cdots,a_k]} \tag{11.9}$$

也是 SU($N$)群下的不变量。因此可取

$$\frac{1}{\sqrt{(n-k)!}}\varepsilon_{a_1,\cdots,a_N}\psi^{[a_{k+1},\cdots,a_N]} = \psi_{[a_1,\cdots,a_k]} \tag{11.10}$$

即表示 $\psi^{[a_{k+1},\cdots,a_N]}$等价于 $\psi_{[a_1,\cdots,a_k]}$的复共轭表示。一般来说,两个表示互为复共轭当且仅当它们的 Young 图合起来能拼成一个每一列都有 $N$ 个方块的图形。两个互为复共轭的表示显然有相同的维数。

两个不可约张量表示 $R_1$ 和 $R_2$ 的直积 $R_1 \times R_2$ 是可约的,它可以按两个置换群表示的外积的分解方法分解为一些不可约表示[18]。这些不可约表示的内容可以用 Young 图按如下的规则得到。设 $R_1$ 和 $R_2$ 的 Young 图为 $Y_1$ 和 $Y_2$。如果 $Y_2$ 只有一行,则把 $Y_2$ 所有的方块按各种可能的方式加到 $Y_1$ 上,但要求新的

Young 图满足 $\lambda_i \geqslant \lambda_{i+1}$，$r \leqslant N$，且这些方块中任何两个不能在新 Young 图的同一列上。同样地，如果 $Y_2$ 只有一列，则把 $Y_2$ 的方块按各种可能的方式加到 $Y_1$ 上构成容许的 Young 图，这些方块中任何两个不能在新 Young 图的同一行上。与这样得到的新 Young 图对应的表示就是 $R_1 \times R_2$ 中所包含的不可约表示。例如，对 SU(5)群的表示我们有图 11.3 中的分解公式。对一般情况可以用分配律求得表示分解的内容。例如，对表示$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N)=(2,1,0,\cdots)$可以用公式$(2,1,0\cdots)=(1,1,0,\cdots)\times(1,0,\cdots)-(1,1,1,0,\cdots)$。由此得到

$$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N)\times(2,1,0,\cdots)=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N)$$
$$\times[(1,1,0,\cdots)\times(1,0,\cdots)-(1,1,1,0,\cdots)]$$

上式右方的表示可以用前面叙述的 $Y_2$ 只有一列时的规则得到。

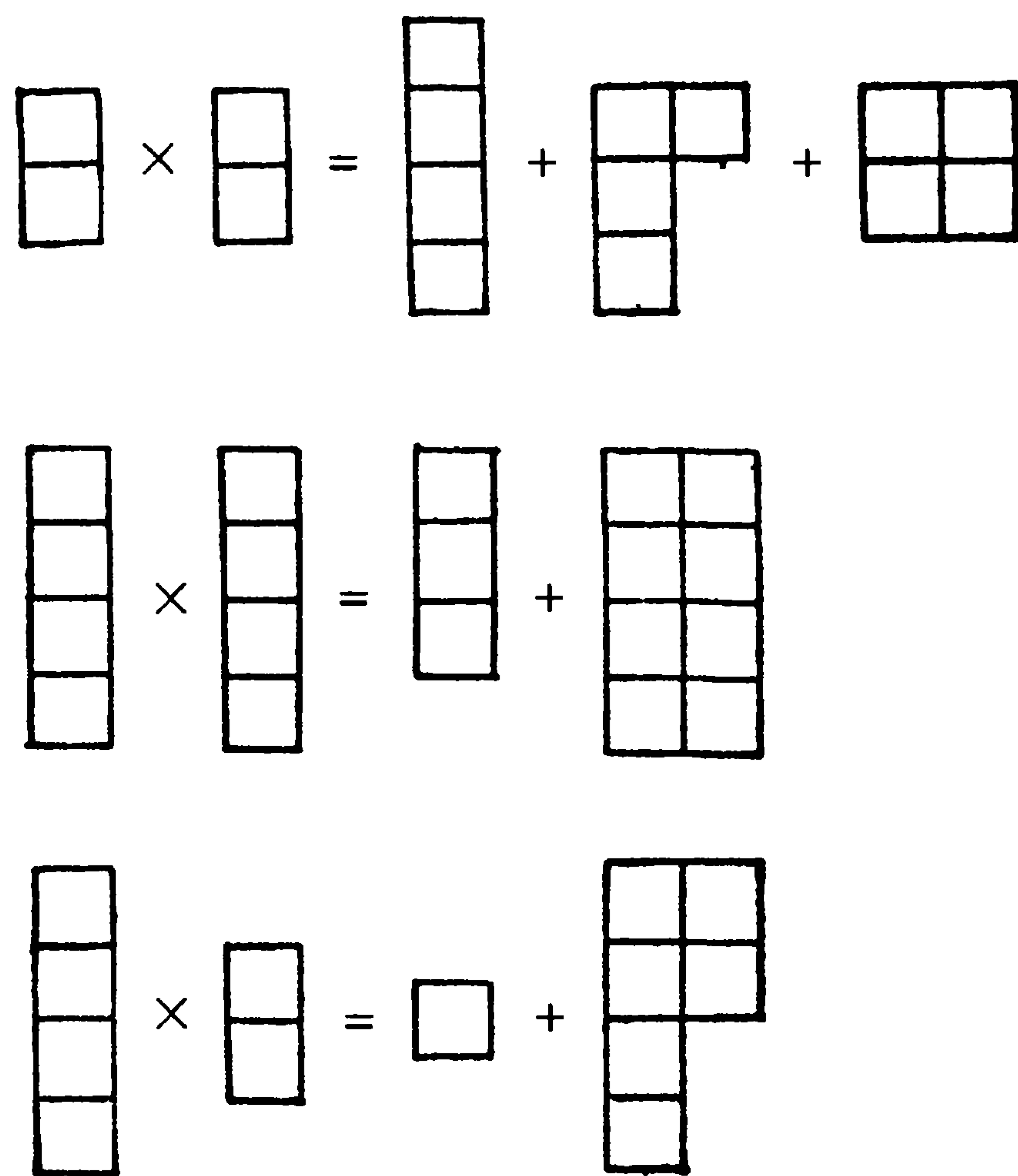


图 11.3

## 11.3 SU(5)模型的粒子内容和拉氏量

以 SU(5)为规范群的模型[1]是能够满足大统一理论基本要求的具有最小对称群的模型。它比其他模型都简单，但是大统一理论的基本物理特点、它们能解决的问题和存在的困难大部分在这个模型中都有反映。因此我们将较为详细地介绍这个模型。

作为大统一理论的规范群，SU(5)包含标准模型的 $G_s$ 群为其子群。把 $G_s$ 嵌入 SU(5)的最简单的方式是把 SU(5)群的基础表示 $\psi^a$ $(a=1,2,\cdots,5)$的前三个分

量之间的 SU(3)变换子群与 $SU(3)_C$ 变换等同,后两个分量之间的 SU(2)变换子群与 $SU(2)_L$ 等同。如果用式(11.2)中的矩阵 $T_a^b$ 为 SU(5)群的生成元,则子群 $SU(3)_C$ 的生成元为

$$T_\alpha^\beta - \frac{1}{3}\delta_\alpha^\beta T_\gamma^\gamma, \qquad \alpha,\beta,\gamma = 1,2,3 \tag{11.11}$$

$SU(2)_L$ 的生成元为

$$T_l^m - \frac{1}{2}\delta_l^m T_n^n, \qquad l,m,n = 4,5 \tag{11.11$'$}$$

SU(5)群的李代数有 4 个独立的对角矩阵,而 SU(3)×SU(2)的李代数一共只有 3 个独立的对角矩阵。SU(5)群李代数多出的一个对角矩阵可以产生一个 U(1)。为了确定这个 U(1)与标准模型中 $U(1)_Y$ 的关系,我们需要首先知道标准模型中的夸克和轻子如何填入 SU(5)群的表示。

第一代夸克和轻子包含三种颜色的左手 $u$ 夸克和 $d$ 夸克 $u_L^i, d_L^i (i=1,2,3)$,一个左手的电子 $e_L$,同样数目的右手 Fermi 子 $u_R^i, d_R^i, e_R^i$ 以及一个左手的中微子 $\nu_e$,一共是 15 个 Fermi 子手征态。SU(5)群的二阶反对称张量 $\psi^{[a,b]}$ 共有 $\frac{1}{2}\times5\times4=10$ 个独立分量,把这个表示记作 $\underline{10}$。表示 $\psi^a$ 和 $\psi^{[a,b]}$ 的维数之和恰好等于一代轻子和夸克的数目。以 $\psi^c$ 代表 $\psi$ 场的电荷共轭

$$\psi_L^c = C(\bar{\psi}_R), \quad \psi_R^c = C(\bar{\psi}_L)$$

其中,$C$ 为电荷共轭矩阵,我们可以在理论的表述中用左手场 $\psi_L^c$ 代替右手场 $\psi_R$,$\psi_L^c$ 所属的表示与 $\psi_R$ 所属的表示互为复共轭。这样,一代轻子和夸克可以按如下的方式填入基础表示的复共轭表示 $\underline{5}^*$ 与表示 $\underline{10}$ 的直和。

$$\underline{5}^*: \qquad \psi_{La} = \begin{bmatrix} d_1^c \\ d_2^c \\ d_3^c \\ e^- \\ -\nu_e \end{bmatrix}_L \tag{11.12}$$

$$\underline{10}: \qquad \psi_L^{[a,b]} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & u_3^c & -u_2^c & -u^1 & -d^1 \\ -u_3^c & 0 & u_1^c & -u^2 & -d^2 \\ u_2^c & -u_1^c & 0 & -u^3 & -d^3 \\ u^1 & u^2 & u^3 & 0 & -e^+ \\ d^1 & d^2 & d^3 & e^+ & 0 \end{bmatrix}_L \tag{11.13}$$

对第二代和第三代轻子和夸克也可以同样填充。注意,在 SU(5)模型中不需要引入标准模型中没有的 Fermi 子。在子群 $SU(3)_C \times SU(2)_L$ 下,$\underline{5}^*$ 分解为

$$\underline{5}^* = (\underline{3}^*, \underline{1}) + (\underline{1}, \underline{2}^*) \tag{11.14}$$

由式(11.10)知,在 SU(2)群下,$\varepsilon_{lm}\psi^m = \psi_l$,因此式(11.12)意味着

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}_L \quad \text{及} \quad \begin{bmatrix} \nu_e \\ e^- \end{bmatrix}_L$$

分别是 $SU(3)_C$ 的$\underline{3}$ 表示和 $SU(2)_L$ 的$\underline{2}$ 表示。由于在 $SU(3)_C \times SU(2)_L$ 下$\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\psi^{[\beta,\gamma]} = \psi_\alpha$ 属于$(\underline{3}^*, \underline{1})$表示,$\psi^{[\alpha,l]}(l=4,5)$属于$(\underline{3}, \underline{2})$表示,而 $\varepsilon_{lm}\psi^{[l,m]}(l, m=4, 5)$为不变量,因此表示$\underline{10}$ 在 $SU(3)_C \times SU(2)_L$ 下的分解为

$$\underline{10} = (\underline{3}^*, \underline{1}) + (\underline{3}, \underline{2}) + \underline{1} \tag{11.15}$$

这意味着 $u_\alpha^c$ 属于表示$(\underline{3}^*, \underline{1})$

$$\begin{bmatrix} u^1 & d^1 \\ u^2 & d^2 \\ u^3 & d^3 \end{bmatrix}$$

属于表示$(\underline{3}, \underline{2})$而 $e_L^+ = C\,\overline{e_R^-}$ 为 $SU(3)_C \times SU(2)_L$ 单态。因此式(11.12)和(11.13)的填充给出一代轻子和夸克在 $SU(3)_C \times SU(2)_L$ 下正确的变换性质。

由式(11.12)取复共轭及式(11.3)知道在基础表示中电荷矩阵为

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & & & & \\ & -\frac{1}{3} & & & \\ & & -\frac{1}{3} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}T_\alpha^\alpha + T_4^4 \tag{11.16}$$

超荷矩阵为$\frac{1}{2}Y = Q - T_3^L$,由式(11.16)得

$$\frac{1}{2}Y=-\frac{1}{3}T_{\alpha}^{\alpha}+\frac{1}{2}T_{l}^{l}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&&&&\\&-\frac{1}{3}&&&\\&&-\frac{1}{3}&&\\&&&\frac{1}{2}&\\&&&&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\tag{11.17}$$

由式(11.17)知道,二阶逆变张量 $\psi^{ab}$ 的电荷和超荷值分别是 $q_a+q_b$ 和 $y_a+y_b$,其中 $q_a$ 和 $y_a$ 分别是电荷和超荷在表示$\underline{5}$ 中的本征值。由此容易验证,式(11.16)和(11.17)也正确地给出了表示$\underline{10}$ 中轻子和夸克的电荷和超荷值。式(11.17)确定了 SU(5)群包含的 $\mathrm{U}(1)_Y$ 子群。由于在 SU(5)模型中电荷是非 Abel 单群的生成元,所以它是量子化的。由式(11.16)给出正电子和 $d$ 夸克的电荷比为 $-3$。

SU(5)群的规范场可以写成矩阵形式

$$A_{\mu}=\sum_{i=1}^{24}A_{\mu}^{i}T_{i}=\sum_{a,b}A_{\mu b}^{a}T_{a}^{b}\tag{11.18}$$

利用式(11.11)和(11.17)可将式(11.18)写为

$$\begin{aligned}A_{\mu}=&\sum_{\alpha,\beta}A_{\mu\beta}^{\alpha}T_{\alpha}^{\beta}+\sum_{l,m}A_{\mu m}^{l}T_{l}^{m}+\sum_{\alpha,l}(A_{\mu l}^{\alpha}T_{\alpha}^{l}+A_{\mu\alpha}^{l}T_{l}^{\alpha})\\=&\sum_{\alpha,\beta}A_{\mu\beta}^{\alpha}\left(T_{\alpha}^{\beta}-\frac{1}{3}\delta_{\alpha}^{\beta}\sum_{\gamma}T_{\gamma}^{\gamma}\right)+\sum_{l,m}A_{\mu m}^{l}\left(T_{l}^{m}-\frac{1}{2}\delta_{l}^{m}\sum_{n}T_{n}^{n}\right)\\&+\left(-\sum_{\alpha}A_{\mu\alpha}^{\alpha}+\sum_{l}A_{\mu l}^{l}\right)\frac{1}{2}Y+\sum_{\alpha,l}(A_{\mu l}^{\alpha}T_{\alpha}^{l}+A_{\mu\alpha}^{l}T_{l}^{\alpha})\end{aligned}\tag{11.19}$$

为了使规范场动能项有标准的形式,我们需要由式(11.2)中的 24 个矩阵的线性组合构造一组厄米矩阵 $T_i$,作为 SU(5)群李代数(按照前面的约定,即它们在基础表示中的矩阵)的新基。场强 $F_{\mu\nu}=F_{\mu\nu}^{i}T_{i}$。拉氏量中规范场的动能项正比于规范不变的量 $\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu})$,它的标准形式是 $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{i}F_{\mu\nu}^{i}$。因此我们引入 $T_i$ 的归一化条件

$$\mathrm{Tr}(T_iT_j)=\frac{1}{2}\delta_{ij}\tag{11.20}$$

为此引入

$$T_Y=\sqrt{\frac{3}{5}}\,\frac{1}{2}Y$$

$$T_3=\frac{\lambda_3}{2}=\frac{1}{2}(T_1^1-T_2^2),\qquad T_8=\frac{\lambda_8}{2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}(T_1^1+T_2^2-2T_3^3)$$

$$T_3^{\mathrm{L}}=\frac{1}{2}\tau_3=\frac{1}{2}(T_4^4-T_5^5)\tag{11.21}$$

相应地对 $\mathrm{SU}(3)_C\times\mathrm{SU}(2)_L$ 子群的非对角生成元改用

$$T_1^{\mathrm{L}}=\frac{1}{2}\tau_1=\frac{1}{2}(T_4^5+T_5^4),\qquad T_2^{\mathrm{L}}=\frac{1}{2}\tau_2=-\frac{\mathrm{i}}{2}(T_4^5-T_5^4)$$

$$T_i=\frac{1}{2}\lambda_i=\frac{1}{2}(T_\alpha^\beta+T_\beta^\alpha)\text{ 及 }-\frac{\mathrm{i}}{2}(T_\alpha^\beta-T_\beta^\alpha)$$

$$i=1,2,4,5,6,7;\qquad \alpha\neq\beta,\qquad \alpha,\beta=1,2,3\tag{11.22}$$

式(11.21)和(11.22)中的生成元都满足式(11.20),而

$$\mathrm{Tr}(T_l^\alpha T_\alpha^l)=1\tag{11.23}$$

式(11.21)和(11.22)是子群 $\mathrm{SU(2)_L\times SU(3)}_C$ 生成元的标准形式。U(1)的生成元 $T_Y$ 与超荷$\frac{1}{2}Y$差一个系数$\sqrt{\frac{3}{5}}$,这是归一化式(11.20)的结果,没有这个系数动能项不正确。式(11.19)可写为

$$\frac{1}{\sqrt{2}}A_\mu=\sum_{i=1}^{8}G_\mu^iT_i+\sum_{j=1}^{3}W_\mu^jT_j^{\mathrm{L}}+B_\mu T_Y$$
$$+(X_{\mu\alpha}T_4^\alpha+Y_{\mu\alpha}T_5^\alpha+\mathrm{h.c.})\tag{11.24}$$

其中

$$B=\sqrt{\frac{5}{6}}\Big(-\sum_\alpha A_\alpha^\alpha+\sum_l A_l^l\Big),\qquad W^3=\frac{1}{\sqrt{2}}(A_4^4-A_5^5)$$

$$G^3=\frac{1}{\sqrt{2}}(A_1^1-A_2^2),\qquad G^8=\frac{1}{\sqrt{6}}(A_1^1+A_2^2-2A_3^3)$$

$$X_\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}A_\alpha^4,\qquad Y_\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}A_\alpha^5\tag{11.25}$$

除生成元 $T_Y$ 比$\frac{1}{2}Y$差一个系数$\sqrt{\frac{3}{5}}$外,式(11.24)的前三项正是以前写出的 $\mathrm{SU}(3)_C\times\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}\times\mathrm{U}(1)_Y$ 规范场的标准形式,$G_\mu^i$, $W_\mu^j$ 和 $B_\mu$ 分别是 $\mathrm{SU}(3)_C$, $\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}$和 $\mathrm{U}(1)_Y$ 规范场。式(11.24)其余的项中包含 $X_\alpha$, $Y_\alpha$, $X^{\dagger\alpha}$, $Y^{\dagger\alpha}$ 12 个新规范场。由于规范场在整体 SU(5)变换下按伴随表示变换

$$A\rightarrow UAU^{-1}=\exp\{-\mathrm{i}\alpha^iT_i\}A\exp\{\mathrm{i}\alpha^iT_i\}\tag{11.26}$$

其中,$T_i$ 为生成元在基础表示中的矩阵。不难证明,在整体 $\mathrm{SU}(3)_C\times\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}\times$

$U(1)_Y$下规范势$G, W, B, X$和$Y$的变换性质为

$$G = (\underline{8},\underline{1},0),\qquad W = (\underline{1},\underline{3},0),\qquad B = (\underline{1},\underline{1},0)$$

$$\begin{bmatrix} X_\alpha \\ Y_\alpha \end{bmatrix} = \left(\underline{3}^*, \underline{2}, \frac{5}{3}\right),\qquad \begin{bmatrix} X_\alpha^\dagger \\ Y_\alpha^\dagger \end{bmatrix} = \left(\underline{3}, \underline{2}^*, -\frac{5}{3}\right) \tag{11.27}$$

在式(11.26)和(11.27)中每个括号内第三个数是$Y$量子数。由式(11.26)知道，伴随表示$A_b^a$的$Y$量子数是$y_a - y_b$。由式(11.24)、(11.20)和(11.22)得到SU(5)规范不变的规范场动能项

$$\mathscr{L}_A = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}) = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^i G_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^j W_{\mu\nu}^j$$

$$-\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B_{\mu\nu} - \frac{1}{2}X_{\mu\nu}^{\dagger\alpha}X_{\alpha\mu\nu} - \frac{1}{2}Y_{\mu\nu}^{\dagger\alpha}Y_{\alpha\mu\nu} \tag{11.28}$$

其中，$F_{\mu\nu}, G_{\mu\nu}, W_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, X_{\mu\nu}$和$Y_{\mu\nu}$分别是规范势$A_\mu, G_\mu, W_\mu, B_\mu, X_\mu$和$Y_\mu$的场强。如前面已提到的，式(11.28)有动能项的标准形式，$X$和$Y$项系数的差别是由于它们是复场。

现在我们来写出拉氏量中Fermi子的规范不变的动能项。由式(11.12)知道右手场

$$\psi_R^{c\alpha} \equiv C\bar{\psi}_{La} = \begin{bmatrix} d^1 \\ d^2 \\ d^3 \\ e^+ \\ -\bar{\nu}_e \end{bmatrix}_R \tag{11.29}$$

属于基础表示$\underline{5}$。它的协变微商取为

$$D_\mu \psi_R^c = \left(\partial_\mu - \mathrm{i}\frac{g_5}{\sqrt{2}}A_\mu\right)\psi_R^c \tag{11.30}$$

其中，$A_\mu$由式(11.24)表示。属于二阶反对称张量表示的$\psi^{[a,b]}$的协变微商为

$$D_\mu \psi^{[a,b]} = \partial_\mu \psi^{[a,b]} - \mathrm{i}\frac{g_5}{\sqrt{2}}(A_{\mu a'}^a \psi^{[a',b]} + A_{\mu b'}^b \psi^{[a,b']}) \tag{11.31}$$

因此在SU(5)模型中规范不变的Fermi子动能项为

$$\mathscr{L}_\psi = -\bar{\psi}_R^c \gamma_\mu D_\mu \psi_R^c - \bar{\psi}_{L[a,b]}\gamma_\mu (D_\mu \psi_L)^{[a,b]}$$

$$= -\bar{\psi}_R^c \gamma_\mu \left(\partial_\mu - \mathrm{i}\frac{g_5}{\sqrt{2}}A_\mu\right)\psi_R^c - \bar{\psi}_{L[a,b]}\gamma_\mu$$

$$\times \left(\partial_\mu - \mathrm{i}\frac{2g_5}{\sqrt{2}}A_{\mu a'}^a\right)\psi_L^{[a',b]} \tag{11.32}$$

注意,式(11.32)中不含 Fermi 子的质量项。其原因在于,Fermi 子质量项是两个左手场或两个右手场的乘积,按照 11.2 节中叙述的 Young 图方法,表示的直积$\underline{5}^*\times\underline{10}$,$\underline{5}^*\times\underline{5}^*$ 和$\underline{10}\times\underline{10}$ 都不包含 SU(5)群的不变量(参看图 11.3 中的分解公式),因此没有 SU(5)不变的质量项。利用式(11.24)以及

$$\psi_{\mathrm{L}}^{[\alpha,\beta]}=\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}u_{\mathrm{L}\gamma}^{c}$$

和恒等式

$$\bar{\chi}_{\mathrm{R}}^{c}\gamma_{\mu}\psi_{\mathrm{R}}^{c}=-\bar{\psi}_{\mathrm{L}}\gamma_{\mu}\chi_{\mathrm{L}}\tag{11.33}$$

可将式(11.32)中 Fermi 场与规范场的相互作用项写为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\psi A}&=g_5 i\left(\bar{u}\not{G}^{i}\ \frac{\lambda_i}{2}u+\bar{d}\not{G}^{i}\ \frac{\lambda^i}{2}d\right)\\&\quad+g_5 i\left([\bar{u},\bar{d}]_{\mathrm{L}}\not{W}^{i}\frac{\tau^i}{2}\begin{bmatrix}u\\d\end{bmatrix}_{\mathrm{L}}+[\bar{\nu}_e,\bar{e}^-]\not{W}^{i}\frac{\tau_i}{2}\begin{bmatrix}\nu_e\\e^-\end{bmatrix}_{\mathrm{L}}\right)\\&\quad+\sqrt{\frac{3}{5}}g_5\mathrm{i}\Big[-\frac{1}{2}(\bar{\nu}_{\mathrm{L}}\not{B}\ \nu_{\mathrm{L}}+\bar{e}_{\mathrm{L}}\not{B}\ e_{\mathrm{L}})+\frac{1}{6}(\bar{u}_{\mathrm{L}}\not{B}\ u_{\mathrm{L}}+\bar{d}_{\mathrm{L}}\not{B}\ d_{\mathrm{L}})\\&\quad+\frac{2}{3}\bar{u}_{\mathrm{R}}\not{B}\ u_{\mathrm{R}}-\frac{1}{3}\bar{d}_{\mathrm{R}}\not{B}\ d_{\mathrm{R}}-\bar{e}_{\mathrm{R}}\not{B}\ e_{\mathrm{R}}\Big]\\&\quad+\Big\{\frac{g_5}{\sqrt{2}}\mathrm{i}[\bar{X}_{\mu}^{\alpha}(\bar{d}_{\mathrm{R}\alpha}\gamma_{\mu}e_{\mathrm{R}}^{+}+\bar{d}_{\mathrm{L}\alpha}\gamma_{\mu}e_{\mathrm{L}}^{+}+\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}_{\mathrm{L}}^{c\gamma}\gamma_{\mu}u_{\mathrm{L}}^{\beta})\\&\quad+\bar{Y}_{\mu}^{\alpha}(-\bar{d}_{\mathrm{R}\alpha}\gamma_{\mu}\nu_{\mathrm{R}}-\bar{u}_{\mathrm{L}\alpha}\gamma_{\mu}e_{\mathrm{L}}^{+}+\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}_{\mathrm{L}}^{c\gamma}\gamma_{\mu}d_{\mathrm{L}}^{\beta})]+\mathrm{h.c.}\Big\}\end{aligned}\tag{11.34}$$

对第二、第三代 Fermi 子,也可以写出同样的规范作用项。式(11.34)右方前三项分别为 $\mathrm{SU(3)}_C$,$\mathrm{SU(2)}_{\mathrm{L}}$ 和 $\mathrm{U(1)}_Y$ 规范场与 Fermi 场的作用。只要我们在 SU(5)对称破缺可以忽略的能标处取 $\mathrm{SU(3)}_C$ 和 $\mathrm{SU(2)}_{\mathrm{L}}$ 规范耦合常数 $g_s$ 和 $g$ 等于 SU(5)规范耦合常数 $g_5$,同时取 $\mathrm{U(1)}_Y$ 耦合常数 $g'=\sqrt{\frac{3}{5}}g_5$,则式(11.34)右方前三项与标准模型完全一样。式(11.34)中最后两项代表新的规范作用,它们包含夸克与规范场 $X$,$Y$ 耦合而变成轻子或反夸克的过程。这是重子数和轻子数不守恒的过程。它们可以导致质子衰变。这是大统一模型最有趣的结果之一。为了不与未观察到质子衰变的实验矛盾,$X$ 和 $Y$ 必须有大的质量。我们将在 11.5 节中详细讨论这个问题。

SU(5)对称性必须在一个比 $m_W$ 大得多的能标下破缺到它的一个子群 $H$。这一步可以通过属于 SU(5)群伴随表示的 Higgs 场 $\phi=\phi_a^b T_b^a$ 来实现。$\phi_a^b$ 与 SU(5)规范场 $A_a^b$ 数目相同且有相同的 SU(5)量子数。如果 $\phi$ 的真空平均值$\langle\phi_a^b\rangle_0$ 不等

于零,且$\langle\phi\rangle_0$的最大不变群是$H$。按照对称性自发破缺的一般理论,在没有规范场时与陪集$G/H$的生成元对应的$\phi$场分量是零质量Goldstone场。在考虑规范作用后,通过Higgs机制这些Goldstone场与规范场结合成为有质量的矢量场,使得在陪集$G/H$上的规范场得到质量,而规范群破缺到它的子群$H$。群$G$的一个伴随表示的Higgs多重态恰好提供了所需要的Goldstone粒子态。设$H=G_s$,则在这一步得到质量的是$X_\alpha$,$Y_\alpha$,$X^{\dagger\alpha}$和$Y^{\dagger\alpha}$12个规范场。可以用规范粒子$X$的质量$m_X$代表SU(5)对称破缺的能标。

在能标$m_X$以下,当$G_s$对称性还没有破缺时,$G_s$规范场以及夸克和轻子仍旧没有质量。为保持标准模型对低能现象的预言,$G_s$对称性必须在能标$m_W$下破缺。这可以通过属于SU(5)群基础表示$\underline{5}$的复Higgs场$H^a$来实现。在子群$SU(3)_C\times SU(2)_L\times U(1)_Y$下表示$\underline{5}$分解为

$$\underline{5}=\left(\underline{3},\underline{1},-\frac{2}{3}\right)+(\underline{1},\underline{2},1)$$

相应的$H$五重态的分解为

$$(H^a)=(h^\alpha,\varphi^i),\qquad \alpha=1,2,3;\qquad i=1,2$$
$$h^\alpha=H^\alpha,\qquad \varphi^i=H^{i+3} \tag{11.35}$$

因此$H^a$五重态包含一个与标准模型中的Higgs场有相同量子数的Higgs二重态。如果$\langle\varphi^i\rangle_0\neq0$,它能够像通常标准模型中一样使$G_s$破缺到$SU(3)_C\times U(1)_{em}$。

Higgs粒子可以和Fermi子有汤川耦合。由SU(5)模型中的Fermi场可以组成如下一些Lorentz不变量

$$\psi_{aL}C\psi_{bL},\qquad \psi_{aL}C\psi_L^{[b,c]},\qquad \psi_L^{[a,b]}C\psi_L^{[c,d]} \tag{11.36}$$

它们和它们的厄米共轭与Higgs场的乘积组成汤川耦合项。这些Lorentz不变量在SU(5)变换下的性质可以由11.2节图11.3中的SU(5)群表示直积的分解公式得到。这些公式可以写为

$$\underline{5}^*\times\underline{5}^*=\underline{10}+\underline{15}$$
$$\underline{5}^*\times\underline{10}=\underline{5}+\underline{45}$$
$$\underline{10}\times\underline{10}=\underline{5}^*+\underline{45}^*+\underline{50} \tag{11.37}$$

由于式(11.37)中分解出来的表示不含实表示$\underline{24}$,Higgs场$\phi_a^b$不能与Fermi场组成SU(5)不变的汤川耦合项。但是式(11.37)中分解出$\underline{5}$和$\underline{5}^*$表示,因此$H^a$场可与Fermi场组成如下的SU(5)不变的汤川耦合项

$$\mathscr{L}_Y=f_{lm}\psi_{aL}^{(l)}C\psi_L^{[a,b]}H_b+f'_{lm}\epsilon_{abcde}\psi_L^{(l)[a,b]}C\psi_L^{(m)[c,d]}H^e+\text{h.c.} \tag{11.38}$$

上式中,$l$,$m$标志不同代的Fermi子。这些耦合可以使夸克和轻子得到质量并产生各代夸克的混合和CP破坏。与标准模型不同的是,这里还有一个物理的

$SU(3)_C$三重态 Higgs 粒子 $h^a$,它与 Fermi 子的汤川耦合也能产生夸克衰变为轻子的过程,因而导致质子衰变。为了不与实验矛盾 $h^a$ 也必须有大的质量。

与标准模型相似,由于三代夸克混合,因此式(11.34)中的夸克场不是质量本征态。

要使这里叙述的理论可重整,SU(5)规范对称的反常必须消去。由于这个模型中 Fermi 子所属的表示不是实表示,反常会不会消去不是显然的,需要进行具体计算。反常项的系数正比于

$$\mathrm{Tr}(\{T_i(\psi), T_j(\psi)\} T_k(\psi)) = d_{ijk} T(\psi) \tag{11.39}$$

其中,$T_i(\psi)$为生成元在所有 Fermi 子组成的表示中的矩阵,$\{T_i(\psi), T_j(\psi)\} = d_{ijk}T_k(\psi)$,$T(\psi)$与 $i,j,k$ 无关。只要选择 SU(5)的任意三个使 $d_{ijk} \neq 0$ 的生成元计算式(11.39)的左方就可以定出 $T(\psi)$。如果选 $T_i = T_j = T_k = Q$,由

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(Q^3(\psi)) &= \mathrm{Tr}(Q^3(\psi_a)) + \mathrm{Tr}(Q^3(\psi^{[a,b]})) \\ &= \left[3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3 + (-1)^3 + 0\right] + \left[3\times\left(-\frac{2}{3}\right)^3\right. \\ &\quad \left. + 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 1^3\right] = 0\end{aligned}$$

知道,在 SU(5)模型中,反常确实是消去了。

## 11.4 SU(5)模型中大统一能标的确定

根据 11.3 节的结果,在 SU(5)模型中在能标 $m_X$ 以上只有一个统一的有效耦合常数 $g_5(\mu^2)$,子群 $SU(3)_C$,$SU(2)_L$ 和 $U(1)_Y$ 的有效耦合常数相等

$$g_3(\mu^2) = g_2(\mu^2) = g_1(\mu^2) = g_5(\mu^2), \qquad \mu^2 \gg m_X^2 \tag{11.40}$$

在能标 $m_X$ 以下,SU(5)对称性的约束已破坏了,但是还有 $G_s$ 对称性的约束。因此在 $m_W \ll \mu \ll m_X$ 时有效耦合常数 $g_3(\mu^2)$,$g_2(\mu^2)$和 $g_1(\mu^2)$独立地分别按 $SU(3)_C$,$SU(2)_L$ 和 $U(1)_Y$ 规范理论的 $\beta$ 函数演变[6]。它们与标准模型中定义的耦合常数的关系是

$$g_3(\mu^2) = g_s(\mu^2), \qquad g_2(\mu^2) = g(\mu^2)$$

$$\sqrt{\frac{3}{5}}g_1(\mu^2) = g'(\mu^2) \tag{11.41}$$

在能标 $m_W$ 以下,$G_s$ 对称性的约束消失,只留下 $SU(3)_C \times U(1)_{em}$对称性。这时只有两个按规范理论 $\beta$ 函数独立演变的耦合常数 $g_3(\mu^2)$和 $e(\mu^2)$,而弱作用的有效耦合常数的演变不再受 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 对称性的限制。因此我们可以根据低

能下的有效耦合常数值定出 $m_X$，并检验，三条曲线 $g_i(\mu^2)$，$i=1,2,3$，是否交于一点。

由式(11.41)和(11.40)得到，当 $\mu^2 \gtrsim m_X^2$ 时

$$\sin^2\theta_W = \frac{g'^2}{g'^2+g^2} = \frac{\frac{3}{5}g_1^2}{\frac{3}{5}g_1^2+g_2^2} = \frac{3}{8} \tag{11.42}$$

$$\frac{\alpha}{\alpha_s} = \frac{e^2}{g_s^2} = \frac{g_2^2\sin^2\theta_W}{g_3^2} = \frac{3}{8} \tag{11.43}$$

$\sin^2\theta_W$ 值也可以按以下方法得到。设 $T_3^L(R)$ 及 $Q(R)$ 为在表示 $R$ 中的同位旋及电荷矩阵，$\hat{T}_3^L(R)$ 及 $\hat{Q}(R)$ 为正比于 $T_3^L(R)$ 及 $Q(R)$ 而且满足 $\mathrm{Tr}(\hat{T}_3^L(R))^2 = \mathrm{Tr}(\hat{Q}(R))^2 = \frac{1}{2}$ 的 SU(5)生成元矩阵表示。由于

$$eQ(R) = g_5\hat{Q}(R)$$

$$gT_3^L(R) = g_5\hat{T}_3^L(R)$$

我们有

$$\sin^2\theta_W = \frac{e^2}{g^2} = \frac{\mathrm{Tr}(T_3^L(R))^2}{\mathrm{Tr}(Q(R))^2} \tag{11.44}$$

其中，Tr 要对 SU(5)的任意表示 $R$ 中的所有粒子求和。由式(11.44)也可以得到式(11.42)。

把 Appelquist-Carazzone 退耦定理用于 SU(5)模型，在 $\mu^2 \ll m_X^2$ 时我们可以忽略 $X$，$Y$ 和重 Higgs 粒子 $h$ 对 $\beta$ 函数的贡献。在阈值 $\mu^2 \sim M_X^2$ 附近情况比较复杂。在重夸克的阈能处也有同样的问题。作为一种比较粗糙的近似，我们对阈效应做如下的简化假设：把 $\beta$ 函数看作在阈值处跳跃的阶梯函数，在 $\mu^2 \leqslant m_X^2$ 处完全忽略重粒子 $X$，$Y$ 和 $h$ 的效应。

在 $\beta$ 函数的单圈近似下，有效耦合常数的流动由下式决定

$$\frac{1}{g_i^2(\mu^2)} - \frac{1}{g_i^2(m_X^2)} = -b_0^{(i)}\ln\frac{\mu^2}{m_X^2}, \qquad i=1,2,3 \tag{11.45}$$

其中，$b_0^{(i)}$ 为三个 $\beta$ 函数展开式的第一项的系数。令

$$\mathrm{Tr}(T_i(R)T_j(R)) = T(R)\delta_{ij}$$

由上述简化假设及第六章式(6.115)和(6.108)得到在 $\mu^2 \leqslant m_X^2$ 处

$$b_0^{(1)} = \frac{1}{24\pi^2}T^{(1)}(\psi)$$

$$b_0^{(2)} = -\frac{1}{8\pi^2}\left[\frac{11}{3} - \frac{1}{3}T^{(2)}(\psi)\right]$$

$$b_0^{(3)} = -\frac{1}{8\pi^2}\left[\frac{11}{2} - \frac{1}{3}T^{(3)}(\psi)\right] \tag{11.46}$$

式(11.46)中没有考虑轻 Higgs 粒子 $\varphi$ 的贡献，$T^{(i)}(\psi)$分别是全部 Fermi 子在 $SU(3)_C$，$SU(2)_L$ 和 $U(1)_Y$ 子群下所属可约表示的 $T$ 值。式(11.46)中 $T^{(i)}(\psi)$ 项的系数与第六章式(6.108)和(6.115)有一个因子$\frac{1}{2}$的差别，这是由于在 SU(5) 群的表示中把左手 Fermi 子和右手 Fermi 子看作两个粒子态。对一代夸克和轻子，$\psi$ 中包含四个 $SU(3)_C$ 基础表示，四个 $SU(2)_L$ 基础表示，按照式(11.20)，$T^{(2)}(\psi)=T^{(3)}(\psi)=\frac{4}{2}$，不难验证 $T^{(1)}(\psi)=2$。因此我们有

$$T^{(i)}(\psi) = 2G \tag{11.47}$$

这里，$G$ 为 Fermi 子代的数目。由式(11.45)～(11.47)得到

$$\frac{\alpha(\mu^2)}{\alpha_s(\mu^2)} = \frac{3}{8}\left(1 - \frac{11}{2\pi}\alpha(\mu^2)\ln\frac{m_X^2}{\mu^2}\right) \tag{11.48}$$

$$\sin^2\theta_W = \frac{3}{8}\left(1 - \frac{55}{18\pi}\alpha(\mu^2)\ln\frac{m_X^2}{\mu^2}\right) \tag{11.49}$$

上两式与 $G$ 无关。由式(11.48)和(11.49)消去 $\ln\frac{m_X^2}{\mu^2}$项得到

$$\sin^2\theta_W = \frac{1}{6} + \frac{5}{9}\frac{\alpha(\mu^2)}{\alpha_s(\mu^2)} \tag{11.50}$$

式(11.50)是三个耦合常数的曲线能会合于一点的自洽性条件。它可以直接与低能数据比较，与实验结果是接近的。这是对大统一理论的一个检验。由低能实验值 $\alpha\simeq\frac{1}{137}$及 $\Lambda_{QCD}\simeq 100\sim 300$MeV，可以由式(11.48)定出 $m_X\simeq(1.2\sim 3.7)\times 10^{16}$GeV。

以上的计算不够精确，可以从几个方面加以改进[5]。①公式(11.48)和(11.49)只能用到 $\mu^2\geqslant m_W^2$ 处。代替 $\alpha=\frac{1}{137}$，应当用量子电动力学的 $\beta$ 函数算出 $\alpha(m_W^2)$，再代入式(11.48)计算 $m_X$。②考虑标准模型中的轻 Higgs 粒子 $\varphi$ 对 $\beta$ 函数的贡献。③考虑 $\beta$ 函数展开式的第二项。④更仔细地考虑 $\mu^2$ 值在 $m_X^2$ 以及重 Fermi 子质量附近的阈行为。在做修正①时要考虑带电强子对光子传播子的修正，它对量子电动力学的 $\beta$ 函数有贡献。在低能区内强作用的影响无法计算，要用低能过程的实验结果。做修正②，③是容易的。修正④则比较复杂。$g_i(\mu^2)$的定义与重整化减除手续有关。在用欧氏动量点 $\mu^2$ 做减除的方案中，质量远大于 $\mu$ 的粒子对 $\beta$ 函数的贡献明显可以忽略。因此在用这种方案时我们可以在 $\mu^2\ll$

$m_X^2$ 时忽略 $X,Y$ 规范粒子和重的 Higgs 粒子 $h$ 的贡献。但是用这种减除方案时重整化群方程与质量的关系复杂,不便于计算,处理阈值附近有效耦合常数的行为很麻烦。如前面已指出的,用最小减除一类的与质量无关的重整化方案时重粒子并不明显退耦。Weinberg 提出的方法是[8]在路径积分中把对重粒子场的积分在单圈近似下积出,得到一个有效拉氏量。如 9.8 节中所述,在 $\mu$ 远小于重粒子质量 $M$ 处可以丢掉有效拉氏量中量纲大于 4 的算符得到一个可重整的场论。在有效场论中耦合常数 $g_i(\mu)$在 $\mu=M$ 处的值是确定的。在整个 $\mu<M$ 的区域用这个可重整的场论的双圈重整化群方程算出 $g_i(\mu)$。同时要求在低能端 $g_i(\mu)$和夸克、轻子质量在单圈图一级与低能实验结果符合。这样,整个计算准确到 NLLO 量级。在这个方案中,由于积掉了重粒子单圈图,$g_i(\mu)$在阈值处不连续,这也包括在阈值 $\mu\simeq m_X$ 下三个 $g_i(\mu)$不完全相等。这种重粒子阈效应在确定的模型中是容易计算的,但它们的大小依赖于 $m\gtrsim m_X$ 的重粒子所属的表示,如果存在比上述最小模型更多的重粒子,结果将有些差别。

各种不同的计算方法得到的 $m_X$ 值比较一致。在只有三代 Fermi 子和表示$\underline{5}$和$\underline{24}$ 的 Higgs 粒子的最小 SU(5)模型中计算结果为

$$m_X = (15 \pm 5) \times 10^{14} \Lambda_{\overline{MS}} \mathrm{GeV} \tag{11.51}$$

其中,$\Lambda_{\overline{MS}}$为由修改的最小减除方案所确定的量子色动力学参数 $\Lambda_{\mathrm{QCD}}$。如取 $\Lambda_{\overline{MS}}=0.1\sim0.2$GeV 则

$$m_X = (1.0 \sim 4.0) \times 10^{14} \mathrm{GeV} \tag{11.52}$$

在同样的 $\Lambda_{\overline{MS}}$值范围内得到

$$\sin^2\theta_W = 0.22 \sim 0.21 \tag{11.53}$$

式(11.53)与实验结果很接近,这可以看作大统一理论的一大成就。

但是,20 世纪 90 年代后期由实验定出了精确的 $\sin\theta_W$ 和 $\alpha_s(m_Z)$值,用它们做重整化群方程的输入,显示三条曲线 $\alpha_i(\mu^2)$, $i=1,2,3$,不能交于一点,其差别超出了重粒子阈效应的范围。这表示理论还需要改进。超对称理论能解决这个问题。所谓超对称是 Bose 子与 Fermi 子之间的对称性,在这种对称性不破缺时两者有相同的质量。在拉氏量中有破坏超对称的项时,两者质量有差别。在超对称的 SU(5)大统一理论中,上述理论中的每一个粒子都有它们的超对称伴子。那些质量比 $m_X$ 小很多的粒子的超对称伴子的质量都设为 1 TeV 左右或更小。由于更多粒子的存在改变了 $\beta$ 函数,使得三条曲线接近交于一点。

## 11.5　质子衰变和正反粒子不对称

拉氏量式(11.34)中的 $d\to e^+ + X^\dagger$, $\nu_e + Y^\dagger$, $u^c + Y$,以及 $u\to e^+ + Y^\dagger$, $u^c +$

$X$ 耦合可以导致质子衰变和(原子核内的)中子衰变。例如,通过图 11.4 中的 Feynman 图及其他一些 Feynman 图可以产生

$$P \to e^+ + \pi^0, \qquad \nu_e^c + \pi^+$$

$$n \to \nu_e^c + \pi^0$$

等过程。规范作用拉氏量式(11.34)保持重子数 $B$ 和轻子数 $L$ 之差 $B-L$ 不变。因此它不会产生如 $n \to e^- + \pi^+, p \to \nu_e + \pi^+$ 这样的过程。如前面已提到的,处于表示$\underline{5}$ 中的 Higgs 粒子 $h$ 也能导致 $B$ 和 $L$ 不守恒的过程。但是式(11.38)也保持 $B-L$ 不变,因此在最小的 SU(5)模型中 $B-L$ 是严格的对称性。

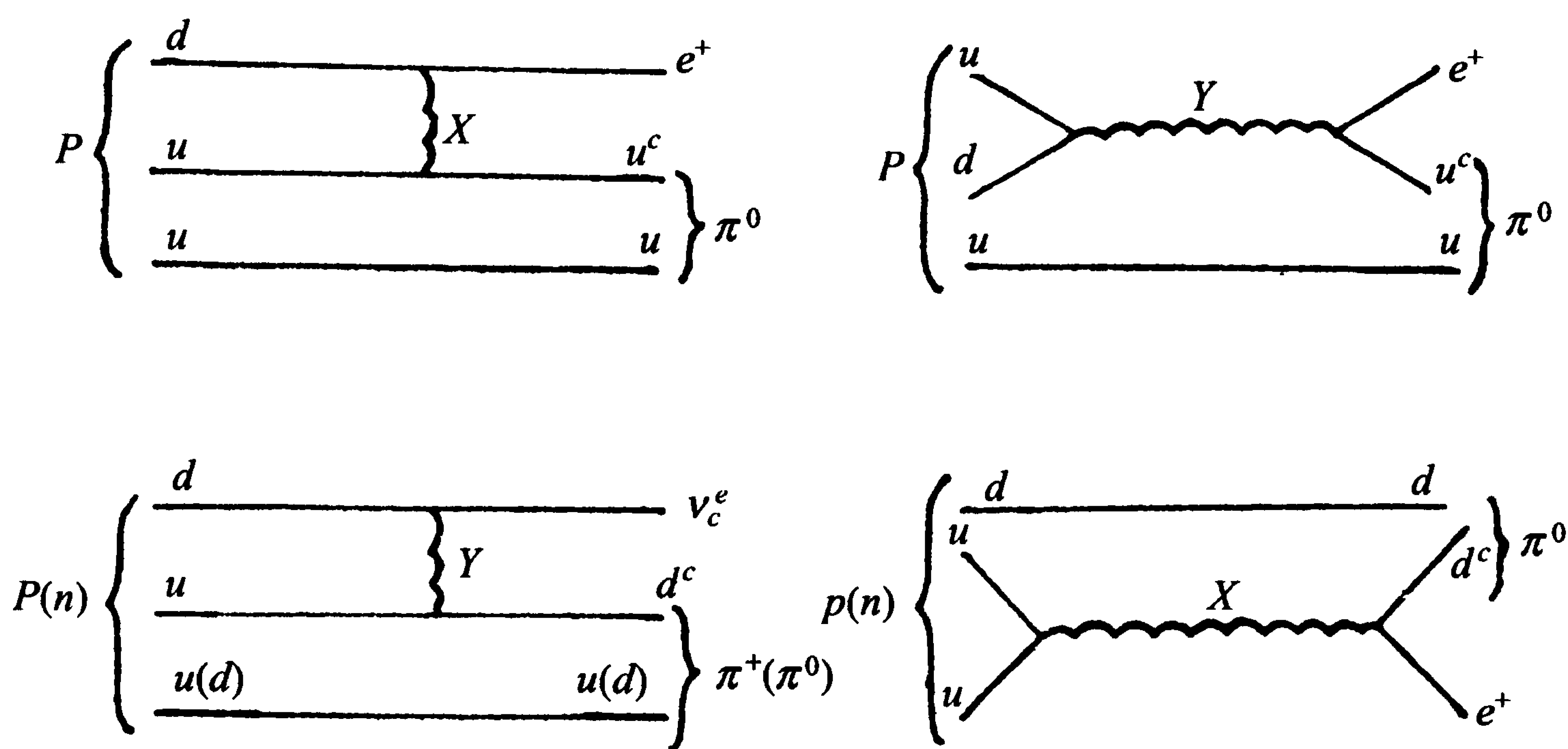



图 11.4

由于质子的质量远小于 $m_X$,导致质子衰变的规范作用可以用 $\Delta B=1$ 的等效 Fermi 作用

$$\frac{g^2}{2m_X^2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon^{lm}(\bar{u}^c_{\gamma L}\gamma_\mu q_{\beta l})(\bar{d}^c_\alpha\gamma_\mu l_m + \bar{e}^+\gamma_\mu q_{\alpha m}) \tag{11.54}$$

代替。等效拉氏量式(11.54)具有 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 不变性。由于等效作用只与 $m_X$ 有关而与 $m_W$ 无关,$G_s$ 对称性的保持是必然的。

SU(5)模型的这些与质子衰变有关的性质具有一定的普遍意义。如果要求保持 $G_s$ 对称性并且只考虑量纲等于 6 的四个夸克和轻子场的乘积,在写出满足这些条件的所有算符乘积后发现,$\Delta B=1$ 的有效作用量必然保持 $B-L$ 不变[9]。量纲更高的算符乘积的系数在分母中必然包含 $m_X$ 的更高幂次,因此它们的效应要小得多。

如果把第二代夸克包括在内,则式(11.54)中的 $\bar{d}$ 由 $\bar{d}$ 和 $\bar{s}$(以及 $\bar{b}$)的线性组合代替,这是与 Cabbibo 转动类似的。因此式(11.54)对奇异数不守恒的过程有 $\Delta S=-\Delta B$ 的选择规则,它可以产生 $p \to e^+ K^0$ 的过程,但是不能产生 $p \to e^+ \bar{K}^0$

的过程。

如同把弱电规范理论的等效 Fermi 作用用于通常的非轻子衰变时需要做 $SU(3)_C$色作用的辐射修正一样，在把式(11.54)用于质子衰变时，需要考虑 $SU(3)_C\times SU(2)_L\times U(1)_Y$ 作用的辐射修正。在 $\mu^2\simeq m_X^2$ 时有效耦合常数 $g_i(\mu^2)$很小，因此式(11.54)对能标 $Q^2\simeq m_X^2$ 的过程是准确的。质子衰变过程发生在 $Q^2\simeq m_N^2\simeq 1\text{GeV}^2$ 处，由于两个能标的巨大差别 $SU(3)_C\times SU(2)_L\times U(1)_Y$ 作用对等效 Fermi 作用常数要产生相当大的重整化。这个效应可以用算符乘积展开和重整化群的方法计算。式(11.54)原来是形式如

$$\frac{g^2}{2m_X^2}J_\mu(x)J_\nu(0)\Delta_{\mu\nu}(x) \tag{11.55}$$

的算符乘积的近似。其中，$\Delta_{\mu\nu}(x)$为 $X$ 或 $Y$ 规范场传播子。由于在 $x\gg\frac{1}{m_X}$处

$$\Delta_{\mu\nu}(x)\sim e^{-m_X|x|}\delta_{\mu\nu}$$

对式(11.55)可以用算符乘积展开式

$$J_\mu(x)J_\mu(0)\underset{x\to 0}{\sim}\sum_i C_i(x^2)O_i \tag{11.56}$$

定域算符 $O_i$ 中对质子衰变有贡献且量纲最小的就是形式如式(11.54)的正规乘积，它的系数 $C_i(x^2)$在微扰论最低阶等于1。对 $Q^2\simeq m_N^2\simeq 1\text{GeV}^2$ 的能标$C_i(x^2)$的傅氏变换可以用第六章的重整化群方程计算。这样得到一个对数的修正因子，其效果是对有效耦合常数做替换

$$\frac{g^2}{m_X^2}\to\frac{g^2}{m_X^2}\left(\ln\frac{m_X^2}{m_N^2}\right)^{-c_0/2b_0} \tag{11.57}$$

其中，$c_0$ 是算符式(11.54)的反常量纲微扰展开式的第一项系数。式(11.57)的对数因子约等于4。

计算质子的衰变概率需要把重整化的等效作用量在质子态与末态之间求矩阵元，这一步没有精确的计算方法。不同的唯象方法得到的矩阵元相差几倍，同时质子寿命 $\tau_P$ 正比于

$$\tau_P\propto\frac{m_X^4}{g_5^4 m_P^5} \tag{11.58}$$

它对 $m_X$ 的值很敏感。由于这两个原因，理论算出的质子寿命有相当大的不确定性。一般认为，在最小的 SU(5)模型中，如果忽略三代夸克的混合结果，有[5]

$$\tau_P = 4.8\times 10^{32\pm1.3}\Lambda_{\overline{MS}}^4\ \text{年} \tag{11.59}$$

上式中，$\Lambda_{\overline{MS}}$是用修改的最小减除方案得到的 $\Lambda_{QCD}$值(以 GeV 为单位)。实验值 $\Lambda_{\overline{MS}}$约为 0.2GeV，质子衰变为 $e^+\pi^0$ 的实验下限是

$$\tau_{P\exp}(e^+\ \pi^0) > 2\times 10^{32}\ \text{年}^{①} \tag{11.60}$$

这意味着对最小的 SU(5)模型，质子寿命理论预言式(11.59)与实验矛盾。超对称理论中 $m_X$ 大一个量级，没有这个矛盾，但也有新的问题。

使质子寿命的理论值变大的可能办法是加入新的轻 Fermi 子或加入属于$\underline{45}$表示的重 Higgs 粒子。另一个办法是假设由 $X,Y$ 规范粒子所传递的作用中 $u$ 夸克和 $t$ 夸克之间有相当大的混合。这自然会使质子衰变概率变小。一般来说，这是可能的，因为在由 $X$ 和 $Y$ 粒子传递的过程中三代夸克的混合矩阵不同于由 $W$ 和 $B$ 粒子传递的过程中的 Kobayashi-Maskawa 矩阵。但是可以证明，在最小的 SU(5)模型中，两个矩阵近似相等。因此为了产生这种混合，也需要引入新的 Higgs 粒子。

在上面的讨论中，还未计及表示$\underline{5}$ 中的 $SU(3)_C$ 三重态 Higgs 粒子 $h^\alpha$ 对质子衰变的贡献。由于 Higgs 粒子与 Fermi 子的耦合常数正比于$\frac{m_f}{\langle\varphi\rangle}$，因此衰变概率正比于

$$\frac{m_f^4}{m_h^4\langle\varphi\rangle^4}\simeq G_F^2 m_f^4\,\frac{1}{m_h^4}$$

由此可以得到，只要 $m_h > 10^{11}\,\text{GeV}$，$h^\alpha$ 的贡献与 $X,Y$ 规范粒子的贡献相比可以忽略。

大统一理论关于重子数不守恒的预言使我们有可能解释在宇宙中重子与反重子数目不相等的事实。我们所在的宇宙区域由重子组成，观察数据表明其中几乎没有反重子。由于不存在把重子和反重子分开的力，宇宙中分成分别由重子和反重子组成的区域的想法不像是正确的。如果基本作用的规律是保持重子数守恒的，没有一种关于宇宙发展的理论模型能说明这种重子与反重子不对称的现象。

在标准的大爆炸宇宙模型[10]中，宇宙在早期处于温度极高、密度极大的状态，它按广义相对论的运动方程不断地膨胀。这种膨胀是绝热的，因而在膨胀的同时宇宙不断冷却。在宇宙的早期它的主要成分是相对论性的粒子。由相对论性的状态方程可以得到宇宙的温度 $T$ 与其尺度 $R$ 成反比，$T\sim\frac{1}{R}$。在宇宙中发生各种基本粒子的过程，各种粒子可以产生和消灭。如果某种粒子参与的过程的反应速率比宇宙膨胀的速率 $H=\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}/R$ 快，则这种粒子处于热平衡中；反之则这种粒子不处于热平衡中。如果所有过程的反应速率都远比 $H$ 小，则这种粒子在宇宙中退耦。各种过程的反应速率除依赖于有关的基本作用强度外还依赖于宇宙的温度，即粒

① 注：1998 年的实验下限为 $1.6\times10^{33}$年。

子的平均能量和密度。在宇宙的极早期各种粒子都存在并处于热平衡中，它们服从 Boltzmann 分布 $\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$。在温度降低以后，反应速率变慢，依作用的弱和强，它们先后脱离平衡并退耦。在某种粒子退耦以后，如果它是不稳定的，它将转化为其他粒子而在宇宙中消失；如果它是稳定的，则将保持其数目不变，而做自由膨胀，最后只剩下光子、电子、中微子和核子这样一些稳定的粒子。

在标准的宇宙模型中，由观测到的 2.7K 微波背景辐射及重子密度 $n_B$ 得到 $kn_B$ 和熵密度 $S$ 的比值为

$$\frac{kn_B}{S} \simeq \frac{1}{7}\frac{n_B}{n_\gamma} \simeq 10^{-10} \tag{11.61}$$

在绝热膨胀中，熵是守恒的。如果重子数是绝对守恒的，在宇宙的初始阶段夸克密度 $n_{q0}$ 和反夸克密度 $n_{q^c0}$ 必须满足

$$k(n_{q0} - n_{q^c0})/S \simeq 10^{-10} \tag{11.62}$$

由相对论性粒子的熵密度和数密度的关系知道，式(11.64)意味着重子和反重子的不对称参数

$$\delta_0 = \frac{n_{q0} - n_{q^c0}}{n_{q0} + n_{q^c0}}$$

是一个很小的数。如果重子数绝对守恒，在标准模型中必须把这个非常小而又不等于零的数值作为一个初始条件放入理论中，这是不令人满意的。

如果存在重子数不守恒的作用，则有可能取 $\delta_0 = 0$ 而从理论上得出现在的 $n_B$ 值。在文献[11]中指出，要做到这一点，基本理论必须满足三个条件：①重子数不守恒。②C 和 CP 不守恒。由于 C 和 CP 运算交换重子和反重子，如果它们绝对守恒，而且 $\delta_0 = 0$，则宇宙的演化不可能产生重子和反重子的不对称。③在宇宙发展的早期必须存在一个阶段，其时破坏 B，C 和 CP 守恒的过程不处于热平衡中。这是因为按照 CPT 定理，重子态和相应的反重子态有相同的能量，如果系统处于热平衡中，按照 Boltzmann 分布它们应有相等的概率。像 SU(5)这样的大统一理论满足这三个条件。在文献[12]中首先研究了大统一理论中重子反重子不对称的问题。在 SU(5)模型中存在 $X$，$Y$ 规范粒子及 $h$ Higgs 粒子，它们与 Fermi 子的耦合能产生同时破坏 C，CP 和 B 的过程。除了由它们传递的 Fermi 子散射外，这还包含它们自己的衰变。

以 $x$ 代表 $X$，$Y$ 或 $h$。我们来说明 $x$ 的衰变确实可以产生不为零的重子数。由式(11.34)和(11.38)知道 $x$ 有两种不同的破坏 C，CP 和 B 的衰变方式 $x \to l^c q^c$ 及 $x \to qq$，其重子数的改变分别为 $\Delta_1 B = -\frac{1}{3}$ 及 $\Delta_2 B = \frac{2}{3}$。令 $x$ 及其反粒子 $x^c$ 的

衰变分宽度分别为

$$\Gamma_1 = \Gamma(x \to l^c q^c), \qquad \Gamma_2 = \Gamma(x \to qq)$$
$$\Gamma_1^c = \Gamma(x^c \to lq), \qquad \Gamma_2^c = \Gamma(x^c \to q^c q^c) \tag{11.63}$$

CPT 定理要求粒子与反粒子的总衰变宽度相等,它给出约束条件

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma_1^c + \Gamma_2^c \tag{11.64}$$

假如只有一种衰变方式,由于开始时 $x$ 和 $x^c$ 的数目相等,它们的衰变不可能产生不等于零的重子数。为得到不等于零的重子数,有两种 $\Delta B$ 不同的衰变方式是必要的。CPT 定理并不要求分宽度 $\Gamma_i = \Gamma_i^c (i=1,2)$。这个等式只在微扰论最低阶成立,在考虑辐射修正后,实际计算证明 $\Gamma_i \neq \Gamma_i^c$。考虑到式(11.64)可得,$x$ 和 $x^c$ 衰变产生的重子数正比于

$$\begin{aligned}&\Delta_1 B \cdot \Gamma_1 + \Delta_2 B \cdot \Gamma_2 - \Delta_1 B \cdot \Gamma_1^c - \Delta_2 B \cdot \Gamma_2^c \\ =&\Delta_1 B \cdot (\Gamma_1 - \Gamma_1^c) + \Delta_2 B \cdot (\Gamma_2 - \Gamma_2^c) \\ =&(\Delta_1 B - \Delta_2 B)(\Gamma_1 - \Gamma_1^c)\end{aligned} \tag{11.65}$$

上式不等于零。

正如上面叙述的第③个条件所指示的,为了使 $x$ 和 $x^c$ 的衰变产生的重子数不被其逆过程抵消,衰变过程必须发生在 $x$ 粒子偏离热平衡时。设 $x$ 粒子的寿命足够长,使得衰变发生时的宇宙温度 $T_D$ 满足

$$kT_D \ll m_X \tag{11.66}$$

这时 $x$ 粒子的密度远超过平衡分布 $\exp\left(-\frac{m_X}{kT}\right)$。因此衰变过程远超过其逆过程,使得宇宙有了不等于零的重子数。在 SU(5)模型中,$h$ 与 Fermi 子的耦合比 $X,Y$ 规范粒子弱。具体的估计表明它比 $X,Y$ 更可能满足条件式(11.66)。

夸克和轻子是质量很小的粒子,在宇宙的早期,它们的密度不会显著地偏离热平衡。因此由 $x$ 传递的它们的两体过程不能产生显著不为零的重子数。但是它们可以部分地“洗”去由 $x$ 衰变所产生的重子-反重子不对称。

$\Gamma_1 - \Gamma_1^c$ 在微扰论高阶下才不为零,须再加上必要的 CP 破坏效应,所以式(11.65)通常是很小的。具体的研究表明,在最小的 SU(5)模型中,要到微扰论第 10 阶才能对重子-反重子不对称产生贡献。因此虽然定性上是对的,要解释观察到的不对称,还需要考虑更复杂的模型。

## 11.6 Higgs 场位势与规范场质量

如在 11.3 节中已经说明的,在 SU(5)模型中要实现

$$\mathrm{SU}(5) \xrightarrow{m_X} \mathrm{SU}(3)_C \times \mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y \xrightarrow{m_W} \mathrm{SU}(3)_C \times \mathrm{U}(1)_{em} \quad (11.67)$$

两步破缺,需要引入属于伴随表示$\underline{24}$ 的 $\phi$ 和属于基础表示$\underline{5}$ 的 $H$ 两种 Higgs 粒子。考虑到伴随表示的变换公式(11.26),满足 SU(5)不变性,$H \rightarrow -H, \phi \rightarrow -\phi$ 离散对称性及可重整性的最普遍的 Higgs 位势为

$$V = V_\phi + V_H + V_{\phi H} \quad (11.68)$$

其中

$$V_\phi = -\mu_\phi^2 \mathrm{Tr}\phi^2 + \lambda_1(\mathrm{Tr}\phi^2)^2 + \lambda_2 \mathrm{Tr}\phi^4 \quad (11.69)$$

$$V_H = -\mu_H^2 H^\dagger H + \lambda(H^\dagger H)^2 \quad (11.70)$$

$$V_{\phi H} = \lambda_3(H^\dagger H)\mathrm{Tr}\phi^2 + \lambda_4 H^\dagger \phi^2 H \quad (11.71)$$

我们现在来考察,在这样的位势下,式(11.67)中的破缺能否实现。

由于我们要求式(11.67)中第一个破缺的能标 $m_X \simeq 10^{14}$GeV 比第二个破缺的能标 $m_W \simeq 10^2$GeV 大得多,这必须要求 $\phi$ 场和 $H$ 场的真空平均值有很大的差别

$$\langle \phi \rangle_0 / \langle H \rangle_0 \simeq 10^{12} \quad (11.72)$$

作为第一步近似,我们在考虑$\langle \phi \rangle_0$ 时忽略$\langle H \rangle_0$。这时,在微扰论最低阶,$\langle \phi \rangle_0$ 由式(11.69)的绝对极小决定。属于伴随表示的$\langle \phi \rangle_0$ 是一个 $5 \times 5$ 厄米矩阵,它可以通过 SU(5)变换对角化。由于拉氏量的 SU(5)不变性,不妨取

$$\langle \phi_a^b \rangle_0 = \delta_{ab} C_a \quad (11.73)$$

对角化后极值方程$\left.\dfrac{\partial V_\phi}{\partial \phi}\right|_{\phi = \langle \phi \rangle_0} = 0$ 是 $C_a$ 的不耦合的三次方程,因此最多有三个不同的解。具体的研究表明,在 $\lambda_2 > 0, \lambda_1 > -\dfrac{7}{30}\lambda_2$ 的条件下,$V_\phi$ 的绝对极小在[13]

$$\langle \phi \rangle_0 = v_\phi \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & -3 & \\ & & & & -3 \end{bmatrix} \quad (11.74)$$

处,其中

$$v_\phi^2 = \mu_p^2 / (60\lambda_1 + 14\lambda_2) \quad (11.75)$$

记住伴随表示的元素 $\phi_a^b$ 的 $Y$ 量子数为 $y_a - y_b$,其对角元不带 $\mathrm{U}(1)_Y$ 荷。因此真空平均值式(11.74)的小群为 $\mathrm{SU}(3)_C \times \mathrm{SU}(2)_C \times \mathrm{U}(1)_Y$,这正是我们所希望的。把$\langle \phi \rangle_0$ 代入 $\phi$ 场的动能项

$$-\frac{1}{2}(D_\mu \phi)^2 = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi - \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}} g_5 [A_\mu, \phi]\right)^2$$

中得到规范粒子的质量项 $-\frac{1}{4}g_5^2[A_\mu,\langle\phi\rangle_0]^2$。由于$\langle\phi\rangle_0$ 与 $SU(3)_C\times SU(2)_L\times U(1)_Y$ 的生成元对易，$G_s$ 群规范场仍是无质量的。这是前面已经由 Higgs 机制的一般结论得到的结果。$X$ 和 $Y$ 得到质量

$$m_X = m_Y = \sqrt{25}g_5 v_\phi \tag{11.76}$$

由式(11.27)知道，$X_\alpha$ 和 $Y_\alpha$ 构成 $G_s$ 群的不可约表示，$m_X = m_Y$ 是 $G_s$ 对称性未被破坏的结果。

现在讨论$\langle H\rangle_0$。为使 $G_s$ 破缺到 $SU(3)_C\times U(1)_{em}$，$\langle H\rangle_0$ 应可通过 $G_s$ 变换变为如下的形式

$$\langle H\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\v_\varphi\end{bmatrix} \tag{11.77}$$

其中，$v_\varphi$ 有 $10^2$GeV 的量级。由式(11.70)中 $V_H$ 的形式知道，如果没有 $\phi$ 和 $H$ 的混合项 $V_{\phi H}$，则 $G_s$ 对称性破缺后，物理的 Higgs 粒子包括 $SU(3)_C$ 三重态 $h^\alpha(\alpha=1,2,3)$都将有 $10^2$GeV 量级的质量。但是由于 $h^\alpha$ 传递导致质子衰变的作用，这样轻的 $h^\alpha$ 粒子是不能允许的。因此必须引入 $V_{\phi H}$项。在考虑这一项后，得到 $h$ 和 $\varphi$ 的位势

$$V_H + V_{\phi H}\mid_{\phi=\langle\phi\rangle_0} = V_h + V_\varphi$$

$$V_h = -\mu_h^2(h^\dagger h) + \lambda(h^\dagger h)^2 \tag{11.78}$$

$$V_\varphi = -\mu_\varphi^2(\varphi^\dagger\varphi) + \lambda(\varphi^\dagger\varphi)^2 \tag{11.79}$$

其中

$$\mu_h^2 = \mu_H^2 + (30\lambda_3 + 4\lambda_4)v_\phi^2 \tag{11.80}$$

$$\mu_\varphi^2 = \mu_H^2 + (30\lambda_3 + 9\lambda_4)v_\phi^2 \tag{11.81}$$

式(11.79)即是 Weinberg-Salam 模型中的 Higgs 位势。为使真空平均值有式(11.77)的形式要求 $\mu_h^2<0,\mu_\phi^2>0$，这时 $\mu_\phi^2=\lambda v_\phi^2$。由于式(11.81)中 $v_\phi^2$ 有$(10^{14}\text{GeV})^2$的量级，要使 $\mu_\phi^2$ 有$(10^2\text{GeV})^2$ 的量级，参数 $\lambda_3$ 和 $\lambda_4$ 需要做精细的调节，其精度要求达到$\frac{1}{10^{24}}$。如果没有一种对称性保证，这是很不自然的。不仅如此，在考虑辐射修正后，这种不自然性就显得更严重。一般来说，$\langle\varphi\rangle_0$ 值决定于有效位势，式(11.78)和(11.79)只是树图下的有效位势。在考虑圈图后，有效位势中的参数

都有修正。对这里所讨论的问题,关键是 $\varphi$ 场的自能 $-\mu_\varphi^2(\varphi^\dagger\varphi)$ 项。标量场的自能是二次发散的。在大统一理化中,由于有重粒子参加的圈图,动量空间的切断必须大于 $m_X$。人们猜测,物理的切断可能发生在 Planck 质量 $m_P=\frac{1}{\sqrt{G}}\simeq10^{19}$ GeV 处($G$ 是牛顿引力常数),在这个能标下引力变强,因而可能改变场论的性质。无论如何,切断的 $l$ 圈图对 $\varphi$ 场自能的贡献 $\gtrsim\left(\frac{g_5^2}{4\pi^2}\right)^l m_X^2\simeq(10)^{-2l}m_X^2$。因此,为保证 $\mu_\varphi^2=(10^2\text{GeV})^2$,必须在微扰论中逐级引入重整化抵消项,以极高的精度抵消这些辐射修正图的贡献,这个问题称为规范等级问题。

## 11.7　Fermi 子质量

在最小的 SU(5)模型中,Fermi 子质量由属于表示$\underline{5}$ 的 Higgs 场 $H$ 与 Fermi 子的汤川耦合式(11.38)产生。首先,考虑式(11.38)中的 $f_{lm}$ 项,由于 Higgs 场 $H$ 的真空平均值有式(11.77)的形式,我们得到 Fermi 子的质量项

$$-\frac{1}{2}v_\varphi f_{lm}(\bar{d}_R^{(l)}d_L^{(m)}+\bar{e}_R^{+(l)}e_L^{+(m)})+\text{h.c.}=-\bar{d}_R M_d d_L-\bar{e}_R^+ M_e e_R^+ +\text{h.c.} \tag{11.82}$$

其中,质量矩阵 $M_d$ 和$M_e$ 为

$$M_d = M_e = \frac{1}{2}v_\varphi f \tag{11.83}$$

上式中,$f$ 为矩阵($f_{lm}$)。式(11.38)中的 $f'_{lm}$ 项产生如下的 $u$ 夸克质量项

$$\frac{4}{\sqrt{2}}v_\varphi f'_{lm}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\psi_L^{(l)[\alpha,\beta]}C\psi_L^{(m)[\gamma,4]}+\text{h.c.}=-\frac{4}{\sqrt{2}}v_\varphi f'_{lm}\times\bar{u}_R^{(l)}u_L^{(m)}+\text{h.c.}=-\bar{u}_R M_u u_L+\text{h.c.} \tag{11.84}$$

其中

$$M_u = \frac{4}{\sqrt{2}}v_\varphi f' \tag{11.85}$$

上式中,$f'$为矩阵($f'_{lm}$),它是一个对称矩阵。由于 SU(5)模型中不存在右手中微子,所以没有中微子质量项。在把质量矩阵 $M_a$ 和$M_u$ 对角化后产生了 Kobayashi-Maskawa 混合。

式(11.85)中的 $M_u$ 除对称外没有什么限制,因此对 $u$,$c$ 和$t$ 的质量这个模型给不出关系式。但是在式(11.83)中 $M_d$ 和$M_e$ 相等,这表示它们的本征值也相等,由此得到质量关系

$$m_e = m_d, \qquad m_\mu = m_s, \qquad m_\tau = m_b \tag{11.86}$$

注意,上式中的轻子和夸克指标代表质量本征态而不是原来填充 SU(5)群各个不可约表示的轻子和夸克态。式(11.86)不能直接和低能实验比较,因为这些质量不是轻子和夸克的物理质量而只是出现在拉氏量中的质量参数。它们与重整化条件有关,而式(11.86)应当看作在大统一能标 $m_X$ 以上做重整化减除手续的结果。它们是能标 $m_X$ 以上的有效质量的关系式。为了得到低能有效质量须利用重整化群方程(5.56)。在单圈近似下,$\gamma_m$ 由图 11.5 中所示的 Feynman 图决定,图中波纹线代表 $SU(3)_C$ 或 $U(1)_Y$ 规范场传播子。$SU(2)_L$ 规范场没有贡献,因为质量项包含 $\psi_L(\psi_R)$和 $\bar{\psi}_R(\bar{\psi}_L)$的乘积,而右手 Fermi 子是 $SU(2)_L$ 的单态。Higgs 场 $\varphi$ 对 $\gamma_m$ 的贡献较小,这里忽略了。因此得到

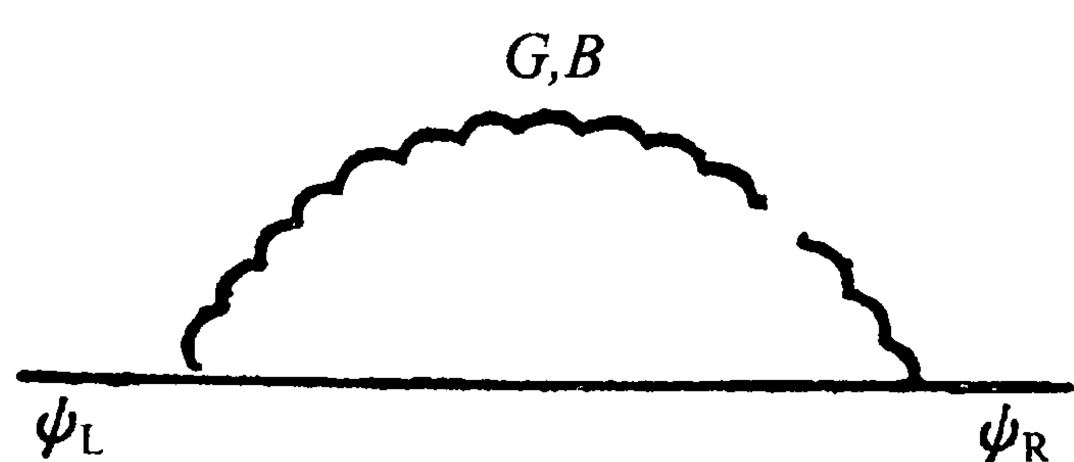



图 11.5

$$\gamma_m = d_0^{(1)} g_1^2 + d_0^{(3)} g_3^2 + \mathcal{O}(g^4) \tag{11.87}$$

令 $\beta_3$ 和 $\beta_1$ 分别为 $SU(3)_C$ 和 $U(1)_Y$ 规范作用的$\beta$ 函数,$b_0^{(3)}$ 和 $b_0^{(1)}$ 分别为 $\beta_3$ 和 $\beta_1$ 的微扰展开式第一项的系数,又令 $m(\mu^2) = \overline{m}(t)$,$2t = \ln \frac{\mu^2}{m_X^2}$。由第六章中的式(6.56)及(6.135)可得

$$\frac{m(\mu^2)}{m(m_X^2)} = \left(\frac{g_3^2(\mu^2)}{g_3^2(m_X^2)}\right)^{-\frac{d_0^{(3)}}{2b_0^{(3)}}} \left(\frac{g_1^2(\mu^2)}{g_1^2(m_X^2)}\right)^{-\frac{d_0^{(1)}}{2b_0^{(1)}}} \tag{11.88}$$

利用上式和第六章中的式(6.115)及(6.126),可得

$$\begin{aligned} \frac{m_d(\mu^2)}{m_e(\mu^2)} &= \frac{m_d(m_X^2)}{m_e(m_X^2)} \left(\frac{g_3^2(\mu^2)}{g_3^2(m_X^2)}\right)^{\frac{4}{11-\frac{2}{3}f}} \left(\frac{g_1^2(\mu^2)}{g_1^2(m_X^2)}\right)^{\frac{3}{2f}} \\ &= \left(\frac{g_3^2(\mu^2)}{g_5^2(m_X^2)}\right)^{\frac{4}{11-\frac{2}{3}f}} \left(\frac{g_1^2(\mu^2)}{g_5^2(m_X^2)}\right)^{\frac{3}{2f}} \end{aligned} \tag{11.89}$$

其中,$f$ 为夸克味数。

在与低能质量参数比较时,$\mu^2$ 应取何值不是很确定的。通常取 $\mu^2 = Q_0^2$ 为产生两个夸克的阈能

$$2m_q(Q_0^2) = \sqrt{Q_0^2} \tag{11.90}$$

对重夸克 $t$,$b$ 和$c$,这是一个合理的选择。对式(11.89)的修正包含考虑 $\beta$ 和 $\gamma_m$ 的两圈项,考虑阈效应及 Higgs 粒子。计算结果在只有三代夸克($f=6$)和轻子时如取 $\Lambda_{\overline{MS}} \simeq 100 \sim 300\text{MeV}$ 得到[5]

$$\frac{m_b}{m_\tau} \simeq 3 \tag{11.91}$$

实验值 $m_\tau \simeq 1.8\text{GeV}$, $m_b \simeq 5\text{GeV}$。因此式(11.91)是相当好的结果。

在讨论第二代和第一代夸克的质量时,遇到的理论问题比较多。低能夸克质量参数有两种,一种是由强子束缚态模型定出的所谓组份夸克质量,一种是由流代数定出的所谓流夸克质量。后一种是出现在夸克模型拉氏量中的参数,它没有包括由手征对称性自发破缺所产生的质量。对轻夸克这两种质量参数相差很大,由于$m_q^2(Q_0^2)$是出现在低能有效拉氏量中的质量参数,应当把它与流夸克质量而不是与组份夸克质量进行对比。流夸克的质量理论上不很确定。在文献[14]中得到

$$m_s = 150 \sim 300 \quad \text{MeV}$$

$$\frac{m_d}{m_s} \simeq 0.042, \qquad \frac{m_u}{m_d} \simeq 0.47 \tag{11.92}$$

由于式(11.92)中的 $m_u$, $m_d$ 和 $m_s$ 都很小,在这样低的能标下,有效规范耦合常数很大,$\beta$ 和 $\gamma_m$ 的微扰公式不能用,因此上面用来得到 $b$ 和 $\tau$ 的质量比的方法不能用于第一代和第二代的夸克和轻子。然而我们注意 $d$ 和 $s$ 以及 $e$ 和 $\mu$ 在 $SU(3)_C$, $U(1)_Y$ 及 $U(1)_{em}$ 下的性质是相同的,所以应当期望,质量比 $\frac{m_d}{m_s}$ 及 $\frac{m_e}{m_\mu}$ 与重整化基本上没有关系。由此及式(11.86)得到

$$\frac{m_d}{m_s} = \frac{m_e}{m_\mu} = \frac{1}{207} \tag{11.93}$$

这个结果与式(11.92)中的流代数值几乎差一个因子 9,这可能是最小的 SU(5)模型的一个严重问题。不过 $m_d$ 和 $m_s$ 在 $SU(3)_C$ 色作用的禁闭能标 $\Lambda_{QCD}$ 以下,对这样低的能标也可能有更复杂的因素起作用。要改变式(11.93)的结果,须引入属于表示$\underline{45}$ 的 Higgs 粒子,由群表示分解公式(11.37)知道这样的 Higgs 粒子可以对质量项作贡献。在文献[15]中考虑了一个这样的模型,其中 Higgs 粒子的汤川作用满足附加的离散对称性。这个模型可以得到与式(11.92)一致的质量关系,还能对 Cabbibo 角做出预言。

## 11.8 大统一理论的一般情况和存在的问题

SU(5)模型是最简单的大统一模型,可以构造出有更大的规范群的大统一理论。在选择大统一规范群时,除了要求它包含 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ 为其子群外,常常还希望 Fermi 子属于这个群的复表示。其理由如下,如前面已提到的,由于 $\psi_L^c = C\bar{\psi}_R$,在讨论各种规范理论模型时,我们可以把右手 Fermi 子用其电荷

共轭的左手 Fermi 子代替,而只考虑左手 Fermi 子 $\Psi_L \equiv \psi_L \oplus \psi_L^c$ 所属的表示。设所有 Fermi 子属于规范群 $G$ 的表示 $R_G(\Psi_L)$,这个表示可以是可约的,例如在量子色动力学中左手夸克与左手反夸克组成 $SU(3)_C$ 的$\underline{3}+\underline{3}^*$ 表示。在 SU(5)模型中则是$\underline{5}^*+\underline{10}$。如果 $R_G(\Psi_L)$是实表示,则它与它的复共轭表示 $R_G(\Psi_L)^*$ 等价,写作 $R_G(\Psi_L) \sim R_G(\Psi_L)^*$。同样地,我们也可以只考虑右手场 $\Psi_R \equiv \psi_R \oplus \psi_R^c$。设它们所属的表示为 $R_G(\Psi_R)$。由于 $R_G(\Psi_R) \sim R_G(\Psi_L)^*$,如果 $R_G(\Psi_L)$是实表示,则 $R_G(\Psi_L) \sim R_G(\Psi_R)$,因而理论是左右对称的。在标准模型的 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 规范作用中宇称不守恒,理论不具有左右对称性,其 Fermi 子表示不是实的。如果 Fermi 子在大统一群下的表示是实的,则它们在子群 $G_s$ 下的表示也是实的。如果理论中的 Fermi 子只包含标准模型中所有的 Fermi 子,这是不能允许的。为了使 $R_G(\Psi_L) \sim R_G(\Psi_R)^*$,必须比标准模型引入至少多一倍的 Fermi 子。相应于 $u, d, e, \nu$ 需引入较重的粒子 $U, D, E, N$。伴随这些粒子的质量项,在拉氏量中将出现 $G_s$ 不变的混合项

$$\Delta m(\bar{u}_L U_R + \bar{d}_L D_R) + \text{h.c.} + \cdots \tag{11.94}$$

这些项破坏大统一群的不变性,它来自与 Higgs 场的汤川耦合。如果造成这个质量项的 Higgs 场即是在 $m_X$ 能标处破坏大统一对称性的场,则 $\Delta m$ 应当有 $m_X$ 的量级。一般来说,如果 $G_s$ 对称性在能标 $m_X$ 下破缺后剩下的最大对称群是 $G_s$,则 $\Delta m$ 通常是 $m_X$ 的量级[16]。在这种情况下,在把质量矩阵对角化后,$u, d$ 等粒子也将具有与 $m_X$ 可以相比的质量,这是不能允许的。但是如果有附加的离散对称性禁戒 $\Delta m$ 项,还有可能得到合理的结果。另一个可能性是大统一群 $G$ 首先破缺到一个比 $G_s$ 大的子群,这个子群有对称性禁戒 $\Delta m$ 项。这样的理论至少有 Fermi 子数多的缺点。

李群的生成元中可互相对易的最大数目称为李群的秩。$G_s$ 群的秩是 4,因此大统一群 $G$ 的秩最少是 4,只有一个耦合常数的秩为 4 的规范群有$(SU(2))^4$, $(SO(5))^2$, $(G_2)^2$, $F_4$; O(8), O(9), Sp(8), $(SU(3))^2$ 和 SU(5)。前两个群不包含 SU(3)子群。$G_2^2$, $F_4$, O(8), Sp(8)和 O(9)没有复表示。对于$(SU(3))^2$ 群,可以把其中一个单群作为 $SU(3)_C$,另一个 SU(3)包含 $SU(2)_L \times U(1)_Y$。但是$(SU(3))^2$ 的表示无法使整数电荷的轻子与分数电荷的夸克在 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ 下有相同的性质。因此 SU(5)是秩为 4 的群中唯一可用作大统一群的。具体的研究表明在秩为 5 的群中唯一适合于作大统一群的是 SO(10)。

在 SO(10)模型[2]中,除标准模型所有的每代 15 个 Fermi 子外,需另引入一个右手中微子 $\nu_R$。SO(10)模型的物理结果在许多方面与 SU(5)模型是相近的,如大统一能标、质子衰变、$\sin^2\theta_W$ 值等。与 SU(5)模型比较,它有如下一些优点:①一

代 16 个 Fermi 子放在同一个不可约表示即双值旋量表示$\underline{16}$中，不像 SU(5)模型把一代 Fermi 子拆开分放在两个表示$\underline{5}^*$和$\underline{10}$中。②可以有许多种可能的破缺方式，例如，它可以先破缺到 SU(5)

$$\mathrm{SO}(10) \xrightarrow{m_G} \mathrm{SU}(5) \xrightarrow{m_X} G_s \xrightarrow{m_W} \mathrm{SU}(3)_C \times \mathrm{U}(1)_{\mathrm{em}} \tag{11.95}$$

也可以按如下的方式先破缺到一个左右对称的理论

$$\mathrm{SU}(10) \xrightarrow{m_G} \mathrm{SU}(4)_C \times \mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}} \times \mathrm{SU}(2)_{\mathrm{R}} \tag{11.96}$$

然后再破缺到 $G_s$。上式中 $\mathrm{SU}(4)_C$ 是 $\mathrm{SU}(3)_C$ 群的一个扩充，它把轻子作为第 4 种色。这是首先由 Pati 和 Salam 提出的对称性。③在一些破缺方式下，可以得到比 SU(5)的结果稍长一些的质子寿命。④由于引进了右手中微子 $\nu_{\mathrm{R}}$，可以在对称性破缺后使一个基本上是 $\nu_{\mathrm{R}}$ 的质量本征态得到一个大的 Majorana 质量，同时使另一个中微子质量本征态有一个很小的 Dirac 质量，使中微子可能有很小而又不等于零的质量。

其他更复杂的单纯群如 $\mathrm{E}_6$ 模型[3]把更多的 Fermi 子与标准模型的轻子和夸克放在同一不可约表示中。

Pati-Salam 模型[1]的规范群是非单纯群$(\mathrm{SU}(4))^4$，由离散对称性保证它只有一个耦合常数。在这个模型中，把两代左手和右手的夸克和轻子(包括右手中微子)分别放入 $\mathrm{SU}(4)_{CL}\times\mathrm{SU}(4)_{WL}\times\mathrm{SU}(4)_{CR}\times\mathrm{SU}(4)_{WR}$的两个表示$(\underline{4},\underline{4}^*,\underline{1},\underline{1})$和$(\underline{1},\underline{1},\underline{4},\underline{4}^*)$。它们可以写成如下的矩阵

$$\begin{bmatrix} u^1 & u^2 & u^3 & \nu_e \\ d^1 & d^2 & d^3 & e^- \\ s^1 & s^2 & s^3 & \mu^- \\ c^1 & c^2 & c^3 & \nu_\mu \end{bmatrix}_{\mathrm{L,R}} \tag{11.97}$$

$\mathrm{SU}(4)_{CL}$和$\mathrm{SU}(4)_{CR}$是前面所说的扩充的规范对称群。$\mathrm{SU}(4)_{WL}$和$\mathrm{SU}(4)_{WR}$是弱电规范群。为消去反常还需要引入重的 Fermi 子。这类模型的特点是大统一能标低，$M_G\sim10^{4\sim6}\,\mathrm{GeV}$，但它也能与质子寿命的实验下限不矛盾。

由上面的叙述我们可以看到，大统一理论部分地解决了 11.1 节中所提到的标准模型中的问题。这种理论解释了电荷量子化，它能用一个耦合常数统一描述弱电和强作用，给出了与实验接近的 $\sin^2\theta_W$ 值。它能得到轻子和夸克的质量(有些模型中还有 Cabbibo 角)的一些关系式，因而减少了标准模型中包含的独立参数。在上面提到的简单模型中没有对三代粒子的重复做出解释。但是可以构造更大的规范群的模型，其中三代或三代以上的轻子和夸克填充同一个不可约表示(例如文献[16]，[17])。

但是从上面的叙述也可以看到大统一理论存在一些基本问题。从原则上来说，最重要的也许是规范等级问题。如果没有对称性来保证，在微扰论各阶，人为地调节参数到24位小数的办法作为一个相互作用的基本理论是不能接受的。除Pati-Salam模型一类的理论外，绝大多数大统一理论在这方面的情况都与SU(5)模型相似。解决这个问题的一个可能途径是超对称性，这是一种Bose子与Fermi子之间的对称性。在超对称理论中每种Bose子有一种与它对应的Fermi子，Fermi子和Bose子对圈图的贡献互相抵消，使得标量场的自能不受圈图的影响。在超对称大统一理论中，只要在树图下调节好参数就能保证$\langle\varphi\rangle_0$有所要求的量级。人们还企图用这种理论对树图下出现$m_X$和$m_W$两个相差很大的能标做出解释。已经对超对称大统一理论做了不少研究，但还没有一个特别满意的模型。

第二个问题是理论中的任意参数。虽然在大统一理论中能使在低能现象中起作用的独立参数有所减少，但是由于引进了更多的Higgs粒子所以又增加了新的参数，因此参数的总数并没有减少。以最小的SU(5)模型为例，它有1个规范耦合参数，6个夸克质量参数（轻子质量不是独立参数），6个Kobayashi-Maskawa混合角和7个Higgs参数（加了反射对称性后），一共20个参数，此外还有一个与瞬子有关的$\theta$参数，并不比标准模型的参数少。

第三个是所谓“荒漠”问题。在SU(5)理论中$m_X\simeq10^{14}$GeV和$m_W\simeq10^2$GeV之间很大的能量区域没有新的物理现象和新的粒子，这个能区在物理上没有兴趣，因此被称为荒漠。虽然没有理由说这是不允许的，但是会使人感到不满意。在一个有多个能标和多次对称性破缺的大统一理论中情况要好一些，但这种理论参数更多。

第四个问题是磁单极问题。在SU(5)模型中场方程有磁单极解（见第十二章），它们相应于一些具有拓扑量子数的粒子，因而是稳定的。这些磁单极子非常重，其质量有$\frac{1}{\alpha}m_X\sim10^{16}$GeV的量级。绝大多数大统一理论情况相似，在大爆炸宇宙模型中，在宇宙的早期$kT>\frac{1}{\alpha}m_X$时这些粒子大量产生。在宇宙温度降低后那些没有和其反粒子湮灭的磁单极子将保留到现在。在许多模型中预言的磁单极子密度与实验的上限相差很远。[①]

第五个问题是与唯象有关的。一些最简单的大统一模型，例如最小的SU(5)模型，在质子寿命和Fermi子质量关系等方面都有一些困难。虽然这些困难都可

① 注：在暴涨宇宙模型中，在大爆炸宇宙模型的规律起作用以前，宇宙有一段指数地暴涨时期。这时宇宙处于过冷的相，各种粒子的密度都变得极小，能量几乎都在准真空（某个标量场的值不在位势的极小处）中。直到准真空接近真空，暴涨终止，宇宙重新加热，产生各种粒子，这时的$kT$已不足以产生大统一理论的磁单极。因此，在这个模型中没有磁单极困难。

能通过修改模型而弥补,但这样模型就变得更复杂,因而减少了吸引力,现在还没有唯象上满意的模型。超对称大统一模型虽然比较好,但也有类似问题。

比大统一理论更进一步的想法是把引力作用也和弱、电、强作用一起在规范理论的基础上统一描述。引力在 Planck 质量 $m_P=\sqrt{G^{-1}}\simeq 10^{19}$GeV 的能标下变强,在这个能标下不能忽略引力。大统一能标 $m_X\sim 10^{14}$GeV 与 $m_P$ 相差已不算很远。因此在考虑弱电和强作用的统一时把引力也包括在内是自然的想法。人们希望超对称能解决引力在重整化方面的困难,把规范对称概念与定域超对称概念结合起来的统一描述四种基本作用的超引力理论已被不少人研究过。但解决重整化困难的希望没有实现,引力场量子化的基本困难还没有解决。

解决标准模型中三代的重复以及参数多的问题的另一个可能的途径是,把轻子和夸克都看作复合粒子。在复合轻子夸克模型中轻子和夸克的谱以及标准模型所有的参数原则上都是由下一层次的组元和动力学决定的。已提出的复合轻子夸克模型大多是建立在规范场的概念上的,其中一些把复合粒子的概念与大统一或超对称的概念结合在一起。但这方面的研究还是很初步的,没有一个比较满意的模型。

## 参考文献


1 H Georgi and S L Glashow. Phys Rev Lett. 1974, 32: 438;A J Buras, J Ellis, M K Gaillard and D V Nanopoulos. Nucl Phys. 1978, B135: 66

2 H Georgi. Particles and Fields 1974, ed. C E Carlson. AIP, NY, 1975, 573;H Fritzsch and P Minkowski. Ann Phys. 1975, 93: 193;M Machacek. Nucl Phys. 1979,B159:37

3 F Gürsey and M Serdaroglu. Lett Nuo Cim, 1978, 21:28;Y Achiman and B Stech. Phys Letts, 1978, 77B: 389;R Barbieri and D V Nanopoulos. Phys Lett, 1980, 91B:369

4 J C Pati and A Salam. Phys Rev, 1973, D8:1240;Phys Rev Lett, 1976,36:1229;J C Pati, A Salam and J Strathdee. Nuo Cim, 1975, 26A:72;V Elias, J C Pati and A Salam. Phys Rev Lett, 1978, 40:920

5 P Langacker. Phys Reports,1980, 72C:185

6 H Georgi, H R Quinn and S Weinberg. Phys Rev Lett, 1974,33:451

7 T Appelquist and J Carazzone. Phys Rev, 1975, D11:2856

8 S Weinberg. Phys Lett, 1980, 91B:51

9 S Weinberg. Phys Rev Lett, 1979, 43:1566;F Wilczek and A Zee. Phys Rev Lett, 1979,43:1571

10 S Weinberg. Gravitation and Cosmology, John Wiley, 1972

11 A D Sakharov. JETP Lett, 1967, 5:24;V A Kuzmin. JETP Lett., 1970, 12:228

12 M Yoshimura. Phys Rev Lett, 1978, 41:281;1979,42:746(E)

13 L F Li. Phys Rev, 1974, D9:1723

14 S Weinberg. In Festschrift For I I Rabi, ed. L Motz. New York:New York Acad Sci, 1977; P Ramond and G G Ross. Phys Lett, 1979,81B:61;J E Kim. Phys Rev Lett, 1979,43:103

15 H Georgi and C Jarlskog. Phys Lett, 1979,86B:297

16 H Georgi. Nucl Phys, 1979,B156:126;R Barbieri, D V Nanopoulos, G Morchio and F Strocchi. Phys Lett, 1980, 90B:91

17 P H Frampton. Phys Lett, 1979, 88B:299;P H Frampton and S Nandi. Phys Rev Lett, 1979,43:1460;Z Q Ma, T S Tu, P Y Xue. Phys Lett, 1981,99B:107;Z Q Ma, T S Tu, P Y Xue and X J Zhou. Phys Lett, 1981,100B:399

18 M Hamermesh. Group Theory and Its Application to Physical Problems. Addison-Wesley Publishing Company, 1962

# 第十二章　孤粒子、磁单极子和瞬子

## 12.1　孤　粒　子

本章中所讨论的孤粒子是经典场方程的一类特殊的解。孤粒子最早发现于非线性流体力学中。它在等离子体和固体理论中已经有许多应用。近年来孤粒子的概念在粒子物理中也得到了不少应用,其中最重要的包括磁单极子和瞬子。为了说明孤粒子的概念,我们先考虑一个简单的标量场的例子。

设理论中只有一个实标量场 $\varphi(x)$,拉氏量密度及哈密顿密度分别为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi - V(\varphi), \qquad \mathscr{H} = \frac{1}{2}(\dot{\varphi}^2 + (\partial_i\varphi)^2) + V(\varphi) \tag{12.1}$$

场方程为

$$\partial_\mu\partial_\mu\varphi - V'(\varphi) = 0 \tag{12.2}$$

对自由场的情况

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2$$

此时场方程有平面波解,其频率为 $\omega_k = \sqrt{|\boldsymbol{k}|^2 + m^2}$。有确定振幅的平面波分布在全空间,其能量是无穷大。为构成能量有限的解,可以考虑波包。在初始时刻,它只在空间的一个区域显著不为零。自由场方程是线性的,波包解可以由平面波解叠加而成。由于平面波相速度 $v = \frac{\omega_k}{|\boldsymbol{k}|}$ 与 $|\boldsymbol{k}|$ 有关,波包将不断地弥散。因此能量不能永远局限在有限的区域内,但是一些非线性方程可以有能量有限且集中在有限的空间区域的解。最简单的例子是 1 + 1 维时空中,标量场位势

$$V(\varphi) = \frac{\lambda}{4}\left(\varphi^2 - \frac{m^2}{\lambda}\right)^2 \tag{12.3}$$

的情况。这是一个真空退化的情况,真空解为

$$\varphi = \pm\frac{m}{\sqrt{\lambda}}$$

令 $\tilde{x} = mx, \tilde{t} = mt, \tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \frac{\sqrt{\lambda}}{m}\varphi(x)$,场方程(12.2)化为

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial\tilde{t}^2} + \frac{\partial^2}{\partial\tilde{x}^2}\right)\tilde{\varphi} + \tilde{\varphi}(1 - \tilde{\varphi}^2) = 0 \tag{12.4}$$

方程(12.4)有如下的静态解

$$\tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \pm \tanh\left(\frac{\tilde{x} - \tilde{x}_0}{\sqrt{2}}\right) \tag{12.5}$$

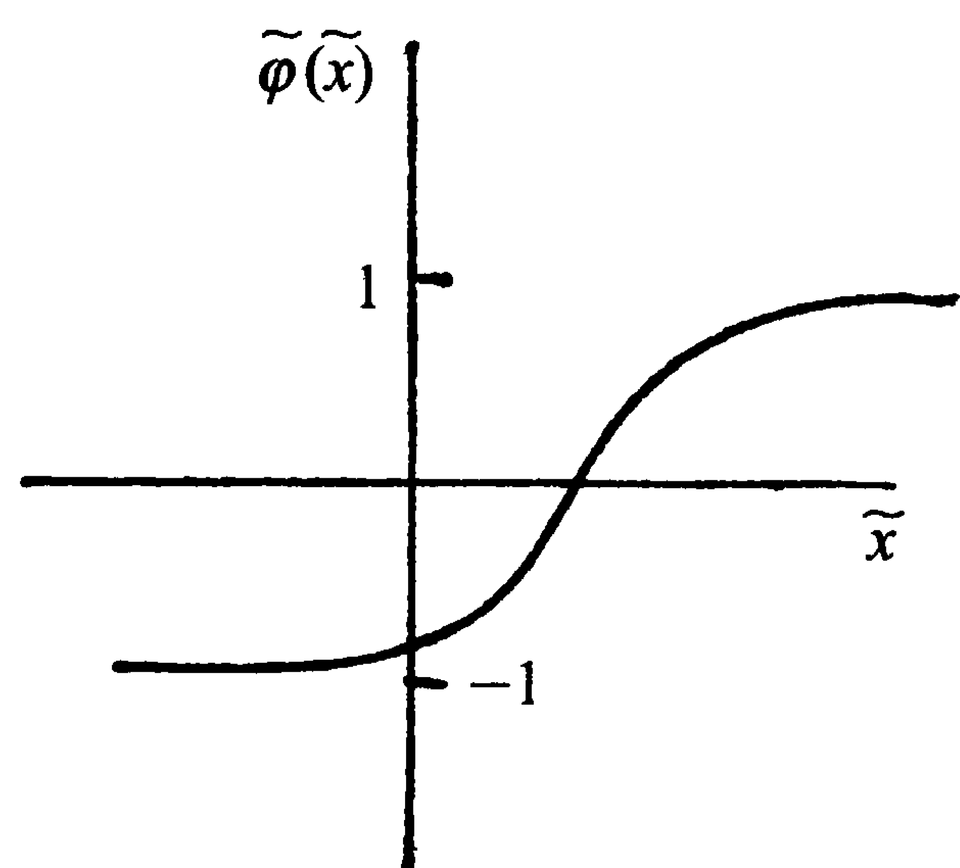



图 12.1

这个解有图 12.1 所示的形状。由于 $\lim_{\tilde{x}\to\pm\infty} \tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \pm 1$,在 $\tilde{x}\to\pm\infty$处 $\tilde{\varphi}(\tilde{x})$分别趋于两个不同的真空值,因此这个解称为纽结,场的能量集中在 $\tilde{x} = \tilde{x}_0$ 附近。由计算得到场的能量

$$E = 2\sqrt{2}m^3/3\lambda \tag{12.6}$$

因此式(12.5)是一个能量有限的解。由式(12.5)做 Lorentz 变换可得方程(12.4)的含时间的解

$$\tilde{\varphi}(\tilde{x},\tilde{t}) = \tanh\frac{\tilde{x} - \tilde{x}_0 - u\tilde{t}}{\sqrt{2}\sqrt{1 - u^2}} \tag{12.7}$$

经典场方程的能量有限且在任一瞬时都集中在有限区域的解称为孤波。式(12.5)和式(12.7)是孤波的例子。某些 1+1 维场方程的孤波解有更加特殊的性质,即两个孤波散射后互相分开而不改变各自的形状和速度。在文献中把这样的孤波称为孤粒子。例如

$$V'(\varphi) = \frac{m^4}{\lambda}\sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\varphi\right)$$

的情况,式(12.2)称为 Sine-Gordon 方程。这个方程就有这样的孤粒子解。但是由于这种解过于特殊,在许多物理文献中不区分孤波和孤粒子而把所有经典场方程的能量有限且在任意时刻都集中在有限的空间区域的解都称为孤粒子,在本章中我们也采取这样的约定。因此我们说式(12.5)中正号解代表一个孤粒子,负号解代表一个反孤粒子。

由于孤粒子是经典场方程的解,它在量子场论的路径积分公式中代表一个局部极小的路径。围绕这个局部极小做准经典近似,可以建立有孤粒子的量子场论[1,3]。因此孤粒子在量子场论中也有它的地位,在前面所讨论的 1+1 维标量场例子中

$$\varphi(x) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}\tilde{\varphi}(\tilde{x})$$

而 $\tilde{\varphi}$ 与耦合常数$\lambda$ 无关。一般来说,我们总可以通过场量的标度变换使场方程不含耦合常数。因此孤粒子解总是正比于耦合常数的负幂次,由此可知孤粒子解是非微扰解。

由于孤粒子是占据有限空间区域的稳定结构,并且具有完全确定的质量,在粒

子物理学中，人们试图用它描述某种基本粒子。例如，较早的文献[2]中即已提出重子是孤粒子，这种观点后来又被人们注意。

现在我们来研究孤粒子所以能稳定的原因。先看上面讨论的纽结解的例子。考虑如下的量

$$K = \frac{1}{2}\tilde{\varphi}(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} \tag{12.8}$$

如果场的能量有限，在无穷远处，$\tilde{\varphi}(x)$只能趋于两个真空值$\pm 1$之一，$K$ 只能取值 0 或$\pm 1$。对真空解 $K=0$，对纽结解 $K=1$ 或 $-1$，$K$ 可称为纽结数。由于 $K$ 只能取离散的值，它在函数 $\varphi(x)$的连续变形下是不变的。在经典场论中，场随时间的变化是连续的而且保持能量守恒，所以 $K$ 是守恒量。由于纽结解的能量有限，假如它弥散到整个空间中，能量密度必然处处趋于零，$\varphi(x)$场与真空解的偏离也将随之趋于零。对这样的场的构形 $K=0$。由于 $K$ 守恒，这是不可能的。$K$ 可看作流

$$j_\mu = \varepsilon_{\mu\nu}\partial_\nu\varphi$$

的荷。这个流按定义满足方程$\partial_\mu j_\mu=0$，它不是与某种对称性相联系的 Noether 流。

在量子场论中，讨论场的状态跃迁可以用 W.K.B.方法。设$|\varphi(x)\rangle$为场的算符的本征态，本征值为 $\varphi(x)$。对孤粒子态，$\varphi(x)$满足 $K=\pm 1$。对真空背景加上一些通常的基本标量粒子的态，$\varphi(x)$满足 $K=0$。在 W.K.B.方法中，两个状态$|\varphi(x)\rangle$和$|\varphi'(x)\rangle$之间的跃迁来源于一系列路径 $\varphi(x,\tau)$，这些路径满足条件 $\varphi(x,-\infty)=\varphi(x)$，$\varphi(x,+\infty)=\varphi'(x)$。虽然对中间态不要求能量守恒，但是由 $K=1$ 的场的构形连续变到 $K=0$ 的场的构形需要经过无穷大的能量位垒。因此由孤粒子跃迁到真空背景加上一些通常的标量粒子的状态也是严格禁戒的。这说明，相应于纽结解的孤粒子也具有量子的稳定性。

在场函数的任意连续变形下不变的量称为场的拓扑不变量或拓扑荷，它们是守恒的。$K$ 是拓扑荷的一种。拓扑荷与 Noether 荷是不同的概念。具有不同于真空的拓扑荷的孤粒子称为拓扑性孤粒子。这种孤粒子的稳定性是由拓扑荷守恒保证的。

在能量有限的解中，场在无穷远处必须趋于真空值。为了得到拓扑性孤粒子必须有退化的真空。一维空间的边界是$\pm\infty$两点，这时退化的真空必须是离散的。$D$ 维($D>1$)空间的边界可看作半径趋于$\infty$的 $D-1$ 维球面 $S^{D-1}$。为使场的构形有非平凡的拓扑性质，场必须有内部自由度，例如同位旋 SU(2)。退化的真空场在内部空间中构成一个流形，$D-1$ 维大球面 $S^{D-1}$在这个内部空间流形中连续地取值。如果 $S^{D-1}$上场的构形不能通过连续变形变为同一个值(退化的真空值之一)，我们就有了一个足以保证孤粒子存在的拓扑荷。

除拓扑性孤粒子以外,也存在非拓扑性孤粒子。它的存在要求理论有内部对称性,但不一定是退化的真空。这是场方程的一种与时间有关的有限能量解,场在内部空间中运动因而具有量子化的 Noether 荷。Noether 荷的守恒保证了非拓扑性孤粒子的稳定性,只要它的能量比具有相同 Noether 荷的非孤粒子态小。李政道等曾详细地讨论了一些非拓扑性孤粒子的模型[3]。

现在我们来证明关于孤粒子的两个定理。Derrick 定理[4]的内容是:"在高于 1 维的空间中标量场理论除真空解以外没有静态的(即与时间无关的)有限能量解"。证明如下:

令 $D$ 为空间维数,$\phi$ 代表 $n$ 分量标量场。在静态解 $\phi_s(\boldsymbol{x})$中,场的能量为

$$H = K + U \tag{12.9}$$

其中

$$K = \int \mathrm{d}^D x (\nabla \phi_s(\boldsymbol{x}))^2, \qquad U = \int \mathrm{d}^D x V(\phi_s(\boldsymbol{x})) \tag{12.10}$$

分别为场的动能和势能。不妨设 $V(\phi) \geqslant 0$,其中 $V(\phi) = 0$ 是真空解的情况。考虑解 $\phi_s(\boldsymbol{x})$的标度改变 $\phi_s(\boldsymbol{x}) \to \phi_s(a\boldsymbol{x})$。场 $\phi_s(a\boldsymbol{x})$的能量为

$$H(a) = a^{D-2}K + a^D U \tag{12.11}$$

由于场方程的静态解是能量泛函的局部极小,我们有

$$\left.\frac{\partial H(a)}{\partial a}\right|_{a=1} = (D-2)K + DU = 0 \tag{12.12}$$

对非真空解 $U > 0, K > 0$,式(12.12)只在 $D = 1$ 时有可能成立。这就证明了 Derrick定理。

另一个定理[5]的内容是"除 4+1 维空时的情况外,纯规范场理论没有非真空解的静态有限能量解"。所谓规范场的真空解是指它可以由 $A_\mu(x) = 0$ 通过规范变换得到。对真空解有 $F_{\mu\nu} = 0$。所谓静态解是指可以通过一个规范变换把 $A_\mu(x)$变成与时间无关的解。这个定理的证明如下:

规范场的能量动量张量为

$$\theta_{\mu\nu} = F^a_{\mu\lambda} F^a_{\nu\lambda} - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu} F^a_{\rho\lambda} F^a_{\rho\lambda} \tag{12.13}$$

能量为

$$H = \int \mathrm{d}^D x \left( \frac{1}{4} F^a_{ij} F^a_{ij} + \frac{1}{2} F^a_{k0} F^a_{k0} \right)$$

对能量有限的解

$$r^{D/2} F_{\mu\nu} \to 0, \quad (r^{(D/2)-1}) A_\mu \to 0 \text{ 当 } r \to \infty \tag{12.14}$$

由运动方程

$$\partial_k F_{k0} - \mathrm{i}g[A_k, F_{k0}] = 0$$

可得

$$\int \mathrm{d}^D x[A_0 \partial_k F_{k0} - \mathrm{i}g(A_0 A_k F_{k0} - A_0 F_{k0} A_k)] = 0$$

由式(12.14)知道,对于能量有限的解,上式中第一项可以分部积分。因此有

$$\mathrm{Tr}\int \mathrm{d}^D x\{\partial_k A_0 - \mathrm{i}g[A_k, A_0]\} F_{k0} = 0 \tag{12.15}$$

对于静态解,可选取规范使$\partial_k A_0 = 0$,这时上式可写为

$$\mathrm{Tr}\int \mathrm{d}^D x F_{k0} F_{k0} = 0$$

因此对静态有限能量解

$$F_{k0} = 0 \tag{12.16}$$

注意,式(12.16)是规范不变的。另一方面由$\partial_\mu \theta_{\mu\nu} = 0$得到

$$\partial_i(x_j \theta_{ij}) = \theta_{ii} - x_j \partial_i \theta_{ij} = \theta_{ii} + x_j \partial_0 \theta_{0j}$$

对于静态解,由上式得到

$$\int \mathrm{d}^D x \theta_{ii} = \int \mathrm{d}^D x \partial_i(x_j \theta_{ij}) = 0$$

将式(12.13)代入上式,并利用式(12.16)得到

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^D x\left\{F^a_{i\lambda}F^a_{i\lambda} - \frac{D}{4}F^a_{\rho\lambda}F^a_{\rho\lambda}\right\} &= \int \mathrm{d}^D x\left\{\left(\frac{D}{2} - 1\right)F^a_{i0}F^a_{i0} - \frac{1}{4}(D-4)F^a_{jk}F^a_{jk}\right\} \\ &= -\frac{1}{4}(D-4)\int \mathrm{d}^D x F^a_{jk}F^a_{jk} = 0\end{aligned} \tag{12.17}$$

由式(12.17)可知,空间维数 $D \neq 4$ 时,对于纯规范场方程的能量有限的静态解

$$F_{jk} = 0$$

上式及式(12.16)表示这样的解只有真空解。

在 12.7 节中,我们将看到,$D = 4$ 时纯规范场方程确有能量有限的静态非真空解,这就是瞬子解。上面两个定理告诉我们,除瞬子解外在高于一维的空间中,要得到静态孤粒子解不能只考虑标量场或规范场,而必须考虑规范场与标量场的耦合或它们与其他场的耦合。非拓扑性孤粒子不是静态解,它不受这两个定理的限制。

## 12.2　同　伦　群

为说明场的各种拓扑荷做准备,我们在本节中先介绍一些有关的数学知识。

先介绍流形的概念。$n$ 维流形 $M$ 是指满足如下三个条件的集合：

(1) $M$ 是一族开集 $U^{(a)}$ 的并集。

(2) 对每一个开集 $U^{(a)}$ 可以引入一组坐标 $x_i^a$ $(i=1,2,\cdots,n)$。这意味着 $U^{(a)}$ 内的点 $p$ 和 $n$ 维实数空间 $R^n$ 上的一个开集 $D^{(a)}$ 内的点 $x^{(a)}$ 有一一对应的关系 $x^{(a)}=\varphi^{(a)}(p)$。要求映射 $\varphi^{(a)}$ 及其逆映射都是连续的。$x^{(a)}$ 称为开集 $U^{(a)}$ 内的局部坐标。

(3) 对两个有交的开集 $U^{(a)}$ 和 $U^{(b)}$，在交集 $U^{(ab)}\equiv U^{(a)}\cap U^{(b)}$ 中 $x^{(b)}$ 是 $x^{(a)}$ 的函数 $x^{(b)}=\varphi^{(ba)}(x^{(a)})$。要求 $\varphi^{(ba)}$ 是连续函数并有连续的无穷阶导数。

$n$ 维欧氏空间 $E^n$ 是一个平凡的流形。它可以看作是只含一个开集的流形，$E^n=R^n$。一个最简单的非平凡流形是二维球面 $S^2$。在球面上不可能建立单一的坐标系。通常用来标志球面上的点的经纬度在南极和北极两点不能满足连续性的要求。但是我们可以把球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 看作两个开集 $U^{(1)}$ 和 $U^{(2)}$ 的并集，其中 $U^{(1)}$ 满足 $z>-\dfrac{a}{2}$，它不含南极 $(0,0,-a)$。$U^{(2)}$ 满足 $z<\dfrac{a}{2}$，它不含北极 $(0,0,a)$。对 $U^{(a)}$ 上的点 $p=(x,y,z)$ 做南极与 $p$ 的连线交 $x$-$y$ 平面于 $(\bar{x}^{(1)},\bar{y}^{(1)},0)$。$(\bar{x}^{(1)},\bar{y}^{(1)})$ 可以用作 $U^{(1)}$ 上的局部坐标。同样的对 $U^{(2)}$ 上的点 $p$ 做北极与 $p$ 的连线交 $x$-$y$ 平面于 $(\bar{x}^{(2)},\bar{y}^{(2)},0)$。$(\bar{x}^{(2)},\bar{y}^{(2)})$ 可以用作 $U^{(2)}$ 上的局部坐标。这样定义的局部坐标显然满足要求(2)。不难证明它们也满足要求(3)。

群参数的空间也构成流形。U(1)群的元素可以表为 $g=\exp(\mathrm{i}\alpha)$。$0\leqslant\alpha<2\pi$。$\alpha=2\pi$ 与 $\alpha=0$ 看作一点。因此 U(1)群构成环 $S^1$。SU(2)群元素可写为

$$g=\begin{pmatrix}a & -b^*\\ b & a^*\end{pmatrix}=a_4-\mathrm{i}a_i\tau_i$$

$$a=a_4-\mathrm{i}a_3,\qquad b=a_2-\mathrm{i}a_1 \tag{12.18}$$

由行列式 $\det g=1$ 得到

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2=1 \tag{12.19}$$

因此 SU(2)群的流形是三维球面 $S^3$。我们也可以将 SU(2)群元素写为

$$g=\exp\left\{\mathrm{i}\alpha^i\frac{\tau_i}{2}\right\},\qquad -2\pi\leqslant\alpha^i\leqslant2\pi \tag{12.20}$$

式(12.20)中的点 $\alpha^i$ 构成半径为 $2\pi$ 的三维球的内部。令 $\alpha=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}$，$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ 为沿矢径 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向的单位矢量。SU(2)群的元素也可用 $(\alpha,\hat{\boldsymbol{\alpha}})$ 表示，其中 $0\leqslant|\alpha|\leqslant2\pi$。所有球面上的点 $(2\pi,\hat{\boldsymbol{\alpha}})$ 代表同一元素 $g=-I_2$（$I_2$ 为 $2\times2$ 单位矩阵），因此必须把它们看作一点。显然这样定义的群流形与式(12.19)定义的 $S^3$ 有相同的几何性质。对 SO(3)群，群元素可写为

$$g=\exp\{\mathrm{i}\alpha^iT_i\},\qquad -\pi\leqslant\alpha^i\leqslant\pi \tag{12.21}$$

其中,$T_i$ 的本征值为 $\pm 1,0$。因此 SO(3)群的流形是一个半径为 $\pi$ 的球的内部。$(\pi,\hat{\boldsymbol{\alpha}})$与$(-\pi,\hat{\boldsymbol{\alpha}})$代表同一元素,因此球面上对径的两点必须看作同一点。但球面上 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$不同的非对径的两点并不等同,这是与 SU(2)群不一样的。SU(2)群流形上$(\alpha,\hat{\boldsymbol{\alpha}})$和$(2\pi-\alpha,-\hat{\boldsymbol{\alpha}})$两个点与 SO(3)群流形上的一个点$(\alpha,\hat{\boldsymbol{\alpha}})$对应。由于$g(2\pi-\alpha,-\hat{\boldsymbol{\alpha}})=g(2\pi+\alpha,\hat{\boldsymbol{\alpha}})=-I_2\times g(\alpha,\hat{\boldsymbol{\alpha}})$。因此

$$\mathrm{SO}(3)=\mathrm{SU}(2)/Z_2 \tag{12.22}$$

其中,$Z_2$ 为由 $I$ 和 $-I$ 两个元素组成的群。

现在我们来介绍同伦群的概念[6]。同伦群是用来研究流形的拓扑性质的工具。实际上同伦群可以用于比流形更广泛的一般拓扑空间,而对于我们的目的,只需要讨论一些有直观几何图像的流形就够了。设 $I^n$ 为 $n$ 维实数空间中的单位方块,它由$0\leqslant x_i\leqslant 1$表示,但把它的边界(某个 $x_i=0$ 或 1)看作同一点。我们考虑把 $I^n$ 映入流形 $M$ 的连续映射 $f$,记为

$$f:I^n\to M$$

即对任意 $x\in I^n$,有

$$f(x)=u,\qquad u\in M \tag{12.23}$$

在拓扑性质上,$I^n$ 与 $n$ 维球面 $S^n$ 相同。因此也可以认为 $f$ 是映射 $S^n\to M$。在 $n=1$时,$f(x)$在 $M$ 中描出一封闭曲线。在一般情况下,$f(x)$跑遍一个 $n$ 维封闭曲面。

**定义**:如果 $f_0(x)$能通过在 $M$ 中的连续变形变到$f_1(x)$,则映射 $f_0$ 和 $f_1$ 称为同伦的。

这就是说,如果存在一族含参数 $t$ 的映射$F(x,t)$,$t\in[0,1]$,$F(x,t)$对 $x$ 和 $t$ 都连续并且有

$$F(x,0)=f_0(x),\qquad F(x,1)=f_1(x) \tag{12.24}$$

则 $f_0$ 和 $f_1$ 是同伦的,记作 $f_0\sim f_1$。容易验证:如果 $f_0\sim f_1$,$f_1\sim f_2$,则 $f_0\sim f_2$。因此所有与 $f$ 同伦的映射构成一个等价的同伦类,记作$\{f\}$。

先考虑 $n=1$ 的情况,$f:I^1\to M$。考虑 $M$ 中通过基点 $u_0$ 的所有封闭曲线。它们可以分成一些同伦类$\{f_i\}$$(i=1,2,\cdots)$,同伦类$\{f_i\}$的集合记作 $\Pi_1(M)$。$\Pi_1(M)$一定包含一个恒同元素$\{e\}$,它是常数映射的同伦类。常数映射的定义为

$$f(x)=u_0,\qquad \text{对所有 } x\in[0,1] \tag{12.25}$$

$\{e\}$代表能在 $M$ 中连续地收缩于$u_0$ 一点的所有曲线。$\Pi_1(M)$中还含有哪些元素决定于流形 $M$ 的拓扑性质。例如,$M$ 是$n$ 维实数空间$R^n$,则任意通过 $u_0$ 的封闭曲线 $f(x)$都能通过在 $M$ 中连续变形收缩到$u_0$ 一点。为证明这一点只要取

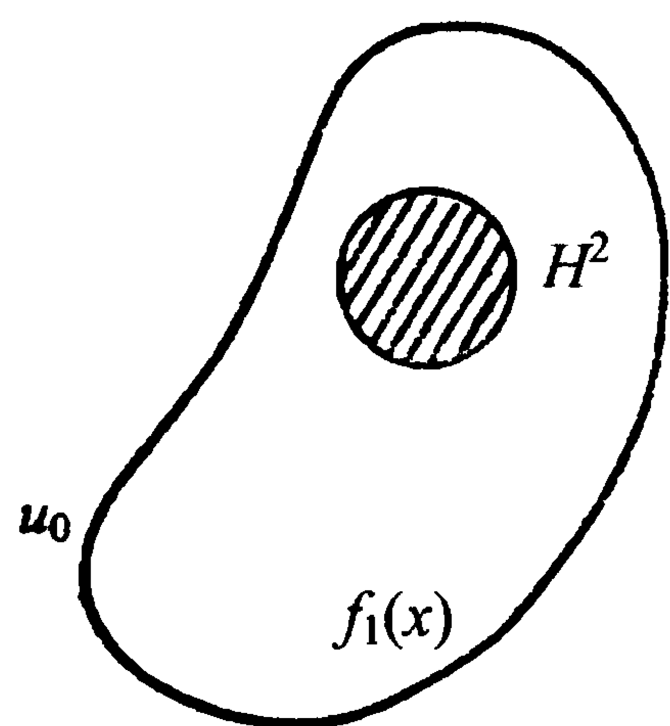


图 12.2

$$F(x,t) = tu_0 + (1-t)f(x)$$

就可以了。上式中的 + 号代表 $R^n$ 中的矢量加法。因此 $\Pi_1(R^n)$只含恒同元素$\{e\}$,记作 $\Pi_1(R^n)=0$。但如 $M$ 为二维实数空间$R^2$ 中挖去一个洞 $H^2$ 后的流形,$M=R^2-H^2$。则所有包围这个洞的封闭曲线(如图 12.2 中的曲线 $f_1(x)$)都不能通过在 $M$ 中连续变形收缩到一点,这时 $\Pi_1(M)$中含元素$\{f_1\}$,它是 $f_1$ 所属的同伦类。如果 $\Pi_1(M)$只含$\{e\}$一个元素,则 $M$ 称为单连通的。

$\Pi_1(M)$中两个元素$\{f_i\}$和$\{f_j\}$的乘积定义为由 $u_0$ 绕 $f_i(x)$一周后再绕$f_j(x)$一周所构成的曲线的同伦类,即

$$\{f_i\} * \{f_j\} \equiv \{f_i \cdot f_j\} \tag{12.26}$$

$$(f_i \cdot f_j)(x) = \begin{cases} f_i(2x), & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ f_j(2x-1), & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \tag{12.27}$$

对应于 $\Pi_1(M)$中的任一元素$\{f\}$,可以定义它的逆元素。设 $f^{-1}(x)$是与曲线 $f(x)$反方向绕成的曲线,即

$$f^{-1}(x) = f(1-x) \tag{12.28}$$

则定义$\{f\}$的逆元素为

$$\{f\}^{-1} \equiv \{f^{-1}\} \tag{12.29}$$

显然,按乘法的定义式(12.26)和(12.27),有

$$\{f\} * \{f^{-1}\} = \{e\}$$

也就是说,$\{e\}$在乘法的意义下是 $\Pi_1(M)$的单位元素。可以证明,由式(12.26)和式(12.27)定义的乘法满足结合律

$$\{f_i\} * (\{f_j\} * \{f_k\}) = (\{f_i\} * \{f_j\}) * \{f_k\} \tag{12.30}$$

因此 $\Pi_1(M)$在上面定义的乘法下构成一个群。这个群称为同伦群。

如果流形 $M$ 是道路连通的,即 $M$ 中任意两点可以用一条在$M$ 中的曲线连接,则以不同的基点 $u_0$ 构成的同伦群同构。此时 $\Pi_1(M)$与 $u_0$ 的选取无关。

现在看几个例子:

**例 1**　$\Pi_1(R^n)=0$。

**例 2**　$M=R^2-H^2$。$\Pi_1(M)$由元素$\{e\}$和$\{f_1\}^n(n=\pm1,\pm2,\cdots)$组成,其中$\{f_1\}^n$ 是绕$H^2$ $n$ 周的封闭曲线的同伦类。正的 $n$ 值代表逆时针绕向,负的 $n$ 值代表顺时针绕向。因此 $\Pi_1(R^2-H^2)$与整数加法群 $Z$ 同构

$$\Pi_1(R^2 - H^2) = Z \tag{12.31}$$

$\{f_1\}$是这个同伦群的生成元，等价于加法群 $Z$ 的元素 1。$M = S^1$ 的情况是相似的，我们有

$$\Pi_1(S^1) = Z$$

由于 U(1)群的流形是 $S^1$，我们也有 $\Pi_1(\mathrm{U}(1)) = Z$。

**例 3**　由于 $n$ 维球面$S^n$($n \geqslant 2$)上任一封闭曲线都可以在 $S^n$ 内连续地收缩到一点，所以

$$\Pi_1(S^n) = 0, \qquad n \geqslant 2$$

**例 4**　$M = \mathrm{SU}(2)$。为考虑封闭曲线是否可以收缩到一点，只需要考虑与球面接触的封闭曲线。它的一个代表是图 12.3 中的曲线 1。由于球面上所有的点都是等同的，它可以连续地变到曲线 2 然后收缩到原点。因此

$$\Pi_1(\mathrm{SU}(2)) = 0 \tag{12.32}$$

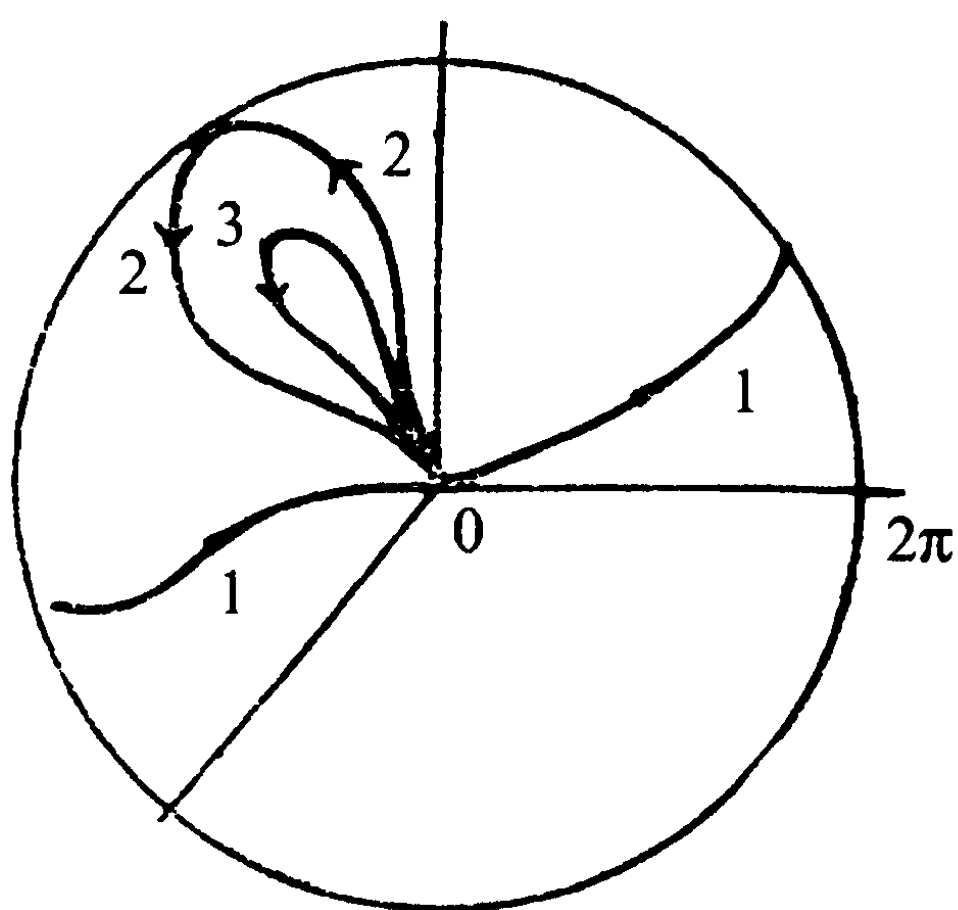



图 12.3

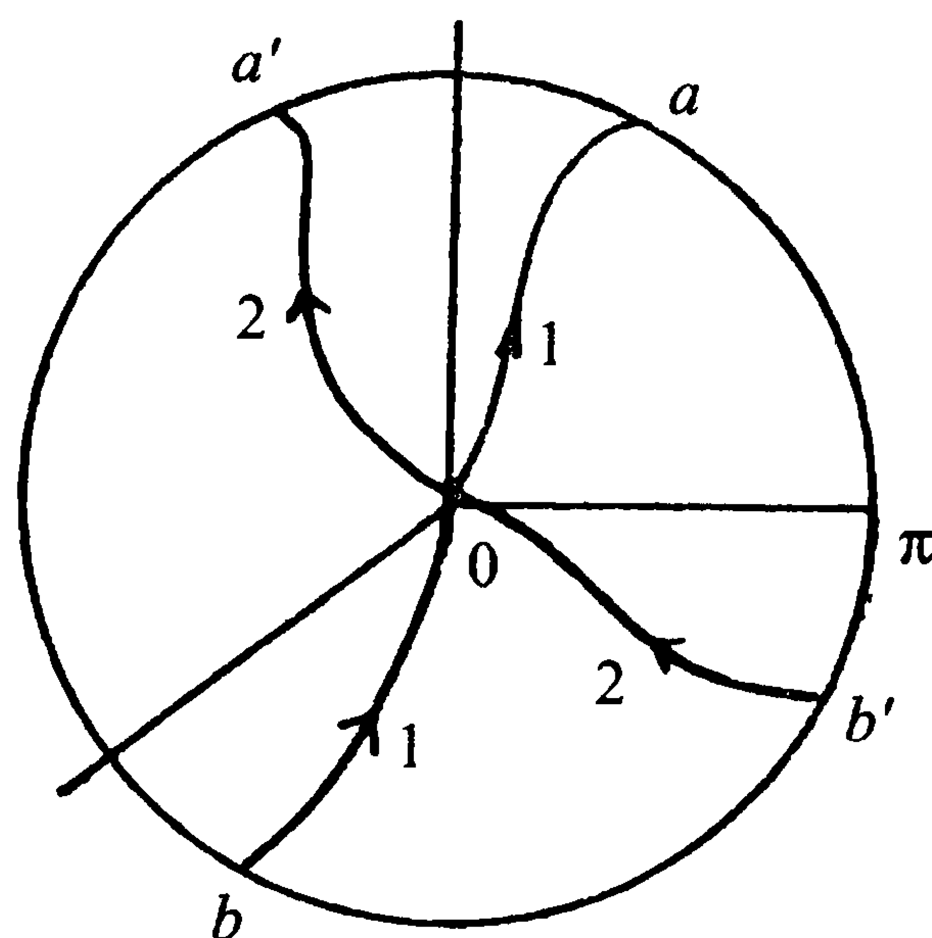



图 12.4

**例 5**　$M = \mathrm{SO}(3)$。如图 12.4 中曲线 1 与球面相交的两点 $a$ 和 $b$ 是对径的，则曲线 $oabo$ 为封闭曲线，记为 $f_1(x)$。它不能收缩到一点。但是任何另一个这样的曲线 $oa'b'o$ 都能通过使 $a'$ 和 $b'$ 在球面上运动并保持对径而连续地变为 $f_1(x)$。它也可以连续地变为按式(12.28)定义的函数 $f_1^{-1}(x)$。因此 $\Pi_1(\mathrm{SO}(3))$只包含两个元素$\{e\}$和$\{f_1\}$，并且有$\{f_1\}^2 = \{f_1\} * \{f_1\}^{-1} = \{e\}$。由此知道同伦群 $\Pi_1(\mathrm{SO}(3))$与 $Z_2$ 同构。相似地，有

$$\Pi_1(\mathrm{SO}(N)) = Z_2 \tag{12.33}$$

两个流形 $M_1$ 和 $M_2$ 的直积 $M_1 \otimes M_2$ 的同伦群为

$$\Pi_1(M_1 \otimes M_2) = \Pi_1(M_1) \oplus \Pi_1(M_2) \tag{12.34}$$

**例 6** 二维环面 $T^2$ 可以看作是直积

$$T^2 = S^1 \otimes S^1$$

因此

$$\Pi_1(T^2) = Z \oplus Z \tag{12.35}$$

一阶同伦群 $\Pi_1(M)$还不足以完全刻画 $M$ 的拓扑性质。例如,在 $R^3$ 中挖去一个洞 $H^3$ 的流形中任何封闭曲线都能连续地收缩为一点。$\Pi_1(M)$不能区别 $R^3$ 和 $R^3-H^3$ 两个流形的不同拓扑性质。但是如果我们考虑二维封闭曲面就可以区别 $R^3$ 与 $R^3-H^3$。在 $R^3-H^3$ 中包围 $H^3$ 的二维封闭曲面不能收缩为一点。为了进一步刻画各种流形的拓扑性质可以用高阶同伦群的概念。考虑所有把 $I^n$ 映入$M$ 的连续映射式(12.23),所有能够通过在 $M$ 内连续变形变为映射 $f_i$ 的映射构成一个 $n$ 阶同伦类$\{f_i\}$。同伦类$\{f_i\}$的集合记作 $\Pi_n(M)$。在 $\Pi_n(M)$中也可以与在 $\Pi_1(M)$中类似地定义同伦类的乘积$\{f_i\} * \{f_j\}$,两个映射的乘积定义为

$$\begin{aligned}(f_i \cdot f_j)(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= f_i(2x_1,x_2,\cdots,x_n), \qquad \text{当} 0 \leqslant x_1 \leqslant \frac{1}{2} \\ &= f_j(2x_1-1,x_2,\cdots,x_n), \quad \text{当}\frac{1}{2} \leqslant x_1 \leqslant 1\end{aligned}$$

$\Pi_n(M)$按乘法的定义构成一个群,称为 $n$ 阶同伦群。

与 $\Pi_1(S^1)=Z$ 一样我们有

$$\Pi_n(S^n) = Z \tag{12.36}$$

这里,映射 $S^n \to S'^n$ 的同伦类代表$S^n$ 在$S'^n$ 中的映像覆盖$S'^n$ 的次数。容易看出

$$\Pi_l(S^n) = 0, \qquad l < n \tag{12.37}$$

由式(12.37)和式(12.36)可以得出

$$\Pi_1(\mathrm{SU}(2)) = \Pi_2(\mathrm{SU}(2)) = 0, \qquad \Pi_3(\mathrm{SU}(2)) = Z$$

我们在表 12.1 中列出关于群流形的同伦群的一些结果。

**表 12.1**

| $M$ / $\Pi_k(M)$ | U(1) | SU(2) | SU(N) $N\geqslant3$ | SO(3) | SO(4) | SO(5) | SO(6) | SO(N) $N\geqslant7$ | Sp(N) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pi_1(M)$ | $Z$ | 0 | 0 | $Z_2$ | $Z_2$ | $Z_2$ | $Z_2$ | $Z_2$ | 0 |
| $\Pi_2(M)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\Pi_3(M)$ | 0 | $Z$ | $Z$ | $Z$ | $Z\oplus Z$ | $Z$ | $Z$ | $Z$ | $Z$ |
| $\Pi_4(M)$ | 0 | $Z_2$ | 0 | $Z_2$ | $Z_2\oplus Z_2$ | $Z_2$ | 0 | 0 | $Z_2$ |
| $\Pi_5(M)$ | 0 | $Z_2$ | $Z$ | $Z_2$ | $Z_2\oplus Z_2$ | $Z_2$ | $Z$ | 0 | $Z_2$ |

另外一个以后有用的结果是关于陪集的同伦群的,设 $G$ 是单连通的或者有一

个单连通的泛覆盖群$\widetilde{G}$，$H$ 是$G$ 的一个子群，则

$$\Pi_2(G/H) = \Pi_1(H) \tag{12.38}$$

## 12.3 涡　　线

在超导现象中，当外磁场的强度 $H$ 小于临界值$H_c$ 时，磁力线不能进入超导体，这就是所谓 Meissner 效应。但是对于第二类超导体，当 $H$ 超过$H_c$ 时，磁力线束可以穿过超导体内部形成一些管状结构，在每个管中的磁通量是量子化的。这个现象称为涡线。Abrikosov 首先由描述外磁场中的超导体的 Ginsburg-Landau 方程预言涡线的存在，这个预言后来为实验所证实。由 Ginsburg-Landau 方程的对比，Nielson 和 Olesen 证明了在 Higgs 场与规范场耦合的相对论性方程中也存在涡线解[7]。涡线解实际上是一种二维空间的拓扑性孤粒子。在本节中，我们将以它为例说明上节中叙述的拓扑概念在孤粒子理论中的应用。

考虑一个复 Higgs 场 $\varphi(x)$与 U(1)规范场 $A_\mu(x)$的相互作用。这个理论的拉氏量密度为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - (D_\mu\varphi)^*(D_\mu\varphi) - \frac{1}{4}\lambda\left(\varphi^*\varphi - \frac{m^2}{\lambda}\right)^2 \tag{12.39}$$

其中，$D_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu$。场的能量为

$$H = \int \mathrm{d}^3x\Big[\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E} + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B} + (D_0\varphi)^*(D_0\varphi)$$

$$+ (D_i\varphi)^*(D_i\varphi) + \frac{1}{4}\lambda\left(\varphi^*\varphi - \frac{m^2}{\lambda}\right)^2\Big] \tag{12.40}$$

我们取 $A_0(x)=0$ 的规范。静态轴对称的单位长度能量有限的解必须满足如下的边界条件

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \to \infty \text{ 时}$$

$$|\varphi(x)|^2 \to \frac{m^2}{\lambda} \tag{12.41}$$

$$D_i\varphi(x) = (\partial_i - \mathrm{i}eA_i(x))\varphi(x) \to O(\rho^{-2}) \tag{12.42}$$

$$F_{ij} \to O(\rho^{-2}) \tag{12.43}$$

由式(12.43)知道，$\rho\to\infty$时 $A_i(x)$趋于纯规范

$$A_i(x) \to \frac{1}{e}\partial_i\chi(x) \tag{12.44}$$

由式(12.41)、(12.42)及(12.44)得到

$$\varphi(x) \to \frac{m}{\sqrt{\lambda}}\exp\left\{ie\int_{x_0}^{x} A_i(y)\mathrm{d}y_i\right\}e^{i\chi(x_0)} = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}\exp\{i\chi(x)\} \tag{12.45}$$

考虑半径趋于∞的在 $x-y$ 平面上的一个大圆 $S^1$，在圆 $S^1$ 上，$\chi$ 是角度 $\theta$ 的函数 $\chi(\theta)$。由 $\varphi(x)$的单值性得到

$$\chi(2\pi) - \chi(0) = 2n\pi, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{12.46}$$

在圆 $S^1$ 上，式(12.45)右方是一个把圆 $S^1$ 映入 U(1)的映射。由 12.2 节的讨论知道，有关的同伦群为 $\Pi_1(\mathrm{U}(1))=Z$。式(12.46)中的 $n$ 正是$\Pi_1(\mathrm{U}(1))$的元素，它是 $\theta$ 由 0 变到 $2\pi$ 时函数 $\chi(\theta)$覆盖 U(1)流形的次数。由于有不同 $n$ 值的解不能通过连续变形互相连接，按照 12.1 节中的讨论，$n\neq0$ 的解有拓扑的稳定性，它们是拓扑性孤粒子解。由 Stokes 定理

$$\chi(2\pi) - \chi(0) = e\int_{S^1} A_i(y)\mathrm{d}y_i = e\int_{\Sigma}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}$$

其中，$\Sigma$ 为圆 $S^1$ 所张的面。由上式及式(12.46)得到，大圆 $S^1$ 所包围的磁通量为

$$\boldsymbol{\Phi} = \frac{2\pi}{e}n, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{12.47}$$

上式说明，磁通量是量子化的。

$n\neq0$ 的解是否确实存在，不能由拓扑的考虑得出结论。但是在文献[7]中证明了，这个理论的场方程确有 $n\neq0$ 的单位长度能量有限的解，它有如下的形式

$$A_0 = 0, \qquad \boldsymbol{A}(\rho,\theta) = f(\rho)\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\varphi = F(\rho)\exp(in\theta)$$

其中，$\hat{\boldsymbol{\theta}}$为 $\theta$ 方向的单位矢量。在这个解中量子化的磁通量集中在一个半径量级为 $m_V^{-1}$ 的管内，形成了涡线。这里 $m_V = \frac{e}{\sqrt{\lambda}}m$ 为规范粒子由 Higgs 机制得到的质量。

上面的同伦群的考虑可以推广应用到多分量 Higgs 场 $\phi$ 与非 Abel 规范场的理论。由能量有限的要求得到

$$D_i\phi = (\partial_i - igA_i^aT_a)\phi \to 0, \qquad \rho \to \infty$$

其中，$T_a$ 是规范群 $G$ 的生成元。因此在大圆 $S^1$ 上

$$\phi(x) \sim P\exp\left\{ig\int_{x_0}^{x} A_i^a(y)T_a\mathrm{d}x_i\right\}\phi(x_0) \tag{12.48}$$

其中，$P$ 表示按积分路径的次序排列矩阵。由于式(12.48)中的矩阵是群 $G$ 的元素，这里有关的同伦群是 $\Pi_1(G)$。如果规范群 $G$ 为 SU($N$)，则因 $\Pi_1(\mathrm{SU}(N))=0$，故不可能有涡线解。如果规范群为 SO($N$)，则由于 $\Pi_1(\mathrm{SO}(N))=Z_2$，故只有非 Abel 磁通量为 ±1 个单位的涡线解。

## 12.4　Dirac 的磁单极理论

经典电磁场的 Maxwell 方程式包含两个方程组

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = -j_\nu, \qquad \partial_\mu \widetilde{F}_{\mu\nu} = 0 \tag{12.49}$$

上式中我们已把 $e$ 包含在 $j_\nu$ 中了。在真空中 $j_\nu = 0$,这时方程组(12.49)在电磁对耦变换

$$F_{\mu\nu} \to \widetilde{F}_{\mu\nu}, \qquad \widetilde{F}_{\mu\nu} \to -F_{\mu\nu} \tag{12.50}$$

下是对称的。在变换式(12.50)下 $\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}\to-\boldsymbol{E}$。然而由于式(12.49)中包含电流而没有磁流,经典电磁理论并没有完全的电和磁的对称。如果我们相信电和磁应当是对称的,则应当引入磁流密度 $\tilde{j}_\mu = (\sigma, \tilde{j}_i)$,并把方程组(12.49)修改为

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = -j_\nu, \qquad \partial_\mu \widetilde{F}_{\mu\nu} = -\tilde{j}_\nu \tag{12.51}$$

如果在做变换式(12.50)的同时,做电流和磁流的对偶变换

$$j_\mu \to \tilde{j}_\mu, \qquad \tilde{j}_\mu \to -j_\mu \tag{12.52}$$

方程组(12.51)是完全对称的。在式(12.50)和式(12.52)下,$F_{\mu\nu}$ 与 $\widetilde{F}_{\mu\nu}$ 以及 $j_\mu$ 与 $\tilde{j}_\mu$ 的变换如同两维空间互相垂直的两个矢量在 90°转动下的变换。引入磁流意味着存在磁单极子,它所带的磁荷用 $g$ 表示。

在磁流不等于零处,由于 $\partial_\mu \widetilde{F}_{\mu\nu} \neq 0$,$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ 不能成立,场强不能用势 $A_\mu(x)$ 表示。然而在量子理论中,电磁势 $A_\mu(x)$ 起着基本的作用。规范势 $A_\mu$ 进入带电粒子在电磁场中运动的 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})^2 + qA_0\right]\psi \tag{12.53}$$

Aharonov-Bohm 效应的存在表明,规范势 $A_\mu$ 的环路积分是有独立的观察效应的。因此就产生了磁荷的存在与量子力学是否相容的问题。为了避免这个困难,我们只限于讨论点磁单极子。但是即使点磁单极子也有一些要解决的问题。这些问题是 Dirac 所最先研究的[8]。考虑一个磁荷为 $g$ 的点磁单极子。它的磁场为

$$\boldsymbol{B} = g\frac{\boldsymbol{r}}{4\pi r^3} \tag{12.54}$$

它发出的磁通量为

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = g \tag{12.55}$$

在无穷远处磁场强度趋于零。如果它能用规范势 $A_\mu(x)$ 表示,$A_\mu$ 应趋于纯规范。这时 Schrödinger 方程(12.53)的解在无穷远处满足方程

$$\psi(x)=\exp\left\{\mathrm{i}\int_{x_0}^{x}qA_\mu(x')\mathrm{d}x_\mu'\right\}\psi(x_0)$$

由上式及波函数的单值性得到条件

$$q\oint_C A_\mu(x')\mathrm{d}x_\mu'=2n\pi,\qquad n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots \tag{12.56}$$

其中,$C$ 为在无穷远处的环路。由式(12.55)和式(12.56)并利用 Stokes 定理可得

$$\frac{gq}{2\pi}=n \tag{12.57}$$

式(12.57)称为 Dirac 磁荷量子化条件,它表示磁荷值只能取$\frac{2\pi}{q}$的整数倍。这是磁单极子与量子力学相容的条件。

另一方面,我们设想把环路 $C$ 连续地变形但仍保持它在无穷远处。如果 $A_\mu(x)$是连续函数,$n$ 的值在这样的变形中不会改变。但是如果我们最后把 $C$ 缩为一点,式(12.56)中的积分显然应为零。这就产生了矛盾。由此知道 $A_\mu(x)$必然有奇异线。为了具体地说明这一点,让我们考虑一个沿负 $z$ 轴放置的无限长的细螺线管,设其磁通量也为 $g$。这个螺线管的磁场为

$$\boldsymbol{B}'=g\frac{\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}+g\delta(x)\delta(y)\theta(-z)\hat{\boldsymbol{k}} \tag{12.58}$$

其中,$\hat{\boldsymbol{k}}$为沿 $z$ 轴方向的单位矢量。它代表集中在螺线管内的磁通量 $g$ 和由于磁力线连续而由位于原点的螺线管一端放出的球对称分布的磁通量。螺线管的磁场 $\boldsymbol{B}'$散度为零,它可以用电磁势表示为 $\boldsymbol{B}'=\nabla\times\boldsymbol{A}$,其中 $\boldsymbol{A}$ 只在负 $z$ 轴上有奇异。由式(12.54)和(12.58),点磁单极子的磁场可写为

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}-g\delta(x)\delta(y)\theta(-z)\hat{\boldsymbol{k}} \tag{12.59}$$

这表示点磁单极子的磁场可以用一个势 $A_\mu(x)$和一根奇异弦表示。这种奇异弦称为 Dirac 弦。

由以上的推导过程可以看出,Dirac 弦的位置不一定要沿着负 $z$ 轴,它可以放置在由原点到无穷远的任意曲线上。一般来说,磁单极子的磁场可写为

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})+g\boldsymbol{t}(C,r) \tag{12.60}$$

其中,$C$ 是由原点到无穷远的一条曲线,$\boldsymbol{t}(C,\boldsymbol{r})$是沿曲线 $C$ 的奇异弦。由此可知,Dirac 弦所在之处不是物理的奇点。实际上,Dirac 弦的奇异与$\nabla\times\boldsymbol{A}$ 的奇异抵消,使得 $\boldsymbol{B}$ 除在原点外有限。可以证明,Dirac 弦位置的移动可以用势 $A_\mu(x)$的规范变换实现。考虑两条由原点到$\infty$的曲线 $C$ 和$C'$。$C$ 和 $-C'$构成环路$\Gamma$。令 $S$ 为$\Gamma$ 所张的面,$\Omega(\boldsymbol{r})$为 $S$ 对$\boldsymbol{r}$ 点所张的立体角。作为连续函数,$\Omega(\boldsymbol{r})$是多值的,当 $\boldsymbol{r}$ 绕$C$ 或$C'$穿过$S$ 转一圈时,$\Omega(\boldsymbol{r})$改变 $4\pi$。因此 $\Omega(\boldsymbol{r})$只确定到相差一个 $4\pi$

的整倍数，但$\nabla\Omega$是单值的。做规范变换

$$\boldsymbol{A}(C,\boldsymbol{r}) \to \boldsymbol{A}(C',\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{A}(C,\boldsymbol{r}) - \frac{g}{4\pi}\nabla\Omega \quad (12.61)$$

现在考虑一个环绕曲线 $C$ 的无穷小回路$\gamma$，由 Stokes 定理有

$$\begin{aligned}&\int_\sigma \nabla\times(\boldsymbol{A}(C',\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{A}(C,\boldsymbol{r}))\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\\ &= \int_\gamma (\boldsymbol{A}(C',\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{A}(C,\boldsymbol{r}))\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\\ &= -\frac{g}{4\pi}\oint_\gamma \nabla\Omega\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{g}{4\pi}\oint_\gamma \mathrm{d}\Omega = -g \qquad (12.62)\end{aligned}$$

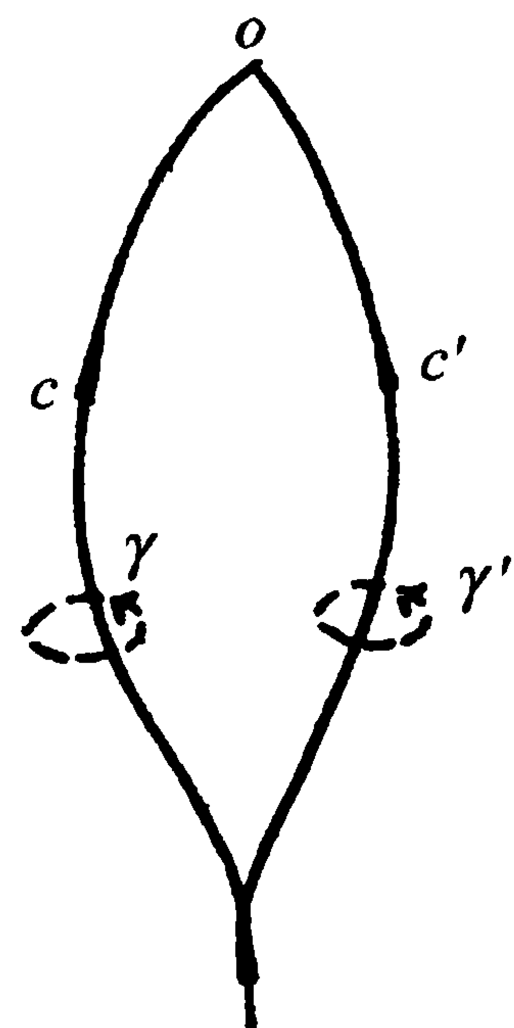



图 12.5

上式说明$\nabla\times\boldsymbol{A}(C',\boldsymbol{r})$在曲线 $C$ 上没有磁通量。同样地，如果对环绕 $C'$的无穷小回路做$(\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{A})$的线积分可证$\nabla\times\boldsymbol{A}(C',\boldsymbol{r})$在 $C'$上有磁通量 $g$。由此得到

$$\nabla\times\boldsymbol{A}(C,\boldsymbol{r}) + g\boldsymbol{t}(C,\boldsymbol{r}) = \nabla\times\boldsymbol{A}(C',\boldsymbol{r}) + g\boldsymbol{t}(C',\boldsymbol{r})$$

这意味着规范变换式(12.61)把奇异弦由 $C$ 移到$C'$。

由于在 Dirac 弦上磁单极子的磁场不能用规范势表示，我们必须考虑 Dirac 弦的存在是否与量子力学相容。量子力学的 Schrödinger 方程(12.53)可用于弦外的空间。为了证明 Dirac 弦以及弦上规范势 $A_\mu$ 的奇异没有物理效应，我们来证明可以做规范变换式(12.61)把 Dirac 弦从原来所在的曲线上移去。在做变换式(12.61)的同时，须对带电粒子波函数 $\psi$ 做规范变换

$$\psi(\boldsymbol{r}) \to \psi(\boldsymbol{r})\exp\left\{-\mathrm{i}\frac{qg}{4\pi}\Omega(\boldsymbol{r})\right\} \qquad (12.63)$$

这时式(12.53)保持不变。问题是，$\Omega(\boldsymbol{r})$是多值函数，它的值只确定到 $4\pi$ 的整倍数，为保证波函数的单值性，我们再次得到 Dirac 的磁荷量子化条件式(12.57)。在这个条件满足时，变换式(12.63)是容许的，这就保证了奇异弦的存在与量子力学不矛盾。

吴大峻和杨振宁在文献[9]中提出了磁单极子电磁势的另一种方案。他们的方案不需要引入奇异弦。令 $r,\theta,\phi$ 为球坐标，容易验证一个放置在原点的磁单极子的磁场在 $\theta<\pi$ 处可以用如下的规范势描述

$$A_0 = A_r = A_\theta = 0$$

$$A_\phi = \frac{g}{4\pi}\frac{1-\cos\theta}{r\sin\theta} \qquad (12.64)$$

但是式(12.64)在 $\theta=\pi$ 处是奇异的。同一个磁场在 $\theta>0$ 处可以用如下的规范势描述

$$A_0{}' = A_r{}' = A_\theta{}' = 0$$

$$A_\phi{}' = -\frac{g}{4\pi}\frac{1+\cos\theta}{r\sin\theta} \tag{12.65}$$

式(12.65)在 $\theta=0$ 处是奇异的。文献[9]中的方法是考虑三维空间中满足条件 $\theta<\pi-\theta_0$ 的区域 $R_a$，其中 $\theta_0<\frac{\pi}{2}$。在 $R_a$ 中规范势式(12.64)不奇异，可以用它描述磁单极子的磁场。同样可以考虑满足条件 $\theta>\theta_0$ 的区域 $R_b$。式(12.65)在 $R_b$ 中不奇异，可以用它描述同一磁单极子的磁场。在 $R_a$ 和 $R_b$ 重叠的区域 $R_{ab}$ ($\theta_0<\theta<\pi-\theta_0$)有两个规范势 $A_\mu{}'$ 和 $A_\mu$。由于 $\nabla\times\boldsymbol{A}-\nabla\times\boldsymbol{A}'=0$，$A_\mu{}'-A_\mu$ 可表为一个梯度，实际上

$$A_\mu{}'(\boldsymbol{r}) - A_\mu(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{q}\partial_\mu\alpha(\boldsymbol{r}) \tag{12.66}$$

$$\alpha(\boldsymbol{r}) = \frac{gq}{2\pi}\phi \tag{12.67}$$

式(12.66)形式上是一个规范变换，问题是，式(12.67)中的 $\alpha(\boldsymbol{r})$ 不是单值的。由于 $\nabla\alpha$ 是单值的，$A_\mu$ 的变换不受影响。但是在量子力学中，带电粒子波函数要变为

$$\psi(\boldsymbol{r}) \to \exp(-\mathrm{i}\alpha(\boldsymbol{r}))\psi(\boldsymbol{r}) \tag{12.68}$$

由波函数的单值性及式(12.67)得到 Dirac 磁荷量子化条件式(12.57)。在这个条件下，式(12.66)～(12.68)构成一个量子力学容许的规范变换。

在空间两个区域分别用不同的规范势，它们在重叠的区域相差一个规范变换，这是数学中非平凡的纤维丛的例子。在磁单极的情况不能用一个统一的非奇异的规范势描述磁场，这是规范势有非平凡的拓扑性质的结果。事实上，在区域 $R_{ab}$ 中的一个环路 $C$ 上规范变换因子 $\exp(-\mathrm{i}\alpha(\boldsymbol{r}))$ 是一个由 $S^1$ 到 U(1)的映射，它的拓扑性质可以用同伦群 $\Pi_1(\mathrm{U}(1))=Z$ 表征。在磁单极存在时，规范变换 $\exp(-\mathrm{i}\alpha)$ 属于 $\Pi_1(\mathrm{U}(1))$ 中的非平凡同伦类。这一点说明了磁荷的拓扑意义。考虑环路 $C$ 所张的两个分别在 $R_a$ 和 $R_b$ 中的曲面，它们构成一个把磁单极子包围在其中的封闭曲面 $S$。由上面的讨论及 Stokes 定理得到

$$\oiint_S F_{ij}\mathrm{d}\sigma_{ij} = \oint_C \boldsymbol{A}'\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{l} - \oint_C \boldsymbol{A}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{l} = -\frac{1}{q}\oint_C \nabla\alpha\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{2\pi n}{q}$$

由上式可知，穿过封闭曲面的磁通量是与 $\Pi_1(\mathrm{U}(1))$ 联系的拓扑不变量，在纤维丛理论中称为第一陈数[20]。

## 12.5 非 Abel 规范理论中的磁单极子

U(1)规范理论只能容纳点磁单极子。这种粒子所在之处是场方程的奇点，它

的磁场有无穷大的能量。因此它们不是孤粒子。'tHooft 和 Polyakov[10] 发现,如果电磁作用是自发破缺的非 Abel 规范作用的一部分,则可能存在能量有限的非点状磁单极子。这是一种三维空间的拓扑性孤粒子。

考虑多分量实 Higgs 场 $\phi$ 与非 Abel 规范场 $A_\mu$ 的作用。拉氏量密度可写为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}-\frac{1}{2}(D_\mu\phi)(D_\mu\phi)-V(\phi) \tag{12.69}$$

场的能量为

$$H=\int \mathrm{d}^3x\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}^a\cdot\boldsymbol{B}^a+\boldsymbol{E}^a\cdot\boldsymbol{E}^a)+\frac{1}{2}(D_0\phi)(D_0\phi)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}(D_i\phi)(D_i\phi)+V(\phi)\right] \tag{12.70}$$

它们在规范群 $G$ 的变换是下不变的。设 $V(\phi)$的一个绝对极小在 $\phi=\phi_0$($\phi_0$ 与 $x$ 无关)处,并且 $V(\phi_0)=0$。令 $U(g)$为群 $G$ 的元素在 $\phi$ 场所属表示中的矩阵。设 $H$ 为保持 $\phi_0$ 不变的子群,则所有满足

$$\phi(x)=U(g(x))\phi_0=\rho(x),\qquad g\in G/H \tag{12.71}$$

的场都是在势能 $V(\phi)$的绝对极小处

$$V(\rho(x))=0 \tag{12.72}$$

这里,$\rho(x)$可以是坐标的函数。由式(12.70)和(12.72)可以看到,能量有限的解在 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\to\infty$处必须满足条件

$$\phi(x)\to\rho(x) \tag{12.73}$$

$$\boldsymbol{E}(x),\boldsymbol{B}(x)\to O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$A_\mu\to-\frac{\mathrm{i}}{g}\partial_\mu U\cdot U^{-1}+O\left(\frac{1}{r}\right) \tag{12.74}$$

$$D_\mu\phi\to O\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{12.75}$$

我们现在来研究式(12.73)的含义。考虑半径 $R$ 趋于无穷的二维球面$S^2$。由式(12.71)知道,$\rho(x)$是一个把 $S^2$ 映入陪集 $G/H$ 的连续映射,$\rho: S^2\to G/H$。它的拓扑性质由二阶同伦群 $\Pi_2(G/H)$中的同伦类表征,它表示 $\rho(x)$覆盖流形 $G/H$ 的次数。存在三维拓扑性孤粒子的必要条件是

$$\Pi_2(G/H)\neq 0 \tag{12.76}$$

由式(12.38),当 $G$ 有单连通的覆盖群时,此条件可化为

$$\Pi_1(H)\neq 0 \tag{12.77}$$

由 12.2 节中叙述的关于 $\Pi_1(M)$的结果知道，如果 $H=\mathrm{U}(1)$或者是 U(1)与另一个群的直积，则条件式(12.77)可以满足。

由式(12.71)知道，在 $r\to\infty$时，$|\phi(x)|\to|\rho(x)|=\phi_0$。但是，对于拓扑性孤粒子解，为使 $\rho(x)$是 $\Pi_2(G/H)$中非平凡的同伦类，当 $x$ 在大球面 $S^2$ 上移动时，$\rho(x)$在内部空间中必须是变化的。由此知道

$$\partial_\theta\phi \to \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\rho(x) = O\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\partial_\varphi\phi \to \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\rho(x) = O\left(\frac{1}{r}\right) \tag{12.78}$$

因此为满足条件式(12.75)，$A_\theta$ 和 $A_\varphi$ 在 $r\to\infty$时必须有 $O\left(\frac{1}{r}\right)$的量级的项。规范势的这一项不能通过连续的规范变换变为零，否则 $\rho(x)$就可以通过连续的规范变换变为 $\phi_0$，因而是 $\Pi_1(G/H)$中的平凡同伦类。由此知道场强 $\boldsymbol{B}$ 在无穷远处必有$O\left(\frac{1}{r^2}\right)$的项。在静态解中可取$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=0$，因此如 $A_0=0$ 这个渐近场没有 $\boldsymbol{E}$。不妨设在无穷远的一点 $x_0$ 处 $\rho(x_0)=\phi_0$。由式(12.75)得

$$\phi(x) = P\exp\left(\int_{x_0}^{x}\mathrm{i}g\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\right)\cdot\phi_0$$

虽然上式是陪集 $G/H$ 上的变换，但是当 $x$ 绕一小圈$C$ 回到$x_0$ 时，由 $\phi(x)$ 的单值性得到 $P\exp\int_C(\mathrm{i}e\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l})$ 必须是小群 $H$ 的元素。当 $C$ 缩到无穷小时可知，$\boldsymbol{B}(x_0)$是小群 $H$ 的规范场。一般来说，无穷远点 $x$ 的场$\boldsymbol{B}(x)$是子群 $Hg(x)$ 的规范场。以上讨论说明，如果小群 $H$ 包含 $\mathrm{U}(1)_{\mathrm{em}}$，这个理论中的孤粒子就是一种能量有限的磁单极子。

文献[10]中考虑的是一个 SO(3) 规范模型，其中 Higgs 场属于三维矢量表示。这时式(12.69) 中的 $V(\phi)$ 可写为

$$V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda\left(\phi^a\phi^a - \frac{m^2}{\lambda}\right)^2, \qquad a = 1,2,3 \tag{12.79}$$

这个模型原来是 Georgi 和 Glashow 提出来的一个弱电统一模型，由于其中没有中性弱作用流而为实验所否定，但它是有三维拓扑性孤粒子的最简单的模型。作为一个三维矢量，真空平均值 $\phi_0$ 总可以通过 SO(3)转动变为

$$\phi_0 = \begin{pmatrix}0\\0\\\frac{m}{\sqrt{\lambda}}\end{pmatrix} \tag{12.80}$$

上式表示真空的小群是 $H = SO(2) = U(1)$，因此式(12.77)是满足的。在这个模型中运动方程为

$$D_\mu D_\mu \phi^a = \lambda\left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda}\right)\phi^a \tag{12.81}$$

$$D_\mu F^a_{\mu\nu} = e\varepsilon_{abc}\phi^b D_\nu \phi^c \tag{12.82}$$

其中

$$D_\mu \phi^a = (\partial_\mu \phi^a + e\varepsilon_{abc}A^b_\mu \phi^c)$$

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + e\varepsilon_{abc}A^b_\mu A^c_\nu \tag{12.83}$$

根据上面的讨论，为求方程(12.81)和(12.82)的静态拓扑性孤粒子解，可尝试取

$$\phi^a(x) = x_a \frac{h(\xi)}{er^2} \tag{12.84}$$

$$A^a_0(x) = 0, \qquad A^a_i(x) = \varepsilon_{aij}\frac{x_j[1 - f(\xi)]}{er^2} \tag{12.85}$$

其中，$\xi = \frac{em}{\sqrt{\lambda}}r$。要求 $\xi \to \infty$ 时

$$h(\xi) \to \xi, \qquad f(\xi) \to 0 \tag{12.86}$$

容易验证，式(12.84)～(12.86)满足条件式(12.73)～(12.75)。在内部空间中，矢量 $\phi(\boldsymbol{r})$ 的方向在 $r \to \infty$ 时与 $\boldsymbol{r}$ 一致，如图 12.6(b)所示。当 $\boldsymbol{r}$ 跑遍 $S^2$ 时，$\phi(\boldsymbol{r})$ 恰巧覆盖内部空间球面 $\phi^a\phi^a = \frac{m^2}{\lambda}$ 一次，它显然不能通过连续的变形变到如图 12.6(a)所示的真空状态。因此它属于 $\Pi_2(SO(3)/U(1))$ 中的非平凡同伦类。将式(12.84)和(12.85)代入式(12.81)和(12.82)得到

$$\xi^2 f'' = f(f^2 - 1) + fh^2 \tag{12.87}$$

$$\xi^2 h'' = 2hf^2 + \frac{\lambda}{e^2}h(h^2 - \xi^2) \tag{12.88}$$

场的能量为

$$H = 4\pi \frac{m}{e\sqrt{\lambda}}\int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2}\left[\xi^2\left(\frac{df}{d\xi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\xi\frac{dh}{d\xi} - h\right)^2 + \frac{1}{2}(f^2 - 1)^2 + f^2h^2 + \frac{\lambda}{4e^2}(h^2 - \xi^2)^2\right] \tag{12.89}$$

$f(\xi) = 0, h(\xi) = \xi$ 是方程组(12.87)和(12.88)的一个严格解。但是它的能量是 $\infty$。对能量有限的解 $f(\xi)$ 和 $h(\xi)$ 除在无穷远处须满足边界条件式(12.86)以外，在原点外还须满足边界条件

$$f(\xi)=\pm 1+O(\xi), \qquad h(\xi)=O(\xi) \tag{12.90}$$

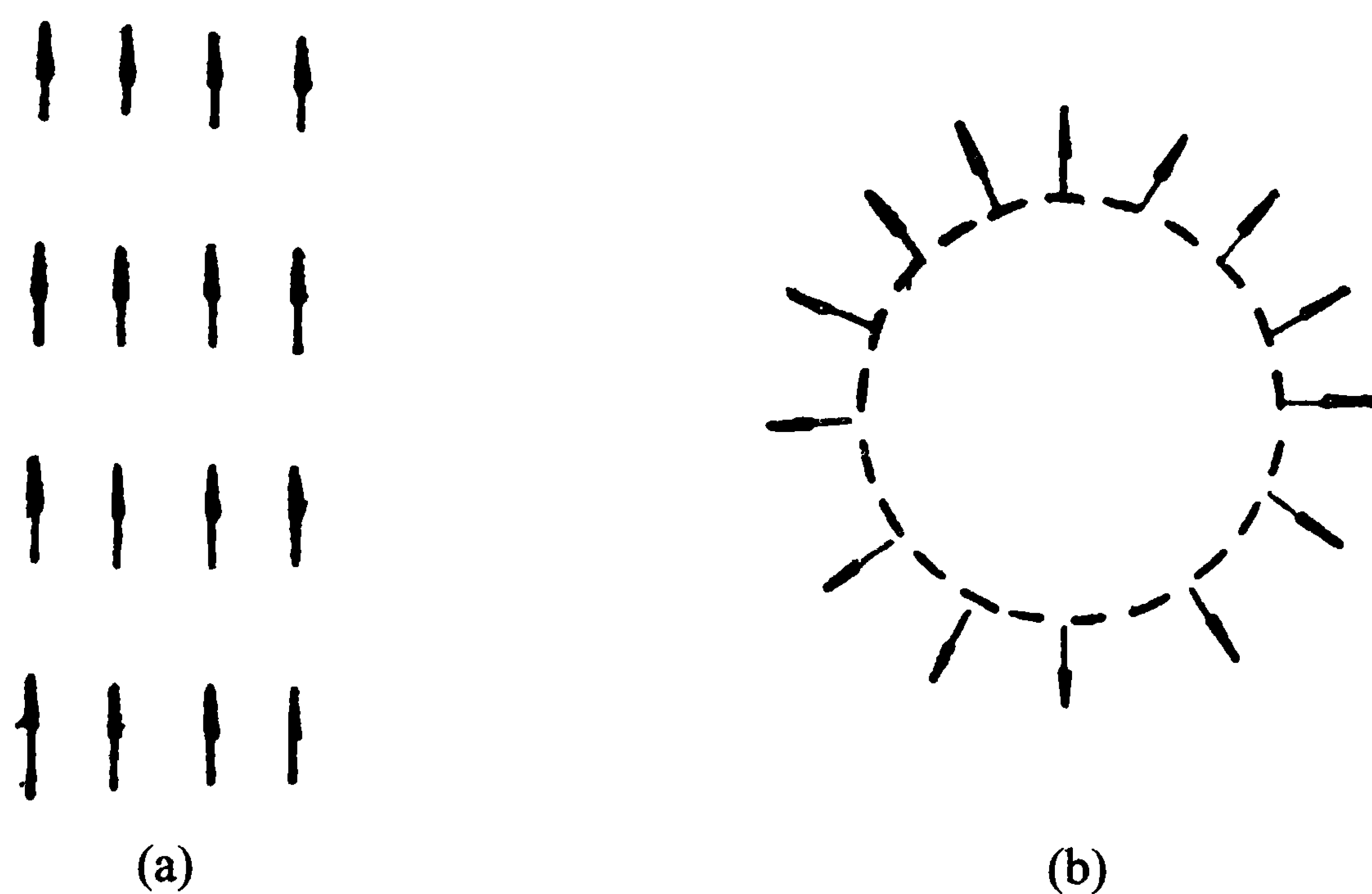



图 12.6

静态解由能量变分的极小给出。由于式(12.89)中各项都是正定的,方程组(12.87)和(12.88)的有限能量解是存在的。这个孤粒子解的解析表达式不能得到,但是由式(12.89)知道,它的质量表达式有如下的形式

$$M=4\pi\frac{m}{e\sqrt{\lambda}}F\left(\frac{\lambda}{e^2}\right)=\frac{m_V}{\alpha}F\left(\frac{\lambda}{e^2}\right) \tag{12.91}$$

其中,$m_V$ 为相应于破缺了的生成元的规范粒子的质量。数值计算表明,在 $\lambda=0-O(e^2)$的范围内 $F\left(\frac{\lambda}{e^2}\right)=O(1)$。

Prasad 和 Sommerfield 考虑如下的极限[11]

$$\lambda\to 0, \qquad e,\frac{m}{\sqrt{\lambda}}\ \text{固定} \tag{12.92}$$

在这个极限下,方程(12.88)中最后一项消失。但边界条件式(12.86)和(12.90)仍保持。这时方程组(12.87)和(12.88)可以严格解出,得到

$$f(\xi)=\frac{\xi}{\sinh\xi}, \qquad h(\xi)=\frac{\xi}{\tanh\xi}-1 \tag{12.93}$$

在这个极限下,孤粒子质量为

$$M=\frac{m_V}{\alpha} \tag{12.94}$$

孤粒子解的形式大致如图 12.7 所示。在一个有限的球以外,Higgs 场的绝对值$|\phi|$接近于真空值,规范场接近于它的渐近形式。在球内部 $r$ 趋于零时,Higgs 场和规范场都趋于零。在 Prasad-Sommerfield 极限下球的半径的量级为 $\xi=O(1)$,也就是 $r=O(m_V^{-1})$。Higgs 场的能量集中在球的内部。下面我们将证明,

在球的外部，规范场的渐近形式是一个磁单极子的磁场。因此这个解代表一个中心在原点的半径有限的磁单极子。

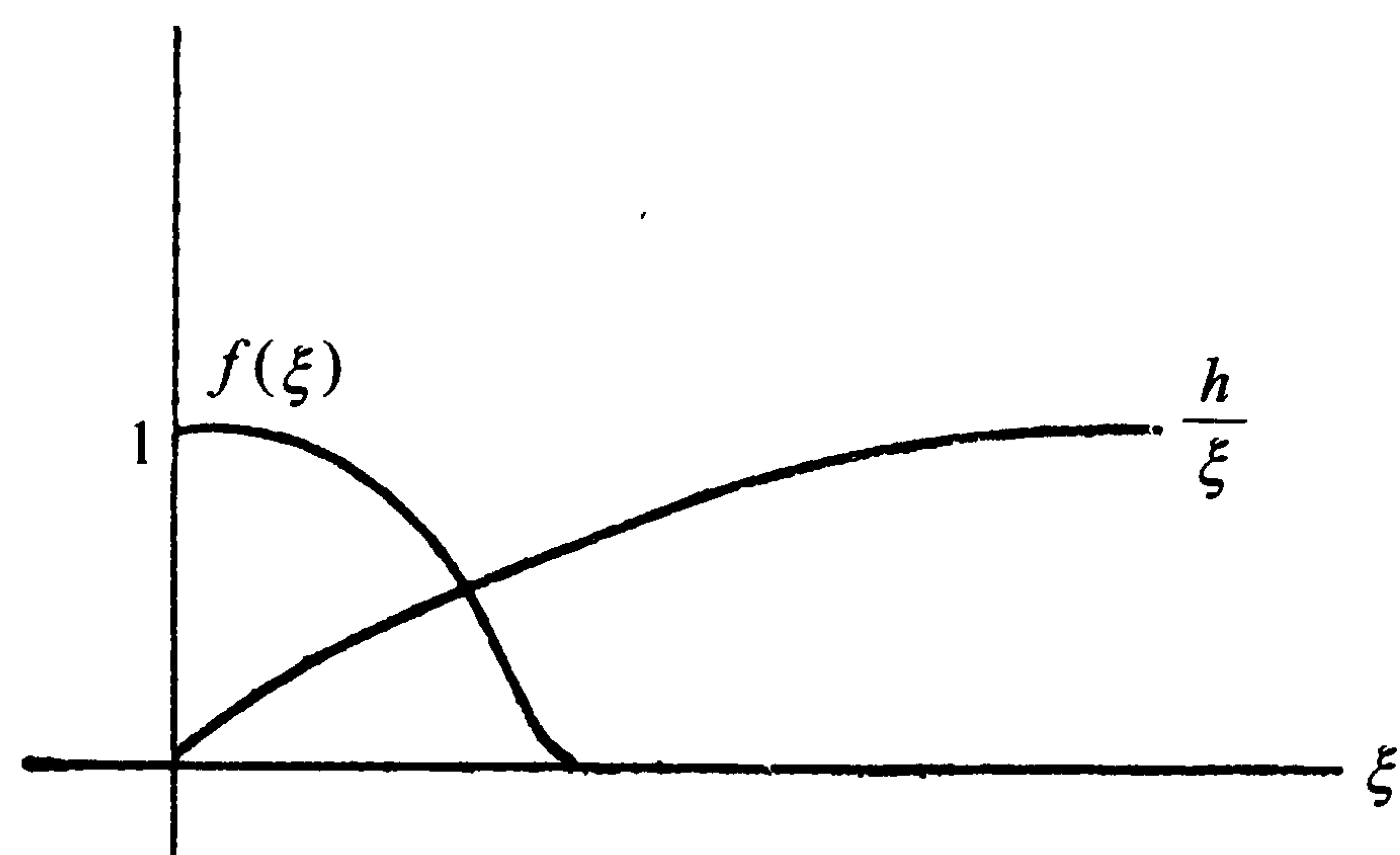



图 12.7

现在我们来计算这个解中的电磁场。在 SO(3)对称自发破缺到 $U(1)_{em}$ 的理论中，电荷矩阵的选取是由 Higgs 场真空平均值 $\phi_0$ 决定的。在拓扑性孤粒子不存在时，可以通过规范变换把 $\phi_0$ 写为式(12.80)的形式，这时电荷矩阵 $Q$ 为

$$Q=\begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & 0\end{pmatrix}=T_3 \tag{12.95}$$

电磁场张量定义为

$$F_{\mu\nu}^{Q}=\partial_{\mu}A_{\nu}^{Q}-\partial_{\nu}A_{\mu}^{Q} \tag{12.96}$$

$$A_{\mu}^{Q}\equiv\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(QA_{\mu})=A_{\mu}^{3}=\frac{1}{v}\phi_{0}^{a}\cdot A_{\mu}^{a} \tag{12.97}$$

这个定义不是规范不变的，它不宜用于拓扑性孤粒子的情况。因为在拓扑性孤粒子解中，Higgs 场不能通过连续的规范变换变为 $\phi^a=\phi_0^a$。在这种情况下如果仍要用定义式(12.97)，只有用非连续的规范变换，这时必然会出现 Dirac 弦。在这个弦上电磁势 $A_{\mu}^{\theta}$ 奇异，场强不能用 $A_{\mu}^{Q}$表示。因此′tHooft 定义电磁场强为

$$F_{\mu\nu}^{Q}=\hat{\boldsymbol{\phi}}^{a}F_{\mu\nu}^{a}-\frac{1}{e}\varepsilon_{abc}\hat{\boldsymbol{\phi}}^{a}(D_{\mu}\hat{\boldsymbol{\phi}})^{b}(D_{\nu}\hat{\boldsymbol{\phi}})^{c},\quad \hat{\boldsymbol{\phi}}^{a}\equiv\frac{\boldsymbol{\phi}^{a}}{|\phi|} \tag{12.98}$$

这个定义是规范不变的。利用

$$\begin{aligned}\varepsilon_{abc}\hat{\boldsymbol{\phi}}^{a}(A_{\mu}\hat{\boldsymbol{\phi}})^{b}(A_{\nu}\hat{\boldsymbol{\phi}})^{c}&=\hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot(\boldsymbol{A}_{\mu}\times\hat{\boldsymbol{\phi}})\times(\boldsymbol{A}_{\nu}\times\boldsymbol{\phi})\\&=(\boldsymbol{A}_{\mu}\times\boldsymbol{A}_{\nu})\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}}\end{aligned} \tag{12.99}$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}\times(\boldsymbol{A}_{\mu}\times\hat{\boldsymbol{\phi}})\cdot\partial_{\nu}\hat{\boldsymbol{\phi}}+\mu\leftrightarrow\nu=\boldsymbol{A}_{\mu}\cdot\partial_{\nu}\hat{\boldsymbol{\phi}}-\boldsymbol{A}_{\nu}\cdot\partial_{\mu}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

不难证明式(12.98)可写为

$$F_{\mu\nu}^{Q}=\partial_{\mu}A_{\nu}^{Q}-\partial_{\nu}A_{\mu}^{Q}-\frac{1}{e}\varepsilon_{abc}\hat{\boldsymbol{\phi}}^{a}\partial_{\mu}\hat{\boldsymbol{\phi}}^{b}\partial_{\nu}\hat{\boldsymbol{\phi}}^{c} \tag{12.100}$$

$$A_{\mu}^{Q}=\hat{\boldsymbol{\phi}}^{a}A_{\mu}^{a}$$

在 Higgs 场可以通过连续的规范变换变为 $\phi^a=\phi_0^a$ 时上式显然回到式(12.97)。由孤粒子解式(12.84)～(12.86)的渐近形式可得，$r\rightarrow\infty$时

$$A_{\mu}^{Q} \to O\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{12.101}$$

$$F_{\mu\nu}^{Q} \to -\frac{1}{e}\varepsilon_{abc}\hat{\boldsymbol{\phi}}^{a}\partial_{\mu}\hat{\boldsymbol{\phi}}^{b}\partial_{\nu}\hat{\boldsymbol{\phi}}^{c} \to -\varepsilon_{ijk}\frac{x_k}{er^3}$$

即磁场强度

$$\boldsymbol{B} \to -\frac{\boldsymbol{r}}{er^3}, \qquad r \to \infty \tag{12.102}$$

这个解中电场 $\boldsymbol{E}=0$。因此它代表一个磁荷为 $g=-\frac{4\pi}{e}$的磁单极子。这个磁荷值是 Dirac 磁荷最小单位的 2 倍。方程组(12.81)和(12.82)在 $\phi \to -\phi$ 下是不变的。如果把式(12.84)中的 Higgs 场改一个符号就可以得到磁荷为 $g=\frac{4\pi}{e}$的反磁单极子解。

磁单极子解中磁荷的拓扑意义可以由如下的讨论更直接地看出来[12]。按磁流 $\tilde{j}_{\mu}$ 的定义及式(12.100)得

$$\tilde{j}_{\mu} = -\partial_{\nu}\tilde{F}_{\nu\mu}^{Q} = \frac{\mathrm{i}}{2e}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{abc}\partial_{\nu}(\hat{\boldsymbol{\phi}}^{a}\partial_{\rho}\hat{\boldsymbol{\phi}}^{b}\partial_{\sigma}\hat{\boldsymbol{\phi}}^{c}) \tag{12.103}$$

$\partial_{\mu}\tilde{j}_{\mu}=0$ 是 $\tilde{F}_{\mu\nu}$对指标 $\mu,\nu$ 反对称的自然结果。它不是由拉氏量的对称性导出的 Noether 流。由式(12.103)可得磁荷

$$g = \int \mathrm{d}^3 x\tilde{j}_0 = -\frac{1}{2e}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{abc}\oint_{S^2}\hat{\boldsymbol{\phi}}^{a}\partial_{j}\hat{\boldsymbol{\phi}}^{b}\partial_{k}\hat{\boldsymbol{\phi}}^{c}\mathrm{d}\sigma_i \tag{12.104}$$

其中,$S^2$ 为一个包围原点的无穷大球面。由于$\sum_a \hat{\boldsymbol{\phi}}^{a}\hat{\boldsymbol{\phi}}^{a}=1$,$\hat{\boldsymbol{\phi}}^{a}$ 在内部空间的单位球面 $S_{\mathrm{int}}^2$ 上。因此式(12.104)右方的被积函数是由 $S^2$ 到 $S_{\mathrm{int}}^2$ 的映射。在 $S^2$ 上可引入坐标 $\xi_l(l=1,2)$,把面积元写为

$$\mathrm{d}\sigma_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lm}\frac{\partial x_j}{\partial \xi_l}\frac{\partial x_k}{\partial \xi_m}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2$$

虽然在球面上坐标 $\xi_1,\xi_2$ 只能是局部的,但我们可以把 $S^2$ 分成两个部分,并分别积分。所以利用上式可以把式(12.104)写为

$$g = \frac{1}{2e}\varepsilon_{abc}\varepsilon_{lm}\oint_{S^2}\mathrm{d}^2\xi\hat{\boldsymbol{\phi}}^{a}\partial_{l}\hat{\boldsymbol{\phi}}^{b}\partial_{m}\hat{\boldsymbol{\phi}}^{c} \tag{12.105}$$

相似地,$\hat{\boldsymbol{\phi}}^{a}$ 可以看作 $S_{\mathrm{int}}^2$ 上的点的三维直角坐标。因此可以在 $S_{\mathrm{int}}^2$ 上引入坐标 $\alpha_p(p=1,2)$,把它的面积元写为

$$\mathrm{d}\sigma_a^{\mathrm{int}} = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\varepsilon_{pq}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\phi}}^{b}}{\partial\alpha_p}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\phi}}^{c}}{\partial\alpha_q}\mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\alpha_2 \tag{12.106}$$

由于

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\phi}}^a}{\partial \xi_l} = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\phi}}^a}{\partial \alpha_p} \frac{\partial \alpha_p}{\partial \xi_l}$$

式(12.105)可改写为

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{2e}\varepsilon_{abc}\varepsilon_{pq}\oint_{S^2} \mathrm{d}^2 \xi \frac{\partial(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial(\xi_1, \xi_2)} \hat{\phi}^a \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\phi}}^b}{\partial \alpha_p} \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}^c}{\partial \alpha_q} \\ &= \frac{1}{2e}\varepsilon_{abc}\varepsilon_{pq}\oint_{S^2_{\text{int}}} \mathrm{d}^2 \alpha \hat{\boldsymbol{\phi}}^a \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\phi}}^b}{\partial \alpha_p} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\phi}}^c}{\partial \alpha_q} \end{aligned}$$

由上式及式(12.106)得到

$$g = \frac{1}{e}\int_{S^2_{\text{int}}} \mathrm{d}\sigma_a^{\text{int}} \hat{\boldsymbol{\phi}}^a \tag{12.107}$$

由于单位球面 $S^2_{\text{int}}$ 的面积为 4π。上式表示$\frac{eg}{4\pi}$等于一个整数 $n$,它是 $x$ 跑遍 $S^2$ 时 $\hat{\boldsymbol{\phi}}^a$ 覆盖 $S^2_{\text{int}}$ 的次数。这个公式直接给出了非 Abel 规范理论中磁荷的拓扑意义。对于′tHooft-Polyakov 解式(12.84)~(12.86),$n=1$。

在文献[13]中发现,如 $A_0^a$ 不为零而有如下的形式

$$A_0^a = x_a F(r)/er^2 \tag{12.108}$$

方程组(12.81)和(12.82)仍有解。这个解中,电场 $\boldsymbol{E}$ 不等于零。它代表既有磁荷 $g=\frac{4\pi}{e}$也有电荷 $q$ 的孤粒子,这种粒子称为双荷子。在经典解中,双荷子的电荷可连续地取值。但是在对理论运用半经典量子化规则后电荷值变成离散的,$q_2 - q_1 = ne$。

以上讨论的磁单极解是在 SO(3)模型中得到的,这个模型并不符合实验的要求。但是在大统一理论中,单纯规范群 $G$ 破缺到 $SU(3)_C \times U(1)_{\text{em}}$。这种理论符合式(12.76)和(12.77)的要求,因而可能存在磁单极解。在一些大统一理论中,可以证明磁单极解是存在的。特别是如果 $G$ 包含一个破缺到 U(1)的 SO(3)子群,Higgs 粒子在这个 SO(3)下属于三维表示,则这一节中得到的解可以嵌入规范群 $G$ 的理论中。

以 SU(5)大统一模型为例。规范对称的破缺分为两步 $SU(5) \to SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \to SU(3)_C \times U(1)_{\text{em}}$。破缺是通过属于伴随表示的 $\phi$ 和属于基础表示的 $H$ 两种 Higgs 粒子的真空平均值实现的。由式(11.74)知道,真空平均值 $\langle\phi\rangle_0$ 和 $\langle H\rangle_0$ 可以通过 SU(5)规范变换写为

$$\langle \phi \rangle_0 = v_\phi \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & -3 & \\ & & & & -3 \end{bmatrix}, \quad \langle H \rangle_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix} \tag{12.109}$$

令 $T_i$ 为 SU(5)生成元在基础表示中的矩阵,则同一生成元在伴随表示中的作用为$[T_i, \phi]$。为把上面得到的 SO(3)磁单极解嵌入 SU(5)理论中,需要选择 SU(5)的一个子群 $SU(2)_M$。这个子群必须满足三个要求:①必须破缺到一个子群 $U(1)_M$;②$U(1)_M$ 必须是 $SU(3)_C \times U(1)_{em}$的子群;③破缺 $SU(2)_M$ 的 Higgs 粒子必须包含这个群的三维表示。以 $\boldsymbol{T} = (T_1, T_2, T_3)$表示 $SU(2)_M$ 的生成元在其基础表示中的矩阵。子群 $SU(2)_M$ 有不同的选择方式。SU(5)群基础表示可以是 $SU(2)_M$ 的$\underline{2}+\underline{1}+\underline{1}+\underline{1}$ 或$\underline{4}+\underline{1}$。研究结果表明,第一种情况得到的磁单极子质量最小,因而是稳定的。我们现在就讨论这种情况。由式(12.109)知道,满足上面三个条件的 $\boldsymbol{T}$ 应可通过 $SU(3)_C$ 变换取为如下的形式

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \boldsymbol{\tau} & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \tag{12.110}$$

假如代替式(12.110)我们把$\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}$ 嵌在左上方的 3×3 子矩阵中,则不满足条件①,假如把 $\boldsymbol{T}$ 嵌在右下方的 2×2 子矩阵中,则不满足条件③,假如用第 3 和第 5 行列则不满足条件②。记住电荷矩阵为

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & & & & \\ & -\frac{1}{3} & & & \\ & & -\frac{1}{3} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \tag{12.111}$$

因此式(12.110)的第 3 分量为

$$T_3 = -\frac{1}{2}\left(Q + \frac{\lambda_8}{\sqrt{3}}\right) \tag{12.112}$$

以 $T_3$ 为生成元的 U(1)子群满足条件②。在由式(12.110)决定的 $SU(2)_M$ 变换下，$\phi$ 的分量 $\boldsymbol{\phi}=(\phi_{34},\phi_{43},\phi_{33}-\phi_{44})$ 构成伴随表示$\underline{3}$，$\langle\phi_{33}-\phi_{44}\rangle=5v_\phi$。因此条件③是满足的。就规范场与 Higgs 场 $\boldsymbol{\phi}$ 而言，$SU(2)_M$ 子群的规范理论等同于SO(3)破缺到 U(1)的规范理论，因而可以把上面得到的 SO(3)模型解搬过来，$H$ 的真空平均值 $\langle H\rangle_0$ 对这个解没有影响。它的渐近形式为

$$\phi^a(x)T_a\sim 5v_\phi\frac{\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{r}}{r}$$

$$A_i^a(x)T_a\sim\varepsilon_{aij}x_j\frac{1}{g_5r^2}T_a,\qquad A_0^a=0 \tag{12.113}$$

由式(12.101)和(12.102)知道，相应的 $U(1)_M$ 场强矩阵为

$$\hat{\boldsymbol{B}}^M\sim\frac{\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{r}}{r}2\mathrm{Tr}\left(\frac{\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{r}}{r}\boldsymbol{B}\right)\sim(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{T})\frac{\boldsymbol{r}}{g_5r^4} \tag{12.114}$$

由式(12.112)和(12.114)可以看到，这个磁单极子是带色的。它的场强有磁场 $\boldsymbol{B}^Q$ 和色磁场 $\boldsymbol{B}^8$ 两个部分。利用 $e=\sqrt{\frac{3}{8}}g_5$，$g_s=g_5$ 可得

$$\boldsymbol{B}^Q=\frac{g_5}{e}\mathrm{Tr}(\hat{\boldsymbol{B}}^MQ)/\mathrm{Tr}Q^2\sim\frac{1}{2e}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{12.115}$$

$$\boldsymbol{B}^8=2\mathrm{Tr}(\hat{\boldsymbol{B}}^M\lambda^8)\sim\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\boldsymbol{r}}{g_5r^3} \tag{12.116}$$

因此它的磁荷是一个 Dirac 磁荷单位$\frac{2\pi}{e}$。由于 $SU(2)_M$ 中相应于破缺生成元的规范粒子的质量是 $m_X$，这个磁单极子的质量是 $M=O(m_X/g_5^2/4\pi)\simeq10^{16}\,\mathrm{GeV}$ 的量级。在 Prasad-Sommerfield 极限下 $M=m_X(g_5^2/4\pi)^{-1}$。同样地，在加入 $A_0$ 后也可以得到双荷子解。

如果选取 $SU(2)_M$ 使得 SU(5)群基础表示属于 $SU(2)_M$ 的$\underline{4}+\underline{1}$ 表示可以得到不带色的磁单极子。这个磁单极解的磁荷为 $3\,\frac{2\pi}{e}$。在 Prasad-Sommerfield 极限下它的质量为 $3m_X\,\frac{1}{g_5^2/4\pi}$。

## 12.6　磁单极子的物理效应

在磁单极子的磁场中，带电粒子受到 Lorentz 力，因而轨道角动量是不守恒的。由带电粒子的运动方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = q\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{B} \tag{12.117}$$

得到,在磁单极场 $\boldsymbol{B}=g\dfrac{\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}$中

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{r}\times m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)=\boldsymbol{r}\times m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{gq}{4\pi}\boldsymbol{r}\times\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}\right)\frac{1}{r^3}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{gq}{4\pi}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$$

因此,如定义总角动量 $\boldsymbol{J}$ 为

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{r}\times m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}-\frac{gq}{4\pi}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{12.118}$$

则 $\boldsymbol{J}$ 是守恒量。由于电磁场的角动量

$$\int\mathrm{d}^3x'\boldsymbol{r}'\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})(\boldsymbol{r}')=-\frac{g}{4\pi}\int\mathrm{d}^3x'\boldsymbol{r}'\times\left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')\times\nabla\frac{1}{r'}\right)$$

$$=-\frac{g}{4\pi}\int\mathrm{d}^3x'\frac{\boldsymbol{r}'}{r'}(\nabla\cdot\boldsymbol{E})(\boldsymbol{r}')=-\frac{gq}{4\pi}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

式(12.118)表示带电粒子的角动量和电磁场的角动量之和是守恒的。在规范势 $\boldsymbol{A}$ 不奇异处式(12.118)可写为

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})-\frac{gq}{4\pi}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{12.118$'$}$$

其中,$\boldsymbol{p}$ 是正则动量。在量子力学中可以验证,总角动量式(12.118′)与哈密顿量 $H=\dfrac{1}{2m}(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})^2$ 对易,$[\boldsymbol{J},H]=0$。对 Fermi 子,Dirac 哈密顿量为 $H=-\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})+\beta m$。这时应取

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{p}-q\boldsymbol{A})+\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}-\frac{gq}{4\pi}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{12.119}$$

总角动量须满足对易关系

$$[J_i,J_j]=\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}J_k$$

上式得到的条件正是 Dirac 条件式(12.57)。

在非 Abel 规范理论的情况下,电荷 $q$ 应由一个矩阵 $eQ$ 代替。由于磁单极解的非平凡拓扑性质,可以猜测,在无穷远处总角动量的形式为

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})-\frac{ge}{4\pi}Q(\boldsymbol{r})\frac{\boldsymbol{r}}{r}+\boldsymbol{s} \tag{12.120}$$

其中,矩阵 $Q(\boldsymbol{r})$与 $\boldsymbol{r}$ 的方向有关,沿 $z$ 轴方向 $Q(\boldsymbol{r})=Q$,$\boldsymbol{s}$ 为粒子的自旋。在上一节考虑的 SO(3)模型的解中

$$Q(\boldsymbol{r})=\hat{\phi}^a(\boldsymbol{r})T_a=\frac{1}{r}(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{r}) \tag{12.121}$$

SO(3)磁单极解式(12.84)和(12.85)在通常的三维欧氏空间转动和内部空间SO(3)转动下不是不变的。但是它在三维欧氏空间和三维内部空间的同步转动

$$R = \exp\{\mathrm{i}\alpha^i (M_i + T_i)\}$$

下是不变的。上式中 $M_i$ 是三维欧氏空间转动的生成元。Higgs 场和规范场在 $R$ 下的变换为

$$\phi^a(x) \rightarrow \phi_R^a(x) = \alpha_{ab}\phi^b(R^{-1}x)$$

$$A_i^a(x) \rightarrow A_{Ri}^a(x) = \alpha_{ij}\alpha_{ab}A_j^b(R^{-1}x)$$

$$(R^{-1}x)_i = \alpha_{ij}^{\mathrm{T}}x_j, \quad \alpha^{\mathrm{T}}\alpha = I, \qquad \det\alpha = 1$$

在这个变换下,解式(12.84)和(12.85)中的场为

$$\phi^a(x) \rightarrow \alpha_{ab}\alpha_{ba'}^{\mathrm{T}}x_{a'}\frac{h(\xi)}{er^2} = \phi^a(x)$$

$$A_i^a(x) \rightarrow \alpha_{ii'}\alpha_{aa'}\alpha_{jj'}^{\mathrm{T}}x_{j'}\epsilon_{a'i'j}\frac{[1-f(\xi)]}{er^2} = A_i^a(x)$$

如果有属于另一个多重态的粒子在SO(3)磁单极的背景场中运动,它的运动方程在 $R$ 下显然也是不变的,因此守恒的角动量应取为

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S} + \boldsymbol{T} \tag{12.122}$$

其中,$\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 分别为粒子的轨道角动量和自旋。式(12.122)可写为 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}+\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T} = \boldsymbol{r}\times\left(\boldsymbol{p}-\frac{1}{r^2}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{T}\right)+\boldsymbol{S}+\frac{\boldsymbol{r}}{r}\frac{\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{r}}{r}$。利用式(12.84)和(12.85)的渐近形式可知,在磁单极子核心以外

$$\boldsymbol{J} \sim \boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{p} - eT_a\boldsymbol{A}^a) + \frac{\boldsymbol{r}}{r}\frac{\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{r}}{r} + \boldsymbol{S} \tag{12.123}$$

上式果然与式(12.120)一致。

由式(12.122)可以推导出很有趣的结论[14]。例如,考虑一个标量场SU(2)二重态($\eta^+,\eta^-$)在磁单极背景场中运动。在包含了这个二重态以后,前面讨论的SO(3)模型就成为SU(2)模型。就磁单极解来说,这个标量场二重态是没有影响的,对于纯磁单极子背景场 $\eta^+=\eta^-=0$。不同的是,$\eta$ 粒子的SU(2)生成元矩阵为 $\boldsymbol{T}(\eta)=\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}$,它们的本征值为 $\pm\frac{1}{2}$。式(12.122)表示,虽然没有基本的Fermi子,$\eta$ 粒子与SU(2)磁单极子所组成的系统的总角动量却是半整数。这个现象称为"来自同位旋的自旋"。在文献[15]中论证了,这个系统服从Fermi统计。相似地,可以证明SU(2)二重态Fermi子与SU(2)磁单极所组成的系统的总角动量为整数。

由式(12.123)可以得到一个很有趣的结论。考虑处于 $J=0$ 态的 $T=\frac{1}{2}$ Fermi 子在磁单极子上的散射。散射前后速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向由与 $\boldsymbol{r}$ 相反变成与 $\boldsymbol{r}$ 平行。由于 $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{r}=0$,对 $T_3=-\frac{1}{2}$的态,左旋粒子只能作为入射波,右旋粒子只能作为出射波,而 $T_3=+\frac{1}{2}$的态正相反。因此或者散射后$\frac{\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{r}}{r}$变号,或者螺旋度$\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{v}}{v}$变号,不可能两者都不变。这个结论也可以用磁单极背景场 $A^a_{\mu M}$ 中的 Dirac 方程

$$\gamma_\mu(\partial_\mu - \mathrm{i}eA^a_{\mu M}T_a)\psi + m\psi = 0 \tag{12.124}$$

证明。在文献[19]中得到方程(12.124)的 $J=0$ 态散射解。

如果用式(12.119)讨论 Fermi 子在 Abel 规范理论的磁单极上的散射,似乎也可以得到电荷或者螺旋度在 $J=0$ 态的散射中必须变号的结论。但是在 Abel 磁单极的情况下,原点是奇异的。这导致散射方程中哈密顿算符不厄米,电流在原点不守恒。由于 $J=0$ 态的波函数在原点不为零,因而电荷和螺旋度必须变号不是物理的结果。为了克服这个困难而得出所有分波的散射解,在文献[18]中赋与 Fermi 子一个小的反常磁矩。在非 Abel 磁单极的情况下,背景场没有奇点。但是磁单极背景场中的拉氏运动方程不是 $\mathrm{SU}(2)_M$ 不变的,因而 $T^M_3$ 及电荷不守恒。然而电荷最终还应当是守恒的。这表示考虑一个粒子在经典的磁单极背景场中的散射不是一个完全合理的近似。更进一步应当考虑围绕磁单极子背景场的量子涨落。在文献[16],[17]中考虑了在磁单极背景场中 $J=0$ Fermi 场与电场自由度耦合的量子场论。这个场论中电荷是守恒的。$J\neq 0$ 的 Fermi 场在原点为零,在低能下不受磁单极子的影响。

设理论中有一个左旋 Fermi 子 SU(2)二重态 $\begin{pmatrix} q^+ \\ q^- \end{pmatrix}_{\mathrm{L}}$ 和一个右旋二重态 $\begin{pmatrix} q^+ \\ q^- \end{pmatrix}_{\mathrm{R}}$。设它们的质量很小,我们考虑 $m\rightarrow 0$ 的极限。如 $q^\pm_L$ 在磁单极 $M$ 上散射而改变电荷

$$q^\pm_{\mathrm{L}} + M \rightarrow q^\mp_{\mathrm{L}} + M' \tag{12.125}$$

则由于电荷守恒,末态的 $M'$ 应当是双荷子。由于双荷子的质量与磁单极子的质量相差为 $\alpha m_V$ 的量级,在低能下末态包含双荷子的过程是不能实现的。按照前面的讨论,这时唯一可能的 $J=0$ 散射是电荷不改变而螺旋度改变的过程

$$q^\pm_{\mathrm{L}} + M \rightarrow q^\pm_{\mathrm{R}} + M \tag{12.126}$$

这意味着,这个过程的截面应当有强作用的量级。然而零质量 Fermi 子在经典规范场中的散射不改变手征性,因而螺旋度应当守恒。在 $m\rightarrow 0$ 时,过程式(12.126)

为散射方程(12.124)所不容许。这个矛盾在考虑 Fermi 子对和电场的量子涨落后可以解决。在量子理论中手征流的守恒方程是有反常的

$$\partial_\mu j_{5\mu} = \frac{N_f g^2}{8\pi^2}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\widetilde{F}_{\mu\nu}) = -\frac{N_f g^2}{4\pi^2}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})$$

Rubakov 和 Callan 由他们的场论模型得到的结果[16,17] 表明，Fermi 子和磁单极子散射中手征荷 $Q_5 = \int \mathrm{d}^3 x j_{50}(x)$ 的改变

$$\Delta Q_5 = \int_0^{\Delta t}\mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{d}Q_5}{\mathrm{d}t} = \int_0^{\Delta t}\mathrm{d}t\int \mathrm{d}^3 x\,\partial_\mu j_{5\mu} = -\frac{e^2}{4\pi^2}\int_0^{\Delta t}\mathrm{d}t\int \mathrm{d}^3 x\langle M\mid \boldsymbol{E}\mid M\rangle\cdot \boldsymbol{B}_M$$

的量级为 $O(1)$。这表示过程式(12.126)的确可以有强作用的量级。规范场与 Fermi 子的作用不能直接改变手征性，过程式(12.126)是怎样产生的呢？文献[16]，[17]的结果是，在磁单极的周围 $r$ 小于$(g^2 m)^{-1}\sim \alpha m^{-1}$处，$\langle M|\overline{\psi}_{\mathrm{R}}\psi_{\mathrm{L}}|M\rangle \neq 0$，即磁单极子为数目不定的 Fermi 子对所包围，产生了 Fermi 子对的凝聚。过程式(12.126)可看作是入射的 $q_{\mathrm{L}}$ 与磁单极附近的一个 $\overline{q}_{\mathrm{L}}$ 湮灭并释放与它配对的一个 $q_{\mathrm{R}}$。

在文献[16]，[17]中提出，类似的机制可以在大统一理论中导致磁单极子催化的质子衰变过程。以 SU(5)模型为例。这个模型中本来可以通过交换虚的 $X$，$Y$ 规范粒子产生质子衰变。但是这时振幅正比于 $g_5^2/m_X^2$，因而概率很小。但是，如果有磁单极子存在，情况就不同了。如果选择式(12.110)为 $\mathrm{SU}(2)_M$ 的生成元，则

$$\begin{pmatrix} u_2^c \\ u_1 \end{pmatrix}_{\mathrm{L}},\quad \begin{pmatrix} -u_1^c \\ u_2 \end{pmatrix}_{\mathrm{L}},\quad \begin{pmatrix} e^- \\ d_3^c \end{pmatrix}_{\mathrm{R}},\quad \begin{pmatrix} d_3 \\ e^+ \end{pmatrix}_{\mathrm{R}}$$

构成 $\mathrm{SU}(2)_M$ 二重态。文献[16]的结果是，由于轴矢流反常，式(12.126)在磁单极周围真空期望值

$$\langle M|\,\overline{d_{3\mathrm{R}}^c}\,u_{1\mathrm{L}}\,\overline{e_{\mathrm{R}}^+}\,u_{2\mathrm{L}}\,|M\rangle \neq 0$$

这个真空期望值不破坏 $\mathrm{SU}(3)_C\times\mathrm{U}(1)_{\mathrm{em}}$，但是破坏轴矢流守恒。由于这种凝聚使得散射过程

$$u_{1\mathrm{L}} + u_{2\mathrm{L}} + M \rightarrow d_{3\mathrm{R}}^c + e_{\mathrm{R}}^+ + M \tag{12.127}$$

有强作用的量级。这就会导致磁单极子催化的质子衰变过程。这里由轴矢流反常造成 Fermi 场乘积的期望值不为零的现象与下面 12.8 节将要讨论的瞬子效应有相似之处。一个不同点是在磁单极子的情况没有瞬子效应所有的 $\exp\left(-\frac{8\pi^2}{g^2}\right)$压低因子。但是磁单极子催化的质子衰变的问题还有一些复杂的因素，现在还没有可靠的方法计算这个过程的概率，文献中的结果还不能作为定论。

## 12.7 瞬　　子

在本节中我们将讨论纯非 Abel 规范场方程的拓扑性孤粒子解。在 12.1 节中已经证明只有四维欧氏空间有这种解。研究四维欧氏空间的解对现实的四维 Minkowski 时空的物理学是有意义的,因为量子场论的路径积分形式可以用四维欧氏空间中的场表述。

四维欧氏空间中的纯非 Abel 规范理论的作用量可写为

$$S_{\mathrm{E}} = \int \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}_{\mathrm{E}}(x), \qquad \mathscr{L}_{\mathrm{E}} = + \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu}$$

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f_{abc} A^b_\mu A^c_\nu \tag{12.128}$$

其中,$x_\mu$ 和 $A_\mu$($\mu = 1,2,3,4$)都是实数。它可以看作由 Minkowski 时空场论的 $-\mathrm{i}S$ 做 Wick 转动,把 $x_4$ 和 $A_4$ 分别沿顺时针和反时针方向转到实轴的结果。相应于拉氏量式(12.128)的场方程为

$$D_\mu F_{\mu\nu} = \partial_\mu F_{\mu\nu} - \mathrm{i}g[A_\mu, F_{\mu\nu}] = 0 \tag{12.129}$$

与 Minkowski 时空的情况不同,我们定义欧氏空间的对耦场强为

$$\widetilde{F}^{\mathrm{E}}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \qquad \varepsilon_{1234} = 1$$

如果 $A_\mu(x)$不奇异,则 $\widetilde{F}^{\mathrm{E}}_{\mu\nu}$ 满足 Bianchi 恒等式

$$D_\mu \widetilde{F}^{\mathrm{E}}_{\mu\nu} = 0 \tag{12.130}$$

我们将考虑规范群 $G$ 为 SU(2)的情况,此时

$$F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu} \frac{\tau_a}{2}$$

我们只考虑四维欧氏作用量 $S_{\mathrm{E}}$ 有限的场,它必须满足条件

$$r^2 F_{\mu\nu} \to 0, \qquad r^2 = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \to \infty$$

因此在无穷远处 $A_\mu$ 趋于纯规范

$$A_\mu(x) \to \frac{\mathrm{i}}{g} U(x) \partial_\mu U^{-1}(x), \qquad U \in \mathrm{SU}(2), \qquad r \to \infty \tag{12.131}$$

考虑半径趋于无穷的三维球面 $S^3$。在 $S^3$ 上的群元素 $U(x)$是把 $S^3$ 映入 SU(2) 的映射。由于 SU(2)群流形也是 $S^3$。利用式(12.36)可知映射 $U(x)$的拓扑性质由同伦群

$$\Pi_3(\mathrm{SU}(2)) = Z \tag{12.132}$$

表征。整数加法群 $Z$ 的元素 $n$ 代表 $x$ 点跑遍 $S^3$ 时 $U(x)$ 缠绕 SU(2) 流形的次数。这是因为缠绕次数是不能通过 $U(x)$ 的连续变形而改变的。

我们来证明,绕数 $n$ 可以用如下的量表示

$$C_2 = \frac{g^2}{16\pi^2}\int d^4 x \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mathrm{E}}_{\mu\nu}) \tag{12.133}$$

这个量在纤维丛理论中称为第二陈数[20]。利用 Bianchi 恒等式(12.130)可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mathrm{E}}_{\mu\nu}) &= \mathrm{Tr}\{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \mathrm{i}g[A_\mu, A_\nu])\widetilde{F}^{\mathrm{E}}_{\mu\nu}\} \\
&= \mathrm{Tr}\{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\widetilde{F}^{\mathrm{E}}_{\mu\nu} - \mathrm{i}gA_\mu[A_\nu, \widetilde{F}^{\mathrm{E}}_{\mu\nu}]\} \\
&= \mathrm{Tr}\{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\widetilde{F}^{\mathrm{E}}_{\mu\nu} - A_\mu\partial_\nu\widetilde{F}^{\mathrm{E}}_{\mu\nu}\} \\
&= \mathrm{Tr}\{\partial_\mu A_\nu \cdot \widetilde{F}^{\mathrm{E}}_{\mu\nu} - \partial_\nu(A_\mu\widetilde{F}^{\mathrm{E}}_{\mu\nu})\} \\
&= \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}\{\partial_\mu A_\nu(\partial_\rho A_\sigma - \mathrm{i}gA_\rho A_\sigma) - \partial_\nu(A_\mu\partial_\rho A_\sigma - \mathrm{i}gA_\mu A_\rho A_\sigma)\} \\
&= 2\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu\mathrm{Tr}\{A_\nu(\partial_\rho A_\sigma - 2/3\ \mathrm{i}gA_\rho A_\sigma)\}
\end{aligned} \tag{12.134}$$

由此知,密度 $C_2(x)$ 可写为

$$C_2(x) = \partial_\mu \xi^{\mathrm{E}}_\mu \tag{12.135}$$

$$\xi^{\mathrm{E}}_\mu = \frac{g^2}{8\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}\left\{A_\nu\left(\partial_\rho A_\sigma - \frac{2}{3}\mathrm{i}gA_\rho A_\sigma\right)\right\} \tag{12.136}$$

由高斯定理得到

$$C_2 = \int d^4 x C_2(x) = \int_{S^3} d\sigma_\mu \xi^{\mathrm{E}}_\mu \tag{12.137}$$

其中,$S^3$ 为半径趋于无穷的三维球面。作为散度在无边界的流形上的积分,$C_2$ 是一个拓扑不变量。对于作用量有限的场,在无穷远处

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\rho A_\sigma \to \mathrm{i}g\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}A_\rho A_\sigma$$

$$C_2 = \frac{\mathrm{i}g^3}{24\pi^2}\int_{S^3} d\sigma_\mu \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}(A_\nu A_\rho A_\sigma) \tag{12.138}$$

将 $A_\mu$ 的渐近形式式(12.131)代入上式得到

$$C_2 = \frac{-1}{24\pi^2}\int_{S^3} d\sigma_\mu \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}(U^{-1}\partial_\nu U \cdot U^{-1}\partial_\rho U \cdot U^{-1}\partial_\sigma U) \tag{12.139}$$

令 $\xi_i(i=1,2,3)$ 和 $\alpha_a(a=1,2,3)$ 分别为 $S^3$ 及 SU(2) 群流形 $S^3_{\mathrm{int}}$ 上的坐标。利用公式

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}d\sigma_\mu = \frac{\partial(x_\nu, x_\rho, x_\sigma)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$

$$\mathrm{Tr}(U^{-1}\partial_\nu U \cdot U^{-1}\partial_\rho U \cdot U^{-1}\partial_\sigma U)$$

$$= \mathrm{Tr}\left(U^{-1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}U\cdot U^{-1}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}U\cdot U^{-1}\frac{\partial}{\partial\alpha_3}U\right)\cdot\frac{\partial(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}{\partial(x_\nu,x_\rho,x_\sigma)}$$

可将式(12.139)写为

$$C_2 = \frac{-1}{24\pi^2}\int_{S^3_{\mathrm{int}}}\mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\alpha_2\mathrm{d}\alpha_3\mathrm{Tr}\left(U^{-1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}U\cdot U^{-1}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}U\cdot U^{-1}\frac{\partial}{\partial\alpha_3}U\right) \tag{12.140}$$

上式中的积分号内的量正比于 SU(2)群的体积元 $\mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\alpha_2\mathrm{d}\alpha_3$，并在群元素 $U$ 的左移 $U\to U_0U$ 或右移 $U\to UU_0$ 下不变，因此它正是群的不变测度 $\mathrm{d}\mu$，当 $U$ 跑遍 SU(2)群流形 $S^3_{\mathrm{int}}$时，它的积分为 $24\pi^2$，因此我们有

$$C^2 = \frac{1}{24\pi^2}\int_{S^3_{\mathrm{int}}}\mathrm{d}\mu = n,\qquad n = 0,\pm 1,\pm 2,\cdots \tag{12.141}$$

其中，$n$ 等于 $x$ 跑遍 $S^3$ 时，$U(x)$缠绕 SU(2)群流形 $S^3_{\mathrm{int}}$的次数。它正是同伦群 $\Pi_3(\mathrm{SU}(2))$的元素。注意，以上的推导都未用到场方程，因而所得的结果适用于欧氏作用量有限的任意 SU(2)规范场。

绕数 $n\neq 0$ 的 SU(2)规范群函数 $U(x)$的一个例子是

$$U(x) = \frac{1}{r}(x_4 + \mathrm{i}x_a\tau^a),\qquad r^2 = \sum_{i=1}^{4}x_i^2 \tag{12.142}$$

它可以定义在球面 $S^3$ 上，但在原点，它是奇异的。由式(12.18)中 SU(2)群元的表示式容易看到，群函数式(12.142)是 $S^3$ 到 $S^3_{\mathrm{int}}$的同步映射，它显然有绕数 $n=1$。把式(12.142)代入式(12.139)中可以验证这一点。

四维欧氏空间 SU(2)纯规范场方程有绕数 $n\neq 0$ 的解是 Belavin、Polyakov、Schwartz 和 Tyupkin(BPST)首先发现的[21]。为了简单地得到这个解，我们先考虑如下的不等式

$$\int\mathrm{d}^4x\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\pm\widetilde{F}^E_{\mu\nu})^2\geqslant 0 \tag{12.143}$$

由上式得到欧氏作用量 $S_\mathrm{E}$ 的不等式

$$S_\mathrm{E} = \frac{1}{2}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu})\geqslant\frac{8\pi^2}{g^2}\left|C^2\right| \tag{12.144}$$

因此 $C_2\neq 0$ 的场的作用量有一个下限$\frac{8\pi^2}{g^2}|C^2|$。如果规范场强满足自对耦条件

$$F_{\mu\nu} = \widetilde{F}^E_{\mu\nu} \tag{12.145}$$

则作用量达到式(12.144)的下限。这表示满足自对耦条件的场是作用量的局部极小，故一定是拉氏方程的解。事实上，如果规范势不奇异，由式(12.145)及 Bianchi 恒等式(12.130)可得

$$D_\mu F_{\mu\nu} = D_\mu \widetilde{F}^{\mathrm{E}}_{\mu\nu} = 0$$

相似地，如果场强满足反自对耦条件

$$F_{\mu\nu} = - \widetilde{F}^{\mathrm{E}}_{\mu\nu} \tag{12.145'}$$

则作用量也达到式(12.144)的下限。满足这个条件的场也自动满足运动方程 $D_\mu F_{\mu\nu}=0$。方程(12.145)和(12.145′)是 $A_\mu$ 的一阶偏微分方程，它比含二阶偏微分的场方程 $D_\mu F_{\mu\nu}=0$ 容易解。当然，场方程的解不一定都满足式(12.145)或(12.145′)。但是式(12.145)和(12.145′)给出 $C_2\neq 0$ 的同伦类中欧氏作用量 $S_{\mathrm{E}}$ 最小的解。

在文献[21]中设规范场方程的解有如下的形式

$$A_\mu(x) = \frac{\mathrm{i}}{g} f(r) U(x) \partial_\mu U^{-1}(x) \tag{12.146}$$

其中，$g$ 为 SU(2)规范耦合常数，$U(x)$为式(12.142)所表示的 $n=1$ 的映射，容易验证

$$U(x)\partial_\mu U^{-1}(x) = -2\mathrm{i}\sigma_{\mu\nu}\frac{x_\nu}{r^2} \tag{12.147}$$

其中

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{4\mathrm{i}}[\tau_i, \tau_j], \qquad \sigma_{i4} = -\sigma_{4i} = \frac{1}{2}\tau_i \tag{12.148}$$

$\sigma_{\mu\nu}$满足方程

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\sigma_{\rho\sigma} = \sigma_{\mu\nu} \tag{12.149}$$

把式(12.146)～(12.149)代入自对耦方程(12.145)得到 $f(r)$的方程

$$rf' = 2f(1-f) \tag{12.150}$$

式(12.150)有 $f=0$ 和 $f=1$ 两个平凡解。$f=0$ 的情况是 $n=0$ 的真空解。$f=1$ 导致在原点奇异的势 $A_\mu(x)$，因而不能用。但是式(12.150)还有如下的非平凡解

$$f(r) = \frac{r^2}{r^2+\lambda^2} \tag{12.151}$$

其中，$\lambda$ 是一个任意的具有长度量纲的常数。式(12.151)在 $r\to 0$ 和$\infty$时分别趋于 0 和 1。由它得到的规范势

$$A_\mu(x) = \frac{1}{g}\frac{2}{r^2+\lambda^2}\sigma_{\mu\nu}x_\nu \tag{12.152}$$

在全四维欧氏空间是正则的。相应的场强为

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{g}\frac{4\lambda^2}{(r^2+\lambda^2)^2}\sigma_{\mu\nu} \tag{12.153}$$

由于 $U(x)$的绕数 $n=1$ 且 $r\to\infty$时 $A_\mu(x)\to\frac{\mathrm{i}}{g}U\partial_\mu U^{-1}$,这个解的第二陈数 $C_2=1$。由式(12.153)可看到场强集中在 $r\leqslant O(\lambda)$的范围内。由于这个解不但在空间上而且在虚的"时间"上也是局域的,所以它被称为瞬子,也称为赝粒子。由场方程及解的渐近行为($r\to\infty$时 $A_\mu\to\frac{\mathrm{i}}{g}U\partial_\mu U^{-1}$, $U$ 有绕数 $n=1$)的平移不变性可知

$$A_\mu(x)=\frac{\mathrm{i}}{g}\frac{(x-a)^2}{(x-a)^2+\lambda^2}U(x-a)\partial_\mu U^{-1}(x-a) \tag{12.154}$$

也有同样性质的解。在上式中 $a$ 是瞬子中心的坐标,$\lambda$ 是表示瞬子半径的标度参数。

把式(12.154)中 $U(x)$与 $U^{-1}(x)$互换也得到一个场方程的解

$$A_\mu(x)=\frac{\mathrm{i}}{g}\frac{(x-a)^2}{(x-a)^2+\lambda^2}U^{-1}(x-a)\partial_\mu U(x-a) \tag{12.155}$$

由于 $U^{-1}(x)$的绕数 $n=-1$,这个解的第二陈数 $C_2=-1$。它称为反瞬子解。这是一个反自对耦解,相应的场强为

$$F_{\mu\nu}(x)=-\widetilde{F}_{\mu\nu}(x)=\frac{1}{g}\frac{4\lambda^2}{(x-a)^2+\lambda^2}\bar{\sigma}_{\mu\nu} \tag{12.156}$$

$$\bar{\sigma}_{ij}=\sigma_{ij},\qquad \bar{\sigma}_{i4}=-\sigma_{i4} \tag{12.157}$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\sigma}_{\rho\sigma}=-\bar{\sigma}_{\mu\nu} \tag{12.158}$$

在文献[22]中'tHooft 得到了多瞬子解。他设规范场有如下的形式

$$A_\mu(x)=-\frac{1}{g}\bar{\sigma}_{\mu\nu}\partial_\nu(\ln\chi(x)) \tag{12.159}$$

经过一些计算可以证明,$\chi(x)$满足方程

$$\frac{1}{\chi}\partial_\mu\partial_\mu\chi=0 \tag{12.160}$$

时场强满足对耦方程 $F_{\mu\nu}=\widetilde{F}_{\mu\nu}$。要求 $r\to\infty$时 $\chi(x)$趋于常数,方程(12.160)有解

$$\chi(x)=1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i^2}{(x-a_i)^2} \tag{12.161}$$

上式中的 $\chi(x)$是有奇异的。但是即使在奇点 $x=a_i$ 处,式(12.161)也满足方程(12.160)。由式(12.159)和(12.161)得到

$$A_\mu(x)=\frac{2}{g}\bar{\sigma}_{\mu\nu}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i^2(x-a_i)_\nu}{(x-a_i)^2[(x-a_i)^2+\lambda_i^2]} \tag{12.162}$$

式(12.162)在 $x=a_i$ 处是奇异的。但是这个奇点可以用一个奇异的规范变换移去。为了考察这个解的性质,我们先考虑 $n=1$ 的情况。与式(12.147)相似,

对于式(12.142)中的 $U(x)$,我们有

$$U^{-1}(x)\partial_\mu U(x) = -2\mathrm{i}\bar{\sigma}_{\mu\nu}\frac{x_\nu}{r^2} \tag{12.147'}$$

因此在 $n=1$ 时,式(12.162)可以写为

$$A_\mu(x) = \frac{\mathrm{i}}{g}\frac{\lambda^2}{(x-a)^2+\lambda^2}U^{-1}(x-a)\partial_\mu U(x-a) \tag{12.163}$$

对上式做规范变换

$$\begin{aligned} A_\mu(x) \to A_\mu{}'(x) &= U(x-a)\left(A_\mu(x)+\frac{\mathrm{i}}{g}\partial_\mu\right)U^{-1}(x-a) \\ &= \frac{\mathrm{i}}{g}U(x-a)\partial_\mu U^{-1}(x-a)\frac{(x-a)^2}{(x-a)^2+\lambda^2} \end{aligned} \tag{12.164}$$

上式右方正是式(12.153)中的单瞬子解,它在 $x=a$ 处不奇异,因此式(12.161)中的奇异是由正则解做在 $x=a_i$ 处奇异的规范变换而产生的。

以上讨论还说明,当 $|a_i-a_j|\gg\lambda_i,\lambda_j$ 时,式(12.161)表示 $n$ 个互相独立的瞬子。由于拓扑量子数不随解中参数的值的连续变化而改变,这个解的第二陈数 $C_2$ 显然为 $n$。这一点也可以由直接的计算验证。考虑无穷大球面 $S^3$ 的内部、除去以解式(12.162)的奇点 $x=a_i$ 为球心的 $n$ 个无穷小球面 $S_i^3$ 的内部以外的四维空间 $V$

$$C_2 = \frac{g^2}{16\pi^2}\int_V \mathrm{d}^4x\,\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\widetilde{F}_{\mu\nu}^{\mathrm{E}}) = \int_{S^3}\mathrm{d}\sigma_\mu\xi_\mu^{\mathrm{E}} - \sum_{i=1}^{n}\int_{S_i^3}\mathrm{d}\sigma_\mu\xi_\mu^{\mathrm{E}}$$

由于在 $r\to\infty$ 时,式(12.162)中的 $A_\mu(x)\to\frac{1}{r^3}$,上式右方第一项趋于零。由式(12.163)知,在 $S_i^3$ 上 $A_\mu(x)\to\frac{\mathrm{i}}{g}U^{-1}(x)\partial_\mu U(x)$。因此

$$\int_{S_i^3}\mathrm{d}\sigma_\mu\xi_\mu^{\mathrm{E}} \to -1$$

这样就得到 $C_2=n$。以上讨论说明,式(12.162)是有 $n$ 个瞬子的解。这个解的作用量是

$$S_{\mathrm{E}} = \frac{8\pi^2}{g^2}n \tag{12.165}$$

它与参数 $a_i,\lambda_i$ 无关,而严格等于单瞬子解的 $n$ 倍。多瞬子解的作用量有相加性,这在非线性方程的严格解中是一种很特殊的情况。

在文献[23]中发现

$$\chi(x) = \sum_{i=1}^{n+1}\frac{\lambda_i^2}{(x-a_i)^2} \tag{12.166}$$

也是方程(12.160)的解，这个解比式(12.161)更普遍，它在 $a_{n+1}=\lambda_{n+1}\to\infty$ 时变为式(12.161)。除一个无意义的常系数外，解式(12.166)含有 $5n+4$ 个参数。但是其中有的参数可以用定域规范变换去掉，这些参数不是物理的。文献[24]指出，SU(2)规范理论中最普遍的 $n$ 瞬子解有 $8n-3$ 个不能用规范变换去掉的参数。为了理解这一点，可设想 $n$ 个瞬子相距很远，这时有 $4n$ 个参数表示瞬子中心的位置，$n$ 个参数表示瞬子的半径，$3n$ 个参数代表每个瞬子解在内部空间中的方位，另外再减去三个参数，它们代表 $n$ 瞬子解的整体规范变换自由度，未计算在不能由规范变换移去的参数之中(但是整体规范变换也是物理的自由度)。

其他的规范理论也有瞬子解。特别是当规范群 $G$ 包含 SU(2)子群时可以把上面得到的 SU(2)解嵌入 $G$ 群的规范理论中，这只要选择 $G$ 的一个 SU(2)子群，并令相应于陪集 $G/\mathrm{SU}(2)$ 的规范势都等于零就可以了。例如，$\mathrm{SU}(3)_C$ 色规范理论就有一些这样的瞬子解和多瞬子解。SU($N$)规范理论也可能有不能约化到 SU(2)子群中的多瞬子解。但是数学上已经证明，任意把 $S^3$ 映入 SU(N)的映射都可以通过连续变形变到 SU(2)子群中。因此就拓扑性质而言，SU($N$)和 SU(2)的规范场可以用同一个拓扑荷表征，即 $\Pi_3(\mathrm{SU}(N))=\Pi_3(\mathrm{SU}(2))=Z$。这个拓扑荷也就是第二陈数 $C_2$。

## 12.8 瞬子的物理效应、$\theta$ 真空

瞬子解在量子场论中的作用是，它造成拓扑性质不同的真空之间的穿透[25,26]。为了说明这个效应，我们首先研究没有自发破缺的规范场论中的真空。选取 $A_0^a=0$ 的时性规范，这时 $E_i^a=-\dot{A}_i^a$，哈密顿密度

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2}(\dot{A}_i^a\dot{A}_i^a+B_i^aB_i^a) \tag{12.167}$$

由 4.2 节中的讨论知道，在这个规范中，物理态 $|\rangle_P$ 满足附加条件

$$(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})^a(x)\big|\rangle_P=(\partial_i\dot{A}_i^a+gf_{abc}A_i^b\dot{A}_j^c)\big|\rangle_P=0 \tag{12.168}$$

在取定时性规范后，理论在与时间无关的规范变换

$$\begin{aligned}A_i&\to U_\alpha A_iU_\alpha^{-1}+\frac{\mathrm{i}}{g}U_\alpha\partial_iU_\alpha^{-1}\\ U_\alpha&=\exp\{-\mathrm{i}\alpha^a(\boldsymbol{x})T_a\}\end{aligned} \tag{12.169}$$

下仍是不变的，上式中 $\alpha^a(\boldsymbol{x})$ 与时间无关。相应于规范变换式(12.169)的幺正变换为

$$R_\alpha=\exp(-\mathrm{i}Q_\alpha)$$

$$Q_\alpha = \frac{1}{g}\int d^3x\dot{A}_i(\partial_i\alpha^a + gf_{abc}A_i^b\alpha^c) \tag{12.170}$$

对于有限能量的场，当$|\boldsymbol{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\to\infty$时，$E_i^a = -\dot{A}_i^a = O\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^2}\right)$，如果$\alpha^a(\boldsymbol{x})$在$|\boldsymbol{x}|\to\infty$时趋于零，则可以用分部积分将式(12.170)改写为

$$Q_\alpha = \frac{1}{g}\int d^3x\alpha^a(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})^a \tag{12.171}$$

由上式及物理态的附加条件式(12.168)得

$$\exp(-iQ_\alpha)\big|\rangle_P = \big|\rangle_P,\qquad 如\ \alpha(\boldsymbol{x})\xrightarrow[|\boldsymbol{x}|\to\infty]{} 0 \tag{12.172}$$

即物理态在满足$\alpha(\boldsymbol{x})\xrightarrow[|\boldsymbol{x}|\to\infty]{}0$的与时间无关的规范变换下是不变的。我们称这种变换为$r$规范变换。

令$\big|A_i(\boldsymbol{x})\rangle$为$t$时刻的规范势算符的本征态。由$A_i(\boldsymbol{x})$做所有可能的$r$规范变换得到的规范势族称为$A_i(\boldsymbol{x})$的等价类，用$\{A_i(\boldsymbol{x})\}$表示。相应的在$r$规范变换下不变的态为

$$|\{A_i(\boldsymbol{x})\}\rangle = \int_r[\mathscr{D}\alpha(\boldsymbol{x})]e^{-iQ_\alpha}|A_i(\boldsymbol{x})\rangle \tag{12.173}$$

上式右方包含对所有的$r$规范变换积分。注意，如果规范函数$\alpha(\boldsymbol{x})$在$|\boldsymbol{x}|\to\infty$时不趋于零，$|\{A_i(\boldsymbol{x})\}\rangle$在这样的规范变换下不是不变的。物理态一定是形式如式(12.173)的态的叠加。

对真空态场强的本征值$E_i^a$和$B_i^a$为零，势的本征值为纯规范

$$A_i(\boldsymbol{x}) = \frac{i}{g}U(\boldsymbol{x})\partial_iU^{-1}(\boldsymbol{x}) \tag{12.174}$$

因此真空态可以用群元素表示为$|U(\boldsymbol{x})\rangle$

$$\exp(-iQ_\alpha)|U(\boldsymbol{x})\rangle = |U_\alpha(\boldsymbol{x})U(\boldsymbol{x})\rangle \tag{12.175}$$

物理真空态$|Vac\rangle$的一般形式为

$$|Vac\rangle = \sum_{\{U(\boldsymbol{x})\}}|\{U(\boldsymbol{x})\}\rangle \tag{12.176}$$

上式中，态$\big|\{U(\boldsymbol{x})\}\rangle$为式(12.173)形式的积分，$\sum_{\{U\}}$表示对不同的等价类求和。

现在我们考虑两个态的跃迁矩阵元。按照第三章式(3.93)，它可以表示为如下的路径积分

$$\begin{aligned}&\langle\widetilde{A}_i(\boldsymbol{x}),t'|\exp\{-iH(t'-t)\}|A_i(\boldsymbol{x}),t\rangle\\ &=\int_{A_i(x)}^{\widetilde{A}_i(x)}[\mathscr{D}A_i]\exp\left\{i\int_t^{t'}dy_0\int d^3y\,\frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{A}}^a\cdot\dot{\boldsymbol{A}}^a - \boldsymbol{B}^a\cdot\boldsymbol{B}^a)\right\}\end{aligned} \tag{12.177}$$

两个物理态之间的跃迁为式(12.177)形式的项对规范变换的积分。我们只考虑能量有限的态,于是,$|\boldsymbol{x}|\to\infty$时,$A_i(\boldsymbol{x})$和$\widetilde{A}_i(\boldsymbol{x})$都趋于纯规范。由于即使在$|\boldsymbol{x}|\to\infty$时$\alpha(\boldsymbol{x})$不趋于零的一般规范变换下哈密顿量$H$也是不变的,我们可以做规范变换$|A_i(\boldsymbol{x})\rangle\to\exp(-\mathrm{i}Q_\alpha)|A_i(\boldsymbol{x})\rangle$, $|\widetilde{A}_i(\boldsymbol{x})\rangle\to\exp(-\mathrm{i}Q_\alpha)|\widetilde{A}_i(\boldsymbol{x})\rangle$使式(12.177)中初态的$A_i(\boldsymbol{x})$在无穷远处趋于零。这时末态的$\widetilde{A}_i(\boldsymbol{x})$在无穷远处也必须趋于零,否则在式(12.177)的路径积分中$\dot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{y},y_0)$在无穷远处不趋于零,积分发散,因而跃迁振幅为零。特别是,对于真空态,我们可以限制于

$$A_i(\boldsymbol{x})=\frac{\mathrm{i}}{g}U(\boldsymbol{x})\partial_i U^{-1}(\boldsymbol{x}),\qquad U(\boldsymbol{x})\xrightarrow[|\boldsymbol{x}|\to\infty]{}I \tag{12.178}$$

注意,条件$U(\boldsymbol{x})\to I$并不等同于$\alpha(\boldsymbol{x})\to 0$。例如,群元素

$$U_1(\boldsymbol{x})=\exp\left\{-\mathrm{i}\pi\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\tau}}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}\exp(\mathrm{i}\pi\tau_3)=-\exp\left\{-\mathrm{i}\pi\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\tau}}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}\right\} \tag{12.179}$$

是满足条件式(12.178)的,但它的群参数在无穷远处并不趋于零。因此两个真空势$A_i$和$\widetilde{A}_i$不必以$r$规范变换联系。

在条件式(12.178)下,三维欧氏空间$E^3$的无穷远点都可以看作同一点。这样某一时刻的三维空间等同于三维球面,记作$S_t^3$,因此满足条件式(12.178)的规范群元是把$S_t^3$映入群$G$的映射。它的拓扑性质可以用如下式的绕数$w$表征

$$w=\frac{1}{24\pi^2}\int \mathrm{d}^3x\varepsilon_{ijk}\mathrm{Tr}(U^{-1}(\boldsymbol{x})\partial_i U(\boldsymbol{x})\cdot U^{-1}(\boldsymbol{x})\partial_j U(\boldsymbol{x})\cdot U^{-1}(\boldsymbol{x})\partial_k U(\boldsymbol{x})) \tag{12.180}$$

$w$是$\Pi_3(\mathrm{SU}(2))$的元素,它只能取整数值$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$。可以验证对SU(2)群式(12.179)中的$U_1(\boldsymbol{x})$有绕数$n=1$。设$U_n(\boldsymbol{x})$有绕数$n$,易证

$$U_{n_1}U_{n_2}=U_{n_1+n_2} \tag{12.181}$$

现在考虑规范群是SU(2)的情况。$r$规范变换的$U(\boldsymbol{x})$可以通过连续变形变为单位元素,这样的变换不能改变绕数$n$。因此式(12.176)中对等价类的求和就是对$n$的求和。这说明规范理论的真空态是退化的。令$|n\rangle\equiv|\{U_n\}\rangle$表示绕数为$n$的真空态。又令$R_1$为实现$\Delta n=1$的规范变换的幺正算符

$$R_1|n\rangle=|n+1\rangle,\qquad R_1^{-1}|n\rangle=|n-1\rangle \tag{12.182}$$

$R_1$可表为

$$R_1=\exp(-\mathrm{i}Q_\alpha),\qquad \alpha=-\pi\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{x}}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{12.183}$$

由式(12.175)显然有 $R_1 | U(x)\rangle = | U_1(x) U(x)\rangle$。利用式(12.181)知，式(12.183)中定义的 $R_1$ 确实满足式(12.182)。$R_1$ 产生的变换虽然不属于 $r$ 规范变换，但是各种物理量如哈密顿量、动量、角动量等在这个变换下也是不变的。考虑到 $R_1$ 是一个幺正算符，规范不变的物理量的本征态 $|\psi\rangle$ 在 $R_1$ 的作用下只能改变一个相因子

$$R_1 | \psi\rangle = e^{-i\theta_\psi} | \psi\rangle \tag{12.184}$$

由式(12.182)和(12.184)知道，物理真空态有如下的形式

$$| \theta\rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-in\theta} | n\rangle \tag{12.185}$$

其中，参数 $\theta$ 不能由这里的讨论确定。但是由于 $[R_1, H] = 0$，$\theta$ 一旦给定后不会随时间改变，并且任何规范不变的算符 $O$ 在 $\theta$ 真空态间的矩阵是对角的

$$\langle \theta' | O | \theta\rangle = 0, \qquad \theta \neq \theta' \tag{12.186}$$

由于这些超选择规则，实际的物理真空态有一个确定的 $\theta$ 值，它称为 $\theta$ 真空。

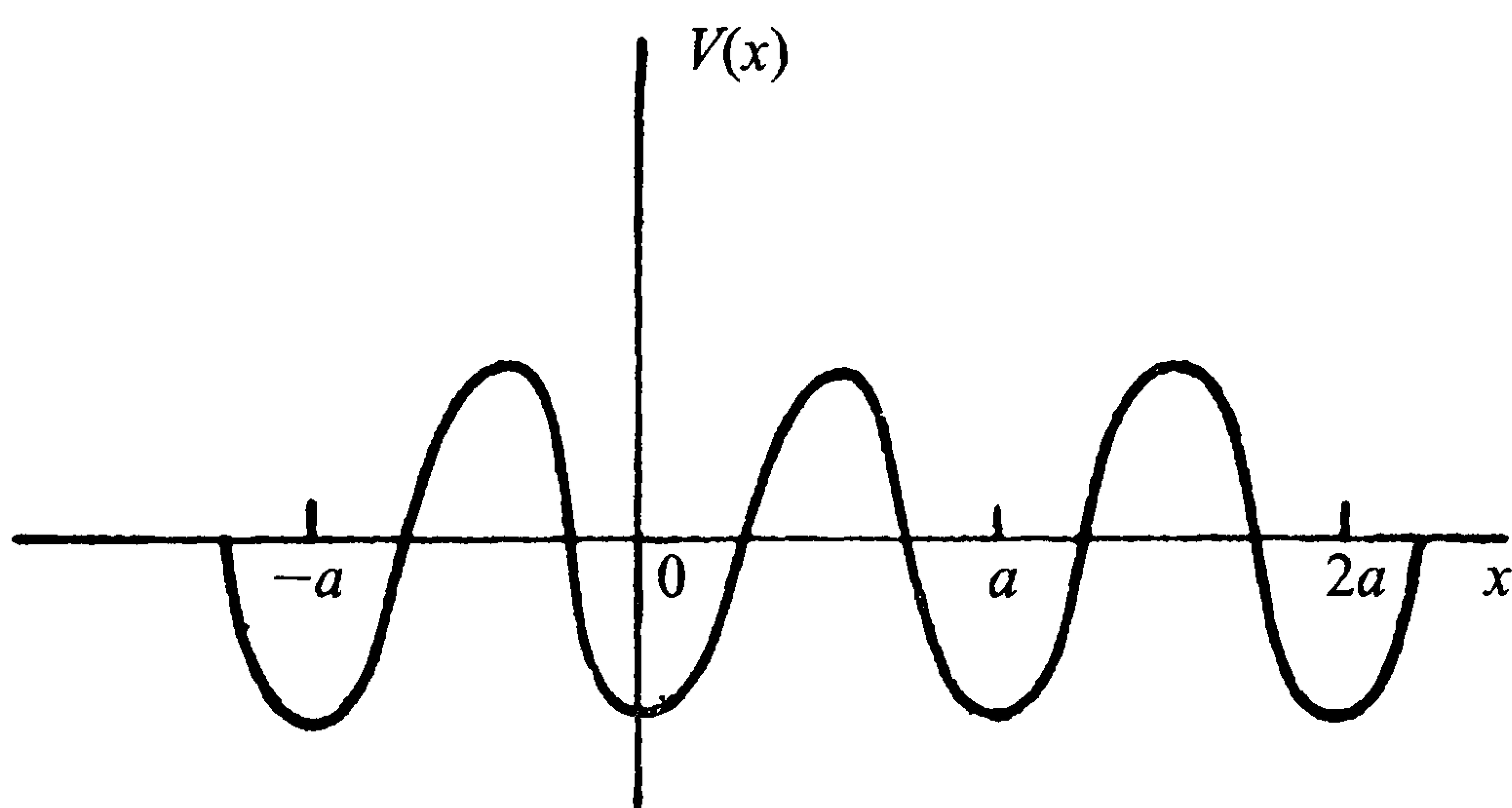



图 12.8

规范场论中存在不同 $n$ 值的真空态 $|n\rangle$ 类似于量子力学中的周期位势的情况。在量子力学中，如果位势有图 12.8 的形状，则最低的能级的波函数并不集中在 $V(x)$ 的某一个极小 $x = na$ 处，这是由于存在位垒穿透效应。相似地，在规范场论中物理真空有式(12.185)的形式这件事也可以由势垒穿透来理解。我们来计算 $|n\rangle$ 和 $|n'\rangle$ 态之间的跃迁振幅。按照 W.K.B. 方法，我们把泛函路径积分公式(12.177)延拓到四维欧氏空间中，得到跃迁振幅为

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty} \langle n' | \exp(-HT) | n\rangle &= \lim_{T\to\infty} \int_n^{n'} [\mathscr{D}A_i] \exp\left\{ -\int_0^T d^4 y \cdot \frac{1}{2} (\dot{A}_i^a \dot{A}_i^a + B_i^a B_i^a) \right\} \\ &= \lim_{T\to\infty} \int_n^{n'} [\mathscr{D}A_i] \exp(-S_E)\end{aligned} \tag{12.187}$$

上式右方是对所有 $A_i \in \{n\}$，$\tilde{A}_i \in \{n'\}$ 的路径积分。由于 $A_i$ 和 $\tilde{A}_i$ 满足条件式

(12.178),连接它们的路径上的 $\dot{A}_i^a$, $B_i^a$ 可以在 $|\boldsymbol{y}|\to\infty$ 处趋于零。所以式(12.187)中积分有限,跃迁振幅不为零。在半经典近似下,应当考虑的路径是四维欧氏纯规范场方程连接真空 $|n\rangle$ 和 $|n'\rangle$ 的解。这种解的第二陈数由式(12.139)表示。用一个 $0<x_4<T$ 的无穷大三维柱面代替 $S^3$,在 $A_0=0$ 的规范中可由式(12.139)得到

$$C_2 = \lim_{T\to\infty}[w(t=T)-w(t=0)] \tag{12.188}$$

其中,$w$ 由式(12.180)表示。这说明,在半经典近似下,对式(12.187)贡献最大的路径是 $C_2=n'-n$ 的瞬子解,因为这种解在 $C_2\neq 0$ 的场中有最小的欧氏作用量 $S_E$。因此瞬子解是不同绕数的退化真空之间位垒穿透的概率最大的路径。为了看得更清楚,可以把瞬子解式(12.151)变到 $A_0=0$ 规范,这只要用群元素

$$\exp\left\{\mathrm{i}\int_0^{x_4}\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{x}}{x^2+\lambda^2}\right\} = \exp\left\{\mathrm{i}\frac{2}{\sqrt{|\boldsymbol{x}|^2+\lambda^2}}\arctan\frac{2x_4}{\sqrt{|\boldsymbol{x}|^2+\lambda^2}}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{x}\right\}$$

做规范变换。在 $A_0=0$ 规范中得到

$$A_i(x_4=0)=0$$

$$A_i(x_4=\infty)=\frac{\mathrm{i}}{g}U_1(\boldsymbol{x})\partial_i U_1^{-1}(\boldsymbol{x}) \tag{12.189}$$

其中,$U_1(x)$ 正是式(12.179)中的群元素。上式表明瞬子解连接 $n=0$ 和 $n=1$ 两个真空态。

在文献[27]中给出了半经典近似下瞬子解对真空穿透振幅式(12.187)的贡献。令

$$A_\mu(x)=A_\mu^I(x)+gQ_\mu(x) \tag{12.190}$$

其中,$A_\mu^I(x)$ 为单瞬子解。只保留 $Q$ 的二次项,可把作用量写为如下的形式

$$S_E = S_E^I+\frac{g^2}{2}\int \mathrm{d}^4x Q_\mu\frac{\partial^2\mathscr{L}_E}{\partial A_\mu(x)\partial A_\nu(x)}Q_\nu\bigg|_{A_\mu=A_\mu^I}$$

$$\equiv S_E^I+\frac{g^2}{2}\int\mathrm{d}^4x Q\mathscr{L}''_E(A_\mu^I)Q \tag{12.191}$$

其中,$S_E^I$ 为单瞬子解的作用量

$$S_E^I=\frac{8\pi^2}{g^2} \tag{12.192}$$

由场方程可知 $S_E$ 中 $Q$ 的一次项 $\mathscr{L}'_E(A_\mu^I)Q=0$。在路径积分式(12.187)中应用式(12.191)相当于在瞬子背景上做二阶微扰。在这个近似下

$$\langle n+1|\exp(-HT)|n\rangle = \exp\left(-\frac{8\pi^2}{g^2}\right)\int_n^{n+1}[\mathscr{D}Q_\mu]$$

$$\cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\int d^4 x Q \mathscr{L}''(A_\mu^I) Q\right] \tag{12.193}$$

$Q_\mu$ 可以展开为

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \phi_i(x)$$

其中，$\phi_i$ 为本征方程

$$\mathscr{L}''(A_\mu^I)\phi_i = \lambda_i \phi_i \tag{12.194}$$

的解，对 $Q_\mu$ 的积分可以改为对 $C_i$ 的积分

$$[\mathscr{D}Q] = \prod_{i=1}^{\infty} C_i$$

单瞬子解有 5 个参数 $a_\mu$ 和 $\lambda$。在 SU(2)规范理论的情况下，瞬子在内部空间的方位可以用 3 个参数表示。在 SU($N$)群的情况下，选定了一个 SU(2)子群后，SU($N$)群的生成元中有 $4(N-2)$个和 SU(2)子群的生成元不对易，相应的变换可以改变瞬子在内部空间的方位。这样一共需要 $4(N-2)+3=4N-5$ 个参数表示嵌入 SU($N$)规范理论的单瞬子解在内部空间的方位，因此单瞬子解一共有 $4N$ 个集体坐标。作用量与这些集体坐标无关，相应于改变这些集体坐标的自由度的 $\phi_i$ 都满足

$$\mathscr{L}_E''(A_\mu^I)\phi_i = 0$$

例如，由 $\mathscr{L}_E'(A_\mu^I)=0$ 得

$$\mathscr{L}_E''(A_\mu^I)\frac{\partial A_\mu^I}{\partial \lambda} = \mathscr{L}_E''(A_\nu^I)\frac{\partial A_\mu^I}{\partial a_\rho} = 0 \tag{12.195}$$

这些 $\phi_i$ 称为零模，$\frac{\partial A_\mu^I}{\partial \lambda}$ 和 $\frac{\partial A_\mu^I}{\partial a_\rho}$ 都是零模，相应于零模的 $C_i$ 不出现在指数中。对这些 $C_i$ 的积分可以化成对集体坐标的积分。可以证明，对于每个零模，Jacobian 行列式有一个因子 $\frac{1}{g}$。其余 $C_i$ 的积分为高斯型的，它正比于 $(\det\mathscr{L}''(A^I))^{-\frac{1}{2}} = \left(\prod_i{}' \lambda_i\right)^{-\frac{1}{2}}$。这个无穷行列式发散，用与通常围绕 $A_\mu=0$ 做微扰时抵消 $\det\mathscr{L}''(A_\mu=0)$ 发散的相同抵消项就可以抵消它们。这个抵消手续等同于通常微扰理论的重整化。我们不详细叙述这些复杂的计算，只在这里给出最后的结果

$$\langle n+1|\exp(-HT)|n\rangle = CVT\int\frac{d\lambda}{\lambda^5}\left[\frac{8\pi^2}{\bar{g}^2\left(\frac{1}{\lambda\mu}\right)}\right]^{2N}\cdot\exp\left[-\frac{8\pi^2}{\bar{g}^2\left(\frac{1}{\lambda\mu}\right)}\right] \tag{12.196}$$

其中，$C$ 为一个常数，对于 SU(3) 规范理论，$C=0.10$，$V$ 为三维空间体积。$\bar{g}\left(\frac{1}{\lambda\mu}\right)$为有效耦合常数，$\mu$ 为重整化引入的标度。考虑到 $\bar{g}$ 在 $\lambda\to 0$ 时的渐近自由性质，上式中的积分在 $\lambda=0$ 一端不发散。但 $\bar{g}$ 在 $\lambda$ 大时变大，这时不知道 $\bar{g}$ 的函数形式。这表示微扰论不能用于大的瞬子。

$\theta$ 真空的跃迁振幅可写为

$$\langle\theta|\exp(-HT)|\theta\rangle=\sum_{n,\nu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\theta}\langle n+\nu|\exp(-HT)|n\rangle$$
$$=2\pi\delta(0)\sum_{\nu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\theta}\int[\mathscr{D}A_\mu]_\nu\mathrm{e}^{-S_E}$$

其中，$\int[\mathscr{D}A_\mu]_\nu$ 表示只对 $C_2=\nu$ 的路径积分。因此上式也可以写为

$$\langle\theta\left|\exp(-HT)\right|\theta\rangle=2\pi\delta(0)\int[\mathscr{D}A_\mu]\exp\left\{-S_E+\frac{\mathrm{i}\theta}{16\pi^2}g^2\int\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\widetilde{F}^E_{\mu\nu})\mathrm{d}^4x\right\}\tag{12.197}$$

其中，对 $A_\mu$ 的路径积分已无限制。式(12.197)等于在 Minkowski 空间的拉氏量中加上一项

$$\Delta\mathscr{L}_\theta=-\theta\frac{g^2}{16\pi^2}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\widetilde{F}_{\mu\nu})\tag{12.198}$$

这时有效拉氏量为

$$\mathscr{L}_{\text{eff}}=-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu})-\theta\frac{g^2}{16\pi^2}\mathrm{i}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\widetilde{F}_{\mu\nu})\tag{12.199}$$

这里得到的结果说明，$\theta$ 真空的效应可以用拉氏量中的一个附加项 $\Delta\mathscr{L}_\theta$ 表示。$\Delta\mathscr{L}_\theta$ 是一个全散度项，它的引入不改变拉氏运动方程。通常这种全散度项是通过取边界上的场为零而从作用量中丢掉的。但是由于瞬子解的存在，它们在作用量中的贡献并不为零。我们将看到，它是有物理效应的。

以上的讨论只限于纯规范场。在我们感兴趣的 $\mathrm{SU}(3)_C$ 色规范理论中还存在 Fermi 子夸克，其中 $u$ 和 $d$ 夸克质量很小。在手征对称性极限下，它们的质量为零。引入 Fermi 子以后瞬子解是不受影响的，这只要在场方程中令 Fermi 场 $\psi=0$ 就可以了。但是 Fermi 场的存在对真空穿透有影响。设 SU($N$)规范理论中有 $N_f$ 个属于 SU($N$)群基础表示的零质量 Fermi 场 $\psi^l\,(l=1,2,\cdots,N_f)$。Fermi 子的拉氏量 $\mathscr{L}_\psi=-\overline{\psi}^l\gamma_\mu D_\mu\psi^l$ 在整体变换

$$\psi^l(x)\to\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\gamma_5}\psi^l(x)$$

下不变，相应的 $U(1)$ 对称轴矢流

$$j_{5\mu}=\mathrm{i}\overline{\psi}^l\gamma_\mu\gamma_5\psi^l$$

它满足有反常的守恒方程

$$\partial_\mu j_{5\mu} = \frac{N_f g^2}{8\pi^2}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\widetilde{F}_{\mu\nu}) \tag{12.200}$$

我们可以定义没有反常的守恒轴矢流

$$\tilde{j}_{5\mu} = j_{5\mu} - 2N_f\xi_\mu = j_{5\mu} + \mathrm{i}\frac{N_f g^2}{4\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}\left[A_\nu\left(\partial_\rho A_\sigma - \mathrm{i}\frac{2}{3}gA_\rho A_\sigma\right)\right] \tag{12.201}$$

($\xi_\mu$ 和 $\xi_\mu^{\mathrm{E}}$ 差一个因子 $-\mathrm{i}$)，它满足方程

$$\partial_\mu \tilde{j}_{5\mu} = 0 \tag{12.202}$$

相应的守恒荷

$$\widetilde{Q}_5 = \int \mathrm{d}^3 x \tilde{j}_{50} = \int \mathrm{d}^3 x (j_{50} - 2N_f\xi_0)$$
$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{Q}_5}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{12.203}$$

不难验证，在规范变换

$$A_\mu \to UA_\mu U^{-1} + \frac{\mathrm{i}}{g}U\partial_\mu U^{-1}$$

下，$\xi_\mu$ 的变换为

$$\xi_\mu \to \frac{\mathrm{i}}{8\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}[g\partial_\rho\mathrm{Tr}(\mathrm{i}U^{-1}\partial_\nu UA_\sigma)$$
$$-\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(U^{-1}\partial_\nu U\cdot U^{-1}\partial_\rho U\cdot U^{-1}\partial_\sigma U)] + \xi_\mu \tag{12.204}$$

$|\boldsymbol{x}|\to\infty$ 时限制 $\alpha(x)\to 0$ 则上式右方第一项在式(12.203)中无贡献。由上式可知，$\widetilde{Q}_5$ 在 $\alpha(x)$ 在无穷远处趋于零的规范变换下是不变的。但是在改变绕数的规范变换下 $\widetilde{Q}_5\to\widetilde{Q}_5 - 2N_f w$，其中 $w$ 由式(12.180)表示。令 $U_1$ 为式(12.179)定义的使 $w$ 值增加 1 的规范变换，$R_1$ 为相应的幺正算符，则有

$$R_1\widetilde{Q}_5 R_1^{-1} = \widetilde{Q}_5 - 2N_f \tag{12.205}$$

$n=0$ 的真空满足

$$\widetilde{Q}_5|0\rangle = 0,\qquad R_1^n|0\rangle = |n\rangle \tag{12.206}$$

由上两式得到

$$\widetilde{Q}_5|n\rangle = 2N_f n|0\rangle \tag{12.207}$$

由 $[\widetilde{Q}^5, H]=0$ 得

$$\langle n'|\exp(-HT)|n\rangle \sim \delta_{nn'} \tag{12.208}$$

上式说明，当存在零质量 Fermi 子时，不同 $n$ 值的真空间的穿透是被禁戒的。

零质量 Fermi 子的存在禁戒真空穿透这一结论也可以由路径积分公式得出。考虑零质量 Fermi 子场后真空穿透的振幅由下式表示

$$\langle n' | e^{-HT} | n \rangle = \int_n^{n'} [\mathscr{D}A_\mu] e^{-S_E[A]} \int [\mathscr{D}\psi][\mathscr{D}\bar{\psi}] \cdot \exp\left(-\int d^4 x \bar{\psi} \not{D} \psi\right) = C \int_n^{n'} [\mathscr{D}A_\mu] e^{-S_E[A]} \det(\not{D}(A)) \qquad (12.209)$$

其中，$\psi$ 有 $N_f$ 个味。考虑在背景场 $A_\mu^I$ 下的 Dirac 算符 $\not{D}(A^I)$ 的本征方程

$$-i\gamma_\mu(\partial_\mu - igA_\mu^I(x))\chi_i = E_i \chi_i$$

$$\int \chi_{i'}^\dagger(x)\chi_i(x) d^4 x = \delta_{i'i}$$

$$\det(\not{D}(A^I)) = \prod_i E_i \qquad (12.210)$$

在文献[25]中，对于单瞬子解背景场的方程(12.210)，得到一个零能($E_i = 0$)左手 Fermi 场解

$$\chi_0(x - a, \lambda) = \frac{\lambda^{3/2}}{[(x-a)^2 + \lambda^2]^{3/2}} u_0 \qquad (12.211)$$

其中，$u_0$ 为一个与 $x$ 无关的左手旋量，$\lambda$ 和 $a$ 为瞬子解的参数。这时 $\det(\not{D}(A^I)) = 0$。故单瞬子解对式(12.209)中的穿透振幅没有贡献。数学家证明了如下的指数定理[28]：对任何有第二陈数 $C_2$ 的背景场 $A_\mu^I$，不论它是否是规范场方程的解，方程(12.210)的左手零本征值解数 $\nu_+$ 与右手零本征值解数 $\nu_-$ 有关系

$$C_2 = \nu_+ - \nu_- \qquad (12.212)$$

上式表明，对于任何 $C_2 \neq 0$ 的背景场，一定存在零能解。这就严格地证明了，式(12.209)中穿透振幅为零。

人们可能会以为，既然在有零质量 Fermi 子时没有不同 $n$ 值的真空间的穿透，物理真空就可以不是 $\theta$ 真空而是平凡的真空 $|n = 0\rangle$ 了。但这是不对的。在文献[26]中对此作了论证。令 $A(\boldsymbol{x})$ 和 $B(\boldsymbol{x})$ 为时刻 $t = 0$ 的两个定域算符，由真空的成团分解性质(见第二章)

$$\langle Vac | A(\boldsymbol{x}) B(\boldsymbol{y}) | Vac \rangle \sim \langle Vac | A(\boldsymbol{x}) | Vac \rangle \langle Vac | B(\boldsymbol{y}) | Vac \rangle$$

$$\text{当} \quad |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \to \infty \qquad (12.213)$$

设 $A(\boldsymbol{x})$ 带手征量子数 $2l$，即

$$[\widetilde{Q}^5, A(\boldsymbol{x})] = 2lA(\boldsymbol{x}) \qquad (12.214)$$

其中，$2l$ 为非零整数。例如，$A(x) = \bar{\psi}(1 \pm \gamma_5)\psi$ 时 $l = \pm 1$。由式(12.214)及(12.207)知

$$\langle n'|A(x)|n\rangle \propto \delta_{(n'-n)N_f,l} \tag{12.215}$$

假如物理真空具有确定的 $n$ 值，则由式(12.213)得 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\to\infty$ 时

$$\langle n|A^{\dagger}(x)A(y)|n\rangle \to \langle n|A^{\dagger}(x)|n\rangle\langle n|A(y)|n\rangle = 0$$

但上式是不对的，因为，如果 $l$ 是 $N_f$ 的整数倍，上式左方对中间态求和包含一项

$$\left\langle n|A^{\dagger}(x)|n+\frac{l}{N_f}\right\rangle\left\langle n+\frac{l}{N_f}\middle|A(y)|n\right\rangle = \left\langle n|A^{\dagger}(0)|n+\frac{l}{N_f}\right\rangle \times \left\langle n+\frac{l}{N_f}|A(0)|n\right\rangle \neq 0$$

$\theta$ 真空则不同。我们有

$$\langle\theta'|A|\theta\rangle = \sum_{n,n'}\exp[-\mathrm{i}(n\theta-n'\theta')]\langle n'|A|n\rangle = \sum_{n}\exp\left[-\mathrm{i}n(\theta-\theta')+\mathrm{i}\frac{l}{N_f}\theta'\right]\left\langle n+\frac{l}{N_f}|A|n\right\rangle$$

对规范不变的算符

$$\left\langle n+\frac{l}{N_f}|A|n\right\rangle = \left\langle\frac{l}{N_f}|A|0\right\rangle$$

因此有

$$\langle\theta'|A|\theta\rangle = 2\pi\delta(\theta-\theta')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{l}{N_f}\theta}\left\langle\frac{l}{N_f}|A|0\right\rangle \tag{12.216}$$

当 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\to\infty$ 时

$$\begin{aligned}\langle\theta|B(x)A(y)|\theta\rangle &\to \int\frac{\mathrm{d}\theta'}{2\pi}\langle\theta|B(x)|\theta'\rangle\langle\theta'|A(y)|\theta\rangle\\ &= 2\pi\delta(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{l+l'}{N_f}\theta}\left\langle\frac{l'}{N_f}\middle|B\middle|0\right\rangle\left\langle\frac{l}{N_f}\middle|A\middle|0\right\rangle\\ &= \frac{1}{2\pi\delta(0)}\langle\theta|B(x)|\theta\rangle\langle\theta|A(y)|\theta\rangle\\ &= \frac{\langle\theta|B(x)|\theta\rangle\langle\theta|A(y)|\theta\rangle}{\langle\theta|\theta\rangle}\end{aligned}$$

因此 $\theta$ 真空满足成团分解条件式(12.213)。

类似于式(12.216)，我们有

$$\begin{aligned}\langle\theta'|\mathrm{e}^{-HT}|\theta\rangle &= 2\pi\delta(\theta-\theta')\langle 0|\mathrm{e}^{-HT}|0\rangle\\ &= 2\pi\delta(\theta-\theta')\mathrm{e}^{-E_0T}\end{aligned} \tag{12.217}$$

其中，$E_0$ 为真空能量。由上式知 $E_0$ 与 $\theta$ 无关

$$\frac{\partial}{\partial\theta}E_0 = 0$$

现在我们用路径积分讨论带手征量子数的算符在 $\theta$ 真空中的平均值。设 $\sigma$ 为由 $\psi(x)$和 $\overline{\psi}(x)$的乘积构成的带有手征量子数的算符。它的真空平均值为

$$\langle n'|\sigma(x)|n\rangle = \int_n^{n'}[\mathscr{D}A]\exp\{-S_E[A]\}$$

$$\times\int[\mathscr{D}\psi][\mathscr{D}\overline{\psi}]\sigma(x)\exp\left\{-\int d^4x\overline{\psi}\not{D}\psi\right\} \tag{12.218}$$

将 $\psi(x)$和 $\overline{\psi}(x)$展开为

$$\psi^l(x) = \sum a_i^l\chi_i(x), \qquad \overline{\psi}^l(x) = \sum \overline{a}_i^l\chi_i^\dagger(x) \tag{12.219}$$

其中,$a_i$ 和 $\overline{a}_i$ 为 Grassmann 数,$\chi_i$ 为方程(12.210)的解。由上面的讨论知道,如 $n'\neq n$,则方程(12.210)至少包含 $|n'-n|$个左手或右手零能解

$$\int[\mathscr{D}\psi][\mathscr{D}\overline{\psi}]\exp\left\{-\int d^4x\overline{\psi}\not{D}(A)\psi\right\} = \int\prod(da_i^l d\overline{a}_i^l)\exp\left(-\sum_i E_i\overline{a}_i^l a_i^l\right) \tag{12.220}$$

零能解的 Grassmann 系数不出现在上式右方。考虑到 Grassmann 数积分的规则

$$\int da_i^l = \int d\overline{a}_i^l = 0$$

$$\int da_i^l\cdot a_i^l = \int d\overline{a}_i^l\cdot\overline{a}_i^l = 1$$

由式(12.218)～(12.220)可知,如$\langle n'|\sigma(x)|n\rangle\neq0$ 则 $\sigma(x)$必须含$(n'-n)N_f$个 $\psi$ 和$(n'-n)$个 $\overline{\psi}$,这是与式(12.215)一致的。如

$$\sigma_\pm(x) = \prod_{k=1}^{N-1}(\overline{\psi}^{mk}(1\pm\gamma_5)\psi^{lk})$$

则在考虑了式(12.196)后,得到瞬子解对$\langle\theta|\sigma_\pm|\theta\rangle$的贡献

$$\langle\theta|\sigma_\pm(x)|\theta\rangle = \int_0^1[\mathscr{D}A]\exp\{-S_E[A]\}\varepsilon_{l_1,l_2,\cdots,l_{Nf}}$$

$$\times\varepsilon_{m_1,m_2,\cdots,m_{Nf}}(\overline{\chi}_0(1\pm\gamma_5)\chi_0)^{N_f}\prod_{i\neq0}E_i$$

$$\sim CVT\int\frac{d\lambda}{\lambda^5}\frac{1}{(\overline{g}^2)^{2N}}\exp\left(\frac{-8\pi^2}{\overline{g}^2}\right)\varepsilon_{l_1,l_2,\cdots,l_{Nf}}$$

$$\times\varepsilon_{m_1,m_2,\cdots,m_{Nf}}(\overline{\chi}_0(1\pm\gamma_5)\chi_0)^{N_f}\prod_{i\neq0}E_i$$

可以把上式解释为瞬子和 Fermi 场有一个等价的作用

$$C\frac{1}{(\overline{g}^2)^{2N}}\exp\left(\frac{-8\pi^2}{\overline{g}^2}\right)(\det\mathfrak{M}_+ + \det\mathfrak{M}_-)$$

$$(\mathfrak{M}_\pm)_{l'l} = (\overline{\psi}^{l'}(1\pm\gamma_5)\psi^l) \tag{12.221}$$

上面的讨论说明，在有零质量 Fermi 子时，不同 $\theta$ 值的真空能量相等，建筑在它们之上的 Hilbert 空间在物理上是完全等价的。它们以手征变换 $e^{-i\alpha\tilde{Q}_5}$ 相联系。由式(12.207)知

$$e^{-i\alpha\tilde{Q}_5}\mid\theta\rangle=\mid\theta+2\alpha N_f\rangle \tag{12.222}$$

但是由式(12.216)知道，任意局部算符在不同 $\theta$ 真空之间的矩阵元都为零。因此建筑在不同 $\theta$ 真空上的量子态 Hilbert 空间是正交的，$e^{-i\alpha\tilde{Q}_5}$ 不是定义在一个物理态 Hilbert 空间中的算符，即 $e^{-i\alpha\tilde{Q}_5}$ 不幺正。由第二章的一般讨论知道，这时由 $\tilde{Q}_5$ 产生的手征对称自发破缺了。

以上的讨论可以用来解决量子色动力学的一个难题[25]。在这个理论中有 $u$，$d$ 两种味的轻夸克。忽略其他的夸克可把拉氏量写为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}-\bar{u}\not{D}u-\bar{d}\not{D}d-m_u\bar{u}u-m_d\bar{d}d \tag{12.223}$$

忽略 $m_u$ 和 $m_d$ 时，拉氏量有 $SU(2)_L\times SU(2)_R$ 整体对称性。为得到 PCAC 和流代数的结果，这个对称性应当破缺到同位旋 $SU(2)_{L+R}$，这可能是由于 $\langle\bar{u}u+\bar{d}d\rangle_0\neq0$ 产生的动力学自发破缺。相应于破缺的轴矢流 $j^a_{5\mu}=i\bar{\psi}\frac{\tau_a}{2}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ 的 Goldstone 粒子是 $\pi$ 介子同位旋三重态。$u$ 和 $d$ 的质量项可看作微扰，考虑它以后，$\pi$ 介子得到小的质量。由式(7.21)得 $m_\pi^2=-\frac{\langle0|\bar{u}u+\bar{d}d|0\rangle}{f_\pi^2}$。但是在 $m_u=m_d=0$ 时拉氏量式(12.223)的最大整体对称性是 $SU(2)_L\times SU(2)_R\times U(1)_L\times U(1)_R$，其中 $U(1)_L$ 和 $U(1)_R$ 荷代表左手和右手夸克($u$ 和 $d$)数。$U(1)_L\times U(1)_R=U(1)_V\times U(1)_A$。$U(1)_V$ 对称代表 Fermi 子数守恒，是没有破缺的对称性。此外还有一个轴矢 Abel 对称群 $U(1)_A$，相应的流

$$j_{5\mu}=i\bar{u}\gamma_\mu\gamma_5u+i\bar{d}\gamma_\mu\gamma_5d \tag{12.224}$$

在经典理论中是守恒的。假设 $U(1)_A$ 在量子理论中不破缺。由荷 $Q_5=\int j_{50}d^3x$ 在空间反射 $P$ 下变号，$PQ_5P^{-1}=-Q_5$ 及 $[H,Q_5]=0$ 知道，如果理论中存在一个由 $u$ 和 $d$ 夸克组成的强子态 $|h\rangle$，则必定也存在一个与它宇称相反而同位旋和质量相同的强子态 $Q_5|h\rangle$。但是实际上并不存在这种宇称双重态。假如这个 $U(1)_A$ 对称是自发破缺的，则必定存在相应的同位旋单态 Goldstone 粒子 $\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u+\bar{d}d)$，它的质量应为

$$m_s^2=-\frac{m_u+m_d}{f_s^2}\langle0|\bar{u}u+\bar{d}d|0\rangle$$

其中，$f_s$ 为同位旋单态 Goldstone 粒子的衰变常数。$f_s$ 不应比 $f_\pi$ 小很多，因而应当存在一个对应于 $U(1)_A$ 流的轻的同位旋为 0 的 Goldstone 粒子。实验上虽然有同位旋为 0 的 $\eta$ 粒子，但它的质量比 $m_\pi$ 大很多，而且我们在 7.1 节中已看到，它很好地被解释为 $SU(3)_A$ Goldstone 粒子之一。如果我们进一步把 $s$ 夸克考虑为轻的，则拉氏量有 $SU(3)_L\times SU(3)_R\times U(1)_L\times U(1)_R$ 手征对称性。这时有两个同位旋为 0 的 Goldstone 粒子，一个为 $SU(3)_V$ 单态$\frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{u}u+\bar{d}d+\bar{s}s)$，另一个为 $SU(3)_V$ 八重态$\frac{1}{\sqrt{6}}(\bar{u}u+\bar{d}d-2\bar{s}s)$。由于 $m_s\neq m_u, m_d$，$SU(3)_V$ 对称性破坏，质量本征态应为它们的线性组合。在文献[29]中用流代数证明，考虑了 $m_s$ 造成的混合效应后，当 $m_s\gg m_u, m_d$ 时最轻的一个同位旋为 0 的 Goldstone 粒子的组成为 $\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u+\bar{d}d)$，它的质量

$$m_0<\sqrt{3}m_\pi \tag{12.225}$$

这个不等式对 $SU(3)_V$ 单态和八重态的衰变常数比 $f_0/f_\pi$ 为任意数时成立。实验上观察到两个同位旋为 0 的赝标介子 $\eta$ 和 $\eta'$，最轻的一个 $m_\eta=547.3\text{MeV}$，另一个的质量为 $m_{\eta'}=957.8\text{MeV}$，都与式(12.225)矛盾。按照 Gell-Mann-Okubo 公式，$\eta$ 主要是 $SU(3)_V$ 八重态，与 $SU(3)_V$ 单态的混合不很大，其组成不是$\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u+\bar{d}d)$。这就是 QCD 的所谓 $U(1)_A$ 问题。

解决这个问题的第一步是，认识到 $U(1)_A$ 对称在量子理论中是被反常明显破坏的，因此轴矢流 $j_\mu^5$ 满足有反常的方程(12.200)。由式(12.203)知道，在 $t$ 由 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时，$Q_5$ 的改变为

$$\Delta Q_5=\int dx_0\dot{Q}_5=2N_f\int d^4x\partial_\mu\xi_\mu=\frac{N_fg^2}{8\pi^2}\int d^4x\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\widetilde{F}_{\mu\nu}) \tag{12.226}$$

上式表示 $Q^5$ 不守恒。注意，瞬子的存在是 $Q^5$ 不守恒的原因。在 Abel 规范理论中，虽然轴矢流也有反常，但因为没有瞬子，$Q^5$ 还是守恒的。$Q_5$ 不守恒意味着由幺正算符 $R(\alpha)=e^{-i\alpha Q_5}$ 实现的 $U(1)_A$ 变换不是量子理论的对称性。但是问题还没有完全解决。因为由式(12.203)定义的荷 $\widetilde{Q}_5$ 是守恒的。由 $\widetilde{R}(\alpha)=e^{-i\alpha\widetilde{Q}_5}$ 实现的 $\widetilde{U}(1)_A$ 似乎可以是量子理论的对称性。Fermi 场在这个变换下的行为与 $R(\alpha)$ 变换下是一样的。因此似乎还是有强子的宇称双重态问题。对这一点的解释是，$\widetilde{R}(\alpha)$不是能在物理态 Hilbert 空间中定义的幺正算符。如前面已说明的，这个新的 $\widetilde{U}(1)_A$ 自发破缺了。为什么没有观察到 Goldstone 粒子呢？因为 $\widetilde{Q}_5$ 不是规范

不变的，和它相应的 Goldstone 粒子不与规范不变的场量相耦合。事实上，如果它们与规范不变的算符 $A(x)$ 相耦合，则 Green 函数 $\langle\theta|T(A^{\dagger}(x)A(y))|\theta\rangle$ 中将出现在规范变换下非不变的极点项。由 $|\theta\rangle$ 在规范变换下的性质式(12.184)知道，这是不可能的。但是这些 Goldstone 粒子的极点项可以出现在非规范不变的算符的 Green 函数中，例如可以出现在 $\langle\theta|T(\xi_{\mu}(x)\xi_{\nu}(y))|\theta\rangle$ 中。

在量子色动力学中，瞬子和 $\theta$ 真空的存在虽然解决了 $\mathrm{U}(1)_A$ 问题但它也产生了新的问题。有效拉氏量中的 $\Delta\mathscr{L}_{\theta}$ 项式(12.198)破坏空间反射 $P$ 和时间反演 $T$ 对称性。在有零质量 Fermi 子时可以通过 $\widetilde{U}(1)_A$ 变换使这一项变为零。但是在夸克都有质量时这一项将产生可以观测的 CP 破坏效应。这可以由路径积分形式看出来。在夸克有质量时生成泛函 $W$ 可以写为

$$W[\eta,\bar{\eta}]=\int[\mathscr{D}A]\exp\int\mathrm{d}^4x\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu})+\theta\mathrm{i}\frac{g^2}{16\pi^2}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mathrm{E}}_{\mu\nu})\right\}W[A,\eta,\bar{\eta}] \tag{12.227}$$

$$W[A,\eta,\bar{\eta}]=\int[\mathscr{D}\psi][\mathscr{D}\bar{\psi}]\exp\int\mathrm{d}^4x\{-\bar{\psi}\not{D}(A)\psi+\mathscr{L}_M+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta\} \tag{12.228}$$

$$\mathscr{L}_M=-\bar{\psi}_{\mathrm{R}}M\psi_{\mathrm{L}}-\bar{\psi}_{\mathrm{L}}M^{\dagger}\psi_{\mathrm{R}} \tag{12.229}$$

在 10.3 节中已证明，在变换

$$\psi\rightarrow\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\gamma_5}\psi \tag{12.230}$$

下 Fermi 子的泛函积分测度

$$[\mathscr{D}\psi][\mathscr{D}\bar{\psi}]\rightarrow\exp\left\{-\mathrm{i}\alpha\frac{g^2N_f}{8\pi^2}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mathrm{E}}_{\mu\nu})\right\}[\mathscr{D}\psi][\mathscr{D}\bar{\psi}] \tag{12.231}$$

因此，在式(12.228)中做形如式(12.230)的积分变量替换并令 $\alpha=\dfrac{\theta}{2N_f}$ 可得

$$W[A,\eta,\bar{\eta}]=\int[\mathscr{D}A]\exp\int\mathrm{d}^4x\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu})\right\}$$
$$\times\int[\mathscr{D}\psi][\mathscr{D}\bar{\psi}]\exp\int\mathrm{d}^4x\{-\bar{\psi}\not{D}(A)\psi+\mathscr{L}_M'+\bar{\eta}'\psi+\bar{\psi}\eta'\} \tag{12.232}$$

其中

$$\eta'=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\gamma_5}\eta,\qquad\bar{\eta}'=\bar{\eta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\gamma_5},$$
$$\mathscr{L}'_M=-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\alpha}\bar{\psi}_{\mathrm{R}}M\psi_{\mathrm{L}}-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\bar{\psi}_{\mathrm{L}}M^{\dagger}\psi_{\mathrm{R}} \tag{12.233}$$

在上式中，$\Delta\mathscr{L}_{\theta}$ 项消失了。这是与算符方程(12.222)一致的。如果 $M=0$，则式(12.232)右方只是重新定义外源 $\eta$ 和 $\bar{\eta}$ 而已。这时没有 CP 破坏效应。但是在 $M\neq0$ 时，式(12.233)中一般要出现虚的质量项，它们产生 CP 破坏。事实上利用流

代数可以由式(12.233)得到一个破坏 CP 的核子-π 介子耦合项。由于这个作用使中子转化为质子和 π 介子并由此产生中子的电荷分布，它们可以对中子的电偶极矩作贡献。由中子电偶极矩的实验上限可得

$$|\theta| < 10^{-9} \tag{12.234}$$

但是 $\theta$ 真空是强作用的现象，如无对称性的保证，$\theta$ 的量级不应这样小。这就是所谓强 CP 破坏问题。

提出来解决这个问题的设想有以下几个：

(1) 有一个夸克，可能是 $u$ 夸克，质量为零。但是这个想法与流代数的结果不合。

(2) 在弱电统一理论中夸克的质量矩阵来自 Higgs 场的真空平均值。在文献[29]中提出，如果比最小的标准模型多引入一个 Higgs 二重态，则理论中有一个包含 Higgs 场的位相变换的整体 U(1)对称性 $U(1)_{PQ}$，可以用来消去式(12.233)中的相因子 $e^{2i\alpha}$，这个 $U(1)_{PQ}$ 对称性是自发破缺的同时又有反常。因此有一个赝 Goldstone 粒子，它由于有瞬子效应而得到质量。由于 Higgs 场只有弱电作用，这个瞬子来自弱作用 $SU(2)_L$ 规范场。由于 $SU(2)_L$ 规范耦合常数 $g_2$ 很小，所以这是一种质量很小的标量粒子，称为轴子。这样的由 Weinberg-Salam 模型引入的轴子已为实验所否定。于是又有人提出在大统一理论的框架内引入轴子。Goldstone 粒子与 Fermi 子流的耦合正比于 $\frac{k_\mu}{f}$，其中 $k_\mu$ 是 Goldstone 粒子的动量，$f$ 是它的衰变常数。在大统一理论中 $f$ 是 $m_X$ 的量级。因此这种轴子耦合非常弱，不能由实验观察到。但是这种粒子如果存在会在宇宙学上有效应。

(3) 作为一个对称性的要求，令量子色动力学的 $\theta$ 参数 $\theta_{QCD}=0$，即要求强作用保持 CP 对称性，但是这并不足以消除 $\theta$ 真空问题，弱电统一理论在微扰论高阶会产生破坏 CP 的与 $\gamma_5$ 有关的质量矩阵项。在做手征变换消去这种项时，由于有式(12.231)，$\Delta\mathscr{L}_\theta$ 又重新出现了。我们称这种 $\theta$ 参数为 $\theta_{QFD}$

$$\theta_{QFD} = \arg \det M$$

其中，$M$ 为式(12.229)中的质量矩阵，通常弱电统一理论中破坏 CP 的相互作用项是“硬的”，即量纲为 4。这时 $\theta_{QFD}$ 有发散。例如，有复耦合常数的汤川耦合时，由于 Higgs 场真空平均值有发散，$\theta_{QFD}$ 是发散的。因此经过重整化以后，$\theta_{QFD}$ 的量级一般不会很小，为能自然地满足实验限式(12.234)，破坏 CP 的相互作用项必须是“软”的，即量纲小于 4 的项，或者是由自发破缺产生的，并且质量矩阵只在高阶破坏 CP。

强 CP 破坏问题还没有满意的解决办法。

## 参 考 文 献

1 S Coleman. Lectures at the 1975 International School of Subnuclear Physics "Ettore Majorara"; R Rajaraman. Physics Reports. 1975, 21C: 227
2 T H R Skyrme. Proc Roy Soc. 1961, A260: 127
3 R Friedberg, T D Lee and A Sirlin. Phys Rev. 1976, D13: 2736; Nucl Phys. 1976, B115: 32; K C Chou(周光召); C Y Chu(朱重远); Y B Dai(戴元本) and Y S Wu(吴泳时). Scientia Sinica. 1980, 23: 40
4. G H Derrick. Jour Math Phys. 1964, 5: 1252
5 S Deser. Phys Lett. 1976, 64B: 463
6 S T Hu. Homotopy Theory. New York: Academia Press: 1959
7 H B Nielsen and P Olesen. Nucl Phys. 1973, B61: 45
8 P A M Dirac. Proc Roy Soc. 1931, A133: 60
9 T T Wu and C N Yang. Nucl Phys. 1976, B107: 365
10 G 'tHooft. Nucl. Phys., 1974, B79: 276; A M Polyakov. J. E. T. P. Lett. 1974, 20: 194
11 M Prasad and C Sommerfield. Phys Rev Lett. 1975, 35: 760
12 J Arafune, P G O Freund and C J Goebel. Jour Math Phys. 1975, 16: 433; 段一士, 葛墨林, 侯伯宇. 兰州大学学报(自然科学), 1975, 2
13 B Julia and A Zee. Phys Rev. 1975, D11: 2227
14 P Hasenfratz and G 'tHooft. Phys Rev Lett. 1976, 36: 1119; R Jackiw and C Rebbi. Phys Rev Lett. 1976, 36: 1116
15 A Goldhaber. Phys Lett. 1976, 36: 1122
16 V A Rubakov. J. E. T. P. Lett. 1982, 48: 1148
17 C G Jr Callan. Phys Rev. 1982, D25: 2141; D26: 2058
18 K Kazama, C N Yang and A S Goldhaber. Phys Rev. 1977, D15: 2287
19 W Maciano, I J Muzinich. Phys Rev Lett. 1983, 50: 1035
20 S S Chern. Complex Manifolds Without Potential Theory, Springer 1979; T Eguchi, P B Gilkey and A J Hanson. Phys Reports. 1980, 16: 213
21 A A Belavin, A M Polyakov, A S Schwartz and Yu S Tyupkin. Phys Lett. 1975, 59B: 85
22 G 'tHooft. Orbis Scientia 1977 Coral Gables Conf et. A Perlmutter
23 R Jackiw, C Nohl and C Rebbi. Phys Rev. 1977, D15: 1642
24 R Jackiw and C Rebbi. Phys Lett. 1977, 67B: 189; A S Schwartz. Phys Lett. 1977, 67B: 172
25 G 'tHooft. Phys Rev Lett. 1976, 37: 8
26 C G Jr Callan, R I Dashen and D J Gross. Phys Rev. 1978, D17: 2717
27 G 'tHooft. Phys Rev. 1976, D14: 3432
28 M Atiyah and I Singer. Ann Math. 1968, 87: 484
29 S Weinberg. Phys Rev. 1975, D11: 3583

# 附录　符号、约定与一些基本公式

**(1) 度规**

时空坐标　$x_\mu = (\boldsymbol{x}, x_4), x_4 = \mathrm{i}x_0 = \mathrm{i}t$

坐标微商　$\partial_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\nabla, \dfrac{\partial}{\partial x_4}\right) = \left(\nabla, -\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial x_0}\right)$

四维动量　$p_\mu = (\boldsymbol{p}, p_4), p_4 = \mathrm{i}p_0 = \mathrm{i}E$, $E$ = 能量

标　　积　$x_\mu y_\mu = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i + x_4 y_4 = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} - x_0 y_0$

**(2) 标量场**(复场)

自由场方程　　　$(\partial_\mu \partial_\mu - \mu^2)\varphi(x) = 0$

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}^3 k \, \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}(a(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} + b^\dagger(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x})$$

$$k_0 = \omega_k = (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} + \mu^2)^{\frac{1}{2}}$$

自由场对易关系

$$[a(k), a^\dagger(k')] = [b(k), b^\dagger(k')] = \delta^3(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')$$

**(3) $\gamma$ 矩阵**

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}, \qquad \mu, \nu = 1,2,3,4$$

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu$$

$$\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = \frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma$$

Dirac 表示

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}\sigma_i \\ \mathrm{i}\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5 = -\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

手征表示

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}\sigma_i \\ \mathrm{i}\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

**(4) Dirac 旋量**

自由 Dirac 场方程($m \neq 0$)

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0$$

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\sigma=\pm 1} \int \mathrm{d}^3 p \sqrt{\frac{m}{E_p}} (c_\sigma(p) u_\sigma(p) \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} + d_\sigma^\dagger(p) v_\sigma(p) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x})$$

$$p_0 = E_p = \sqrt{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p} + m^2}$$

$$(\mathrm{i}\not{p} + m) u_\sigma(p) = 0$$

$$(\mathrm{i}\not{p} - m) v_\sigma(p) = 0$$

$$\not{p} = \gamma_\mu p_\mu$$

归一化

$$\bar{u}_\sigma(p) u_{\sigma'}(p) = \delta_{\sigma\sigma'}, \quad \bar{v}_\sigma(p) v_{\sigma'}(p) = -\delta_{\sigma\sigma'}$$

投影算符

$$P_+ = \sum_\sigma u_\sigma(p) \bar{u}_\sigma(p) = \frac{-\mathrm{i}\not{p} + m}{2m}$$

$$P_- = -\sum_\sigma v_\sigma(p) \bar{u}_\sigma(p) = \frac{\mathrm{i}\not{p} + m}{2m}$$

零质量($m = 0$)自由 Dirac 场

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_\sigma \int \mathrm{d}^3 p (c_\sigma(p) u_\sigma(p) \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} + d_\sigma^\dagger(p) v_\sigma(p) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x})$$

$$u_\sigma^*(p) u_{\sigma'}(p) = v_\sigma^*(p) v_{\sigma'}(p) = \delta_{\sigma\sigma'}$$

$$P_+ = \sum_\sigma u_\sigma(p) \bar{u}_\sigma(p) = \frac{-\mathrm{i}\not{p}}{2|\boldsymbol{p}|}$$

$$P_- = -\sum_\sigma v_\sigma(p) \bar{v}_\sigma(p) = \frac{\mathrm{i}\not{p}}{2|\boldsymbol{p}|}$$

自由场对易关系

$$\{c_\sigma(p), c_{\sigma'}^\dagger(p')\} = \{d_\sigma(p), d_{\sigma'}^\dagger(p')\} = \delta_{\sigma\sigma'} \delta^3(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')$$

**(5) 态的归一化**

$\sigma$ 及$\sigma'$为初末态自旋。单粒子态 $\langle \boldsymbol{P}',\sigma' | \boldsymbol{P},\sigma\rangle = (2\pi)^3 2E_p \delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\delta_{\sigma\sigma'}$

在自由场情况下单标量粒子和单 Fermi 子态为

$$|k\rangle = \sqrt{2\omega_k (2\pi)^3}\, b^\dagger(k)|0\rangle$$

$$|p,\sigma\rangle = \sqrt{2E_p (2\pi)^3}\, c_\sigma^\dagger(p)|0\rangle$$

**(6) 规范理论的量**

规范势 $A_\mu(x) = (\boldsymbol{A}, A_4), A_4 = \mathrm{i}A_0, A_0 =$ 实数

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x) T_a$$

$T_a$ 为规范群(设为单纯群)生成元在某个幺正表示中的矩阵,它们满足

$$T_a^\dagger = T_a$$

$$[T_a, T_b] = \mathrm{i} f_{abc} T_c$$

$$f_{acd} f_{bcd} = C_2(A)\delta_{ab}$$

$f_{abc}$全反对称

规范变换 令 $\phi(x) = (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n)$

$$\phi(x) \to U(x)\phi(x) = \exp(-\mathrm{i}\alpha^a(x) T_a)$$

$$A_\mu(x) \to U A_\mu U^{-1} - \frac{\mathrm{i}}{g}\partial_\mu U \cdot U^{-1}$$

协变微商 $D_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}gA_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}gA_\mu^a T_a$

规范场强 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \mathrm{i}g[A_\mu, A_\nu]$

$$= (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c) T_a$$

$$F_{ij} = \varepsilon_{ijk} B_k, \quad F_{4j} = -F_{j4} = \mathrm{i}E_j \quad i,j,k = 1,2,3$$

$E_j$—— 电场强度,$B_j$—— 磁场强度

$$\partial_\mu A_\mu = \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{\partial A_4}{\partial x_4} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{\partial A_0}{\partial x_0}$$

Noether 流密度

$$g j_\mu^a(x) = -\mathrm{i}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} T_a \phi(x)$$

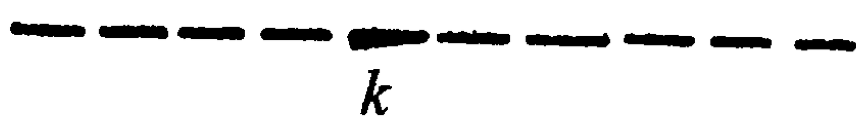
$$j_\mu = (\boldsymbol{j}, \mathrm{i}j_0), j_0 = \rho = \text{荷密度}$$

Fermi 子流 $\quad j_\mu^a = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_\mu T_a \psi$

**(7) Feynman 规则**

标量场传播子

$$-\mathrm{i}\Delta_F(x)=\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\Delta_F(k)$$




$$-\mathrm{i}\Delta_F(k)=\frac{-\mathrm{i}}{k^2+\mu^2-\mathrm{i}\varepsilon}$$

附图 1

Fermi 子传播子

$$-\mathrm{i}S_F(x)=\frac{-\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}S_F(p)$$




$$-\mathrm{i}S_F(p)=\frac{-\mathrm{i}}{\mathrm{i}\not{p}+m-\mathrm{i}\varepsilon}$$

附图 2

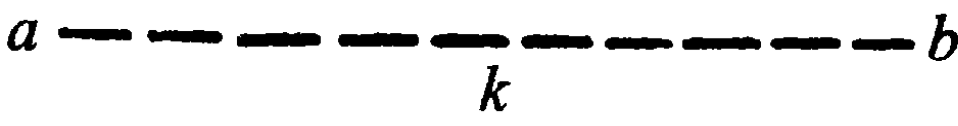
规范场传播子(协变规范)




$$-\mathrm{i}\Delta_{F\mu\nu}^{ab}(k)=\frac{-\mathrm{i}}{k^2-\mathrm{i}\varepsilon}\left[\delta_{\mu\nu}-(1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2-\mathrm{i}\varepsilon}\right]\cdot\delta_{ab}$$

附图 3

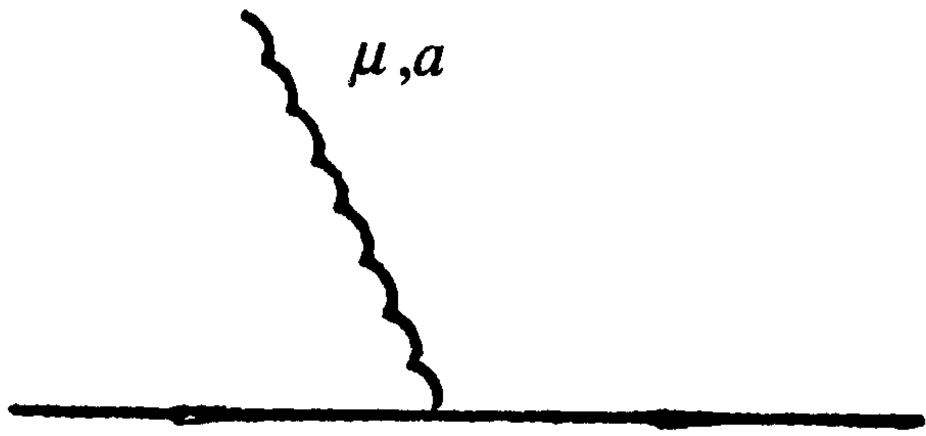
虚拟场传播子(协变规范)




$$-\mathrm{i}\Delta_F^{ab}(k)=\frac{-\mathrm{i}}{k^2-\mathrm{i}\varepsilon}\delta_{ab}$$

附图 4

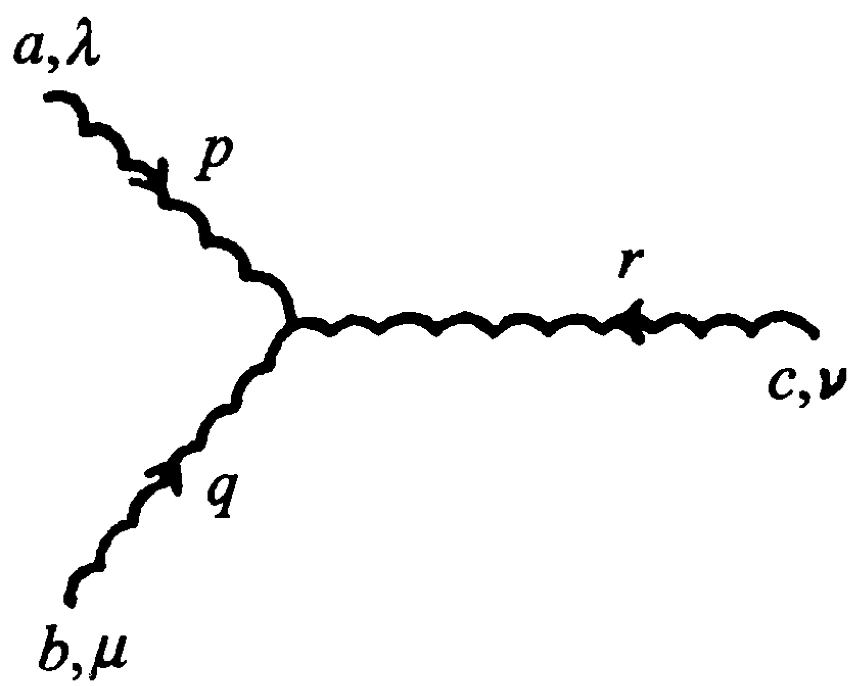
规范场与 Fermi 子的作用顶点




$$-g\gamma_\mu T_a$$

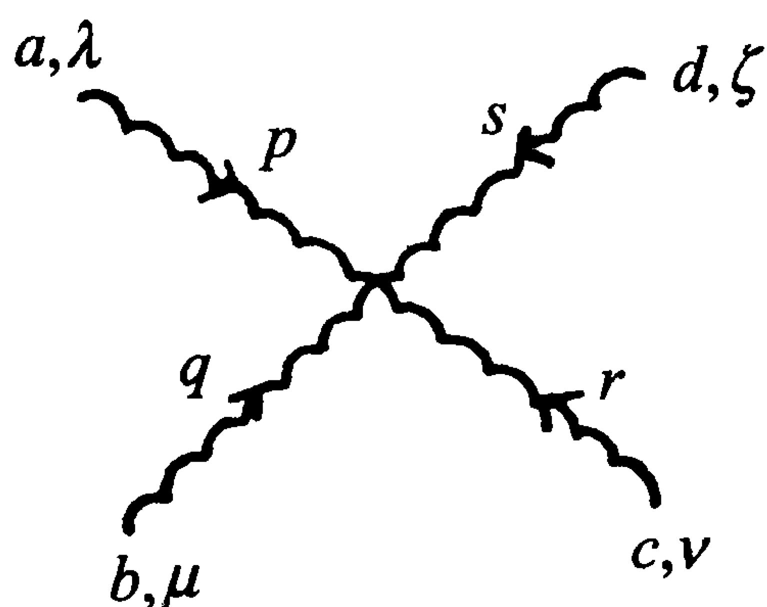
附图 5

规范场自作用顶点




$$-gf_{abc}[\delta_{\lambda\mu}(p-q)_\nu+\delta_{\mu\nu}(q-r)_\lambda$$
$$+\delta_{\nu\lambda}(r-p)_\mu]$$

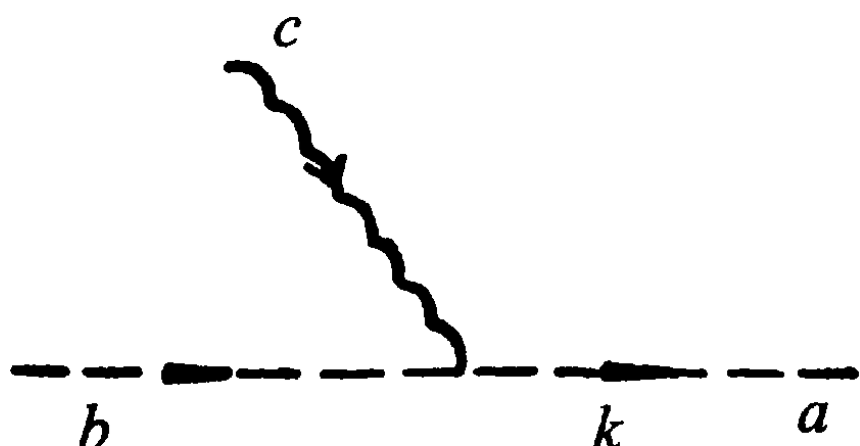
附图 6




$$-\mathrm{i}g^2 f_{abe}f_{cde}(\delta_{\lambda\nu}\delta_{\mu\zeta}-\delta_{\lambda\zeta}\delta_{\mu\nu})$$
$$-\mathrm{i}g^2 f_{ace}f_{bde}(\delta_{\lambda\mu}\delta_{\nu\zeta}-\delta_{\lambda\zeta}\delta_{\nu\mu})$$
$$-\mathrm{i}g^2 f_{ade}f_{cbe}(\delta_{\lambda\nu}\delta_{\zeta\mu}-\delta_{\lambda\mu}\delta_{\zeta\nu})$$

附图 7

规范场与虚拟场作用顶点




$$g f_{abc} k_\mu$$

附图 8

$S$ 矩阵元外线因子

初态 Fermi 子 $u_\sigma(p)$，初态反 Fermi 子 $\bar{v}_\sigma(p)$，

初态规范粒子 $e_\mu^\sigma(k)$。

末态 Fermi 子 $\bar{u}_\sigma(p)$，末态反 Fermi 子 $v_\sigma(p)$，

末态规范粒子 $\bar{e}_\mu^\sigma(k)$，

$$\bar{e}_\mu^\sigma=(\boldsymbol{e}^{\sigma *},\mathrm{i}e_0^{\sigma *})$$

内线动量积分 $$\int\frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4}$$

顶点原子 $(2\pi)^4\delta^4(\Sigma p)$

每个 Fermi 子圈或虚拟场圈有一个因子(−1)。

**(8) 坐标平移**

$$\phi(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{P}\cdot x}\phi(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{P}\cdot x},\quad \hat{P}\text{——动量算符}$$

**(9) 截面及衰变概率公式**

$$S=1+\mathrm{i}T$$

$$\langle f|T|i\rangle=(2\pi)^4\delta^4(P_f-P_i)M_{fi}$$

散射过程 $p_1+p_2\to p'_1+p'_2+\cdots+p'_n$，

$$d\sigma = \frac{1}{4[(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{\frac{1}{2}}} \frac{|M_{fi}|^2}{S} \prod_{p'_j=1}^{n} \frac{1}{2E'_j} \frac{d^3 p'_j}{(2\pi)^3} \cdot (2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_f)$$

$S = \prod_i n_i!$，$n_i$ 为末态中第 $i$ 种全同粒子的个数。

衰变概率　$P_i \rightarrow p'_1 + p'_2 + \cdots + p'_n$

$$\mathbf{d}\Gamma = \frac{1}{2E_i} \frac{|M_{fi}|^2}{S} \prod_{p'_j=1}^{n} \frac{1}{2E'_j} \frac{d^3 p_j'}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_f)$$